К. А. ЖЕВЛАКОВ
А. М. СЛИНЬКО
И. П. ШЕСТАКОВ
А. И. ШИРШОВ

# КОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К АССОЦИАТИВНЫМ

В середине прошлого столетия в математике начали возникать системы, удовлетворяющие всем аксиомам кольца, кроме ассоциативности. Среди них особо важную роль играет алгебра так называемых чисел Кэли. Эта алгебра не является ассоциативной, однако любые ее два элемента порождают ассоциативную подалгебру. Такие алгебры называются альтернативными. Теория альтернативных колец особенно интенсивно стала развиваться после того, как обнаружились ее тесные связи с теорией квадратичных форм и теорией проективных плоскостей. Другой важный класс неассоциативных колец — йордановы кольца — возник в работах, посвященных аксиоматизации основ квантовой механики. Иордановы кольца, как и альтернативные, довольно тесно связаны с ассоциативными кольцами, однако эта связь уже далеко не так тривиальна.

Предлагаемая вниманию читателя монография является первой книгой в мировой литературе, содержащей полное и систематическое изложение теории альтернативных колец вплоть до самых последних ее достижений. Книга также содержит изложение основ теории йордановых алгебр.

Книга рассчитана на математиков — аспирантов и научных работников, а также на студентов старших курсов университетов и пединститутов. Она может служить основой для специальных курсов и семинаров.

К. А. ЖЕВЛАКОВ
А. М. СЛИНЬКО
И. П. ШЕСТАКОВ
А. И. ШИРШОВ


# КОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К АССОЦИАТИВНЫМ

СОВРЕМЕННАЯ АЛГЕБРА

К. А. ЖЕВЛАКОВ
А. М. СЛИНЬКО
И. П. ШЕСТАКОВ
А. И. ШИРШОВ

# КОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К АССОЦИАТИВНЫМ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.1
Ж 45
УДК 512.8

**Кольца, близкие к ассоциативным.** Ширшов А. И., Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978.

Монография является первой книгой в мировой литературе, содержащей полное и систематическое изложение теории альтернативных колец вплоть до самых последних ее достижений. Книга также содержит изложение основ теории йордановых алгебр.

Книга рассчитана на математиков — аспирантов и научных работников, а также на студентов старших курсов университетов и пединститутов. Она может служить основой для специальных курсов и семинаров

К $\frac{20203-134}{053(02)-78}$ 62-78

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

До 30-х годов нашего столетия теория колец развивалась в основном как теория ассоциативных колец. Однако еще с середины прошлого столетия в математике возникали системы, удовлетворяющие всем аксиомам кольца, кроме ассоциативности. Такова, например, построенная в 1845 г. английским математиком Артуром Кэли алгебра чисел Кэли, с помощью которой он переоткрыл найденное в 1818 г. Дегеном тождество, представляющее произведение двух сумм восьми квадратов снова в виде суммы восьми квадратов. Это — восьмимерная алгебра с делением над полем вещественных чисел. Она удовлетворяет следующим ослабленным тождествам ассоциативности: $(aa)\,b = a\,(ab)$, $(ab)\,b = a\,(bb)$.

Алгебры с этими двумя тождествами впоследствии были названы альтернативными. Такое название объясняется тем, что во всякой алгебре с двумя указанными тождествами ассоциатор $(x, y, z) = (xy)\,z - x\,(yz)$ является альтернативной (кососимметрической) функцией своих аргументов. Серьезное внимание математиков теория альтернативных алгебр привлекла после того, как обнаружились ее глубокие связи с теорией проективных плоскостей, активно развивающейся в начале века. При этом выяснилось, что альтернативные алгебры «довольно близки» к ассоциативным. Существо этой близости проясняет теорема Артина, утверждающая, что во всякой альтернативной алгебре подалгебры, порожденные двумя элементами, ассоциативны.

Другой важный класс неассоциативных алгебр — йордановы алгебры, определяемые тождествами $xy = yx$, $(x^2y)\,x = x^2\,(yx)$. Они возникли в работах немецкого физика Йордана, посвященных аксиоматизации основ квантовой механики. Йордановы алгебры связаны с ассоциативными алгебрами следующим образом.

Пусть $A$ — ассоциативная алгебра над полем характеристики $\neq 2$. Определим на векторном пространстве алгебры $A$ новую операцию умножения $a \odot b = {}^1/_2 (ab + ba)$. Полученную алгебру обозначим через $A^{(+)}$. Эта алгебра является йордановой. Если подпространство $J$ алгебры $A$ замкнуто относительно операции $a \odot b$, то оно вместе с этой операцией образует подалгебру алгебры $A^{(+)}$ и является, следовательно, йордановой алгеброй.

Похожая связь имеется между ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли, которые задаются тождествами $x^2 = 0$, $(xy) z + (zx) y + (yz) x = 0$. Если в ассоциативной алгебре $A$ определить новое умножение формулой $[a, b] = ab - ba$, то полученная алгебра $A^{(-)}$ будет алгеброй Ли. Для алгебр Ли над полями имеется связь и в обратную сторону: по теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта всякая алгебра Ли над произвольным полем является подалгеброй алгебры $A^{(-)}$ для подходящей ассоциативной алгебры $A$.

В теории йордановых алгебр ситуация иная: над любым полем существуют йордановы алгебры, не являющиеся подалгебрами алгебр $A^{(+)}$ ни для какой ассоциативной алгебры $A$. Если йорданова алгебра $J$ является подалгеброй алгебры $A^{(+)}$, где $A$ — ассоциативная алгебра, то $J$ называется специальной йордановой алгеброй.

Связь в обратную сторону для йордановых алгебр также имеется, хотя она и не так сильна, как в случае алгебр Ли. Основной результат в этом направлении принадлежит одному из авторов и состоит в том, что любая йорданова алгебра с двумя порождающими специальна.

Теории альтернативных, лиевых и йордановых алгебр тесно переплетены между собой, имеют обширные контакты с различными областями математики и составляют вместе с сильно развитой теорией ассоциативных колец основное ядро современной теории колец. Алгебры этих трех классов объединяются под общим названием «алгебры, близкие к ассоциативным». Этот термин введен в обзорной статье А. И. Ширшова [279], где была намечена обширная программа дальнейших исследований.

В нашей книге мы, естественно, не смогли охватить всю теорию колец. Само название книги свидетельствует о том, что теория ассоциативных колец в ней не излагается. Однако для чтения основного текста от читателя

требуется лишь знание таких классических ее разделов, как строение артиновых колец или теория радикала Джекобсона, которые можно прочесть в любой книге по теории ассоциативных колец. Кроме того, совершенно не затрагиваются в нашей книге алгебры Ли, которым посвящено несколько книг на русском языке.

Наиболее подробно мы излагаем теорию альтернативных алгебр, с которой читатель ранее мог ознакомиться только по журнальной литературе. В изложении теории йордановых алгебр имеются некоторые пробелы. Многие невключенные результаты содержатся в монографии Джекобсона [47], с которой мы старались не пересекаться, делая акцент на достижения последнего десятилетия.

Первая глава книги носит в основном справочный характер. В ней собраны основные факты о многообразиях алгебр и линеаризации тождеств. Читателю рекомендуется обращаться к ней по мере надобности. Остальные главы тоже не обязательно читать подряд. Мы рекомендуем читателю два маршрута:

«альтернативные алгебры» — 2, 3.1, 3.2, 5—13;

«йордановы алгебры» — 2—4, 5.1—5.4, 8.1, 8.2, 14, 15 (указываются только номера глав и параграфов). Последняя глава, посвященная правоальтернативным алгебрам, носит в основном обзорный характер.

Почти каждый параграф книги снабжен упражнениями, в которых нередко читателю предлагается доказать теорему, имеющую вполне самостоятельное значение. В этих случаях даются подробные указания. Упражнения в основном тексте нигде не используются.

Нумерация теорем, лемм и формул в каждой главе своя. При ссылках на теоремы (формулы) другой главы перед номером теоремы (формулы) пишется номер соответствующей главы.

В конце книги приведен список литературы, который не претендует на полноту. Обзоры и монографии отмечены в этом списке звездочкой.

В основе книги лежит материал, излагавшийся в спецкурсах А. И. Ширшова, неоднократно читавшихся в МГУ и НГУ, а также в спецкурсах остальных авторов, читавшихся в разные годы в НГУ.

Авторы благодарят Ю. А. Медведева и В. Г. Скосырского за большую помощь в составлении библиографии.

*ГЛАВА I*

# МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

## § 1. Свободные алгебры

Пусть Ф — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей 1. Множество $A$ называется *алгеброй* над кольцом Ф, если на $A$ определена структура унитарного Ф-модуля и операция умножения, связанная с модульными операциями соотношениями

$$(a + b) c = ac + bc, \ a (b + c) = ab + ac,$$

$$\alpha (ab) = (\alpha a) b = a (\alpha b),$$

$a, b, c \in A$; $\alpha \in$ Ф. Алгебры над кольцом Ф будем для краткости называть Ф-*алгебрами*; иногда их называют также Ф-*операторными кольцами*. Кольцо Ф называют *кольцом скаляров* или *кольцом операторов*. Если Ф — поле, то всякая обычная алгебра над полем Ф является, очевидно, Ф-алгеброй. Всякое кольцо является алгеброй над кольцом целых чисел $\boldsymbol{Z}$. Таким образом, понятие алгебры над кольцом объединяет понятия кольца и алгебры над полем.

Пусть $A$ и $B$ — две Ф-алгебры. *Гомоморфизмом* Ф-алгебры $A$ в Ф-алгебру $B$ называется отображение $\varphi$: $A \to B$, которое является гомоморфизмом Ф-модулей этих алгебр, такое, что

$$\varphi (ab) = \varphi (a) \varphi (b), \quad a, b \in A.$$

Гомоморфизмам Ф-алгебр соответствуют Ф-допустимые идеалы, т. е. идеалы, выдерживающие умножение на элементы из Ф.

Зафиксируем произвольное множество $X = \{x_\alpha\}$ и добавим к нему еще два символа: левую и правую скобки.

Получим множество $X^* = X \cup \{(\ ,\ )\}$. Рассмотрим всевозможные конечные последовательности элементов множества $X^*$. Две последовательности $a_1a_2 \ldots a_m$ и $b_1b_2 \ldots b_n$, $a_i, b_j \in X^*$, считаются равными, если $m = n$ и $a_i = b_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Определим индуктивно множество $V[X]$ таких последовательностей элементов множества $X^*$, которые будем называть *неассоциативными словами* от элементов множества $X$. Во-первых, множеству $V[X]$ принадлежат все элементы множества $X$; во-вторых, если $x_1, x_2 \in X$ и $u, v \in V[X] \setminus X$, то последовательности $x_1x_2$, $x_1(u)$, $(v)x_2$, $(u)(v)$ также принадлежат множеству $V[X]$; никакие другие последовательности в $V[X]$ не входят. Например, последовательность $(x_1(x_2x_3))x_4$ является неассоциативным словом от элементов множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а последовательность $(x_1(x_2x_3)x_4)$ таковым не является. *Длиной неассоциативного слова* $v$ называется число вхождений в него элементов множества $X$; она обозначается через $d(v)$.

Предложение 1. *Пусть $v$ — неассоциативное слово от элементов некоторого множества. Тогда*

1) *число левых скобок в нем равно числу правых скобок;*
2) *в любой начальной подпоследовательности слова $v$ число левых скобок не меньше числа правых скобок.*

Доказательство проводится очевидной индукцией по длине слова $v$.

На множестве $V[X]$ определим бинарную операцию, обозначаемую $\cdot$, следующим правилом. Пусть $x_1, x_2 \in X$; $u, v \in V[X] \setminus X$. Положим

$$x_1 \cdot x_2 = x_1x_2, \qquad x_1 \cdot u = x_1(u),$$
$$v \cdot x_2 = (v)x_2, \qquad u \cdot v = (u)(v).$$

Предложение 2. *Всякое неассоциативное слово $v$, $d(v) \geqslant 2$, имеет единственное представление в виде произведения двух неассоциативных слов меньшей длины.*

Доказательство. Существование такого представления вытекает непосредственно из определения. Допустим, что слово $v$ имеет два различных представления: $v = u \cdot w = u' \cdot w'$. Рассмотрим случай, когда слова $u$, $w$, $u'$, $w'$ все имеют длину больше 1. Тогда

$$v = (u)(w) = (u')(w'),$$

причем $d(u) + d(w) = d(u') + d(w')$. Если $d(u) = d(u')$, то, очевидно, $u = u'$, $w = w'$. Если же $d(u) > d(u')$, то последовательность $u'$) есть начальная подпоследовательность слова $u$, имеющая, ввиду первого пункта предложения 1, правых скобок больше, чем левых. Но это противоречит второму пункту того же предложения. Разбор остальных случаев еще более прост. Предложение доказано.

Рассмотрим теперь свободный унитарный Ф-модуль $\Phi[X]$ от множества $V[X]$ порождающих и распространим операцию умножения, определенную в $V[X]$, на $\Phi[X]$ следующим правилом:

$$\left(\sum_i \alpha_i u_i\right)\cdot\left(\sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j (u_i \cdot v_j),$$

где $\alpha_i$, $\beta_j \in \Phi$; $u_i$, $v_j \in V[X]$. Мы получили Ф-алгебру $\Phi[X]$, которая называется *свободной алгеброй* над кольцом Ф от множества $X$ порождающих. Свободные алгебры обладают следующим универсальным свойством.

Теорема 1. *Пусть $A$ — произвольная Ф-алгебра и $\theta$ — некоторое отображение $X$ в $A$. Тогда $\theta$ единственным способом продолжается до гомоморфизма алгебры $\Phi[X]$ в $A$.*

Доказательство. Распространим сначала $\theta$ на $V[X]$. Допустим, что $\theta$ уже определено на множестве всех неассоциативных слов длины меньше $n$, и пусть длина слова $w$ равна $n$. В силу предложения 2 $w$ однозначно представляется в виде произведения двух слов меньшей длины: $w = u \cdot v$. Элементы $\theta(u)$ и $\theta(v)$ уже определены, поэтому положим $\theta(w) = \theta(u)\cdot\theta(v)$. Отображение определено корректно, так как $u$ и $v$ однозначно определяются словом $w$. Распространим теперь $\theta$ на $\Phi[X]$, полагая для всех $\alpha_i \in \Phi$ и $u_i \in V[X]$

$$\theta\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) = \sum_i \alpha_i \theta(u_i).$$

Это можно сделать, так как $\Phi[X]$ — свободный Ф-модуль. Не составляет теперь труда убедиться, что указанное отображение $\theta$ есть гомоморфизм $\Phi[X]$ в $A$. Его единственность очевидна. Теорема доказана.

Элементы алгебры $\Phi[X]$ называются *неассоциативными многочленами* от элементов множества $X$. Неассо-

циативный многочлен вида $\alpha v$, где $\alpha \in \Phi$, $v \in V[X]$, называется *неассоциативным одночленом*. Длина слова $v$ называется *степенью* этого *одночлена*. *Степенью многочлена* называется максимум степеней одночленов, суммой которых этот многочлен является.

## § 2. Многообразия. Алгебры, свободные в многообразии

Зафиксируем счетное множество символов $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $f$ — произвольный элемент из $\Phi[X]$. В его запись входит лишь конечное число элементов из $X$, например, $x_1, x_2, \ldots, x_n$; в этом случае будем писать $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $A$ — некоторая Ф-алгебра и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. В силу теоремы 1 существует единственный гомоморфизм $\theta$: $\Phi[X] \to A$, переводящий $x_i$ в $a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, а прочие элементы множества $X$ в нуль. Образ элемента $f$ при гомоморфизме $\theta$ будем обозначать через $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и говорить, что элемент $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ получен подстановкой элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Неассоциативный многочлен $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$ называется *тождеством* алгебры $A$, если $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Говорят также, что $A$ удовлетворяет тождеству $f$ или что в $A$ справедливо тождество $f$. Совокупность всех тождеств данной алгебры есть идеал алгебры $\Phi[X]$, который называется *идеалом тождеств* (*Т-идеалом*) алгебры $A$ и обозначается $T(A)$. Совокупность всех тождеств, которым удовлетворяет каждая алгебра некоторого класса алгебр $\mathfrak{M}$, — также идеал в $\Phi[X]$; он называется *идеалом тождеств* (*Т-идеалом*) класса алгебр $\mathfrak{M}$ и обозначается $T(\mathfrak{M})$.

Пусть $I$ — подмножество в $\Phi[X]$. Класс $\mathfrak{M}$ всех Ф-алгебр, удовлетворяющих каждому тождеству из $I$, называется *многообразием* Ф-алгебр, определенным множеством тождеств $I$. Множество тождеств $I$ называется *определяющим* для многообразия $\mathfrak{M}$. Так, например, все ассоциативные Ф-алгебры образуют многообразие с одним определяющим тождеством $f = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3)$. Класс всех Ф-алгебр Ли также является многообразием; определяющие тождества этого многообразия таковы: $f_1 = x_1^2$, $f_2 = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2$. Тождества $f_1 = x_1^2x_2 -$

$- x_1(x_1x_2)$ и $f_2 = x_1x_2^2 - (x_1x_2)x_2$ определяют многообразие альтернативных алгебр. По отдельности, эти тождества определяют соответственно многообразия левоальтернативных и правоальтернативных алгебр. Многообразие йордановых алгебр определяется тождествами $f_1 = x_1x_2 - x_2x_1$, $f_2 = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$.

Многообразие, состоящее только из нулевой алгебры, называется *тривиальным*.

Пусть $\mathfrak{M}$ — нетривиальное многообразие Ф-алгебр и $F$ — алгебра из $\mathfrak{M}$ с множеством порождающих $Y$. Алгебра $F$ называется *свободной в многообразии* $\mathfrak{M}$ (или $\mathfrak{M}$*-свободной*) *с множеством свободных порождающих* $Y$, если всякое отображение множества $Y$ в произвольную алгебру $A$ из $\mathfrak{M}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры $F$ в $A$.

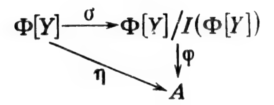
Пусть $I$ — некоторое множество многочленов из $\Phi[X]$. Через $I(A)$ будем обозначать идеал Ф-алгебры $A$, порожденный всевозможными элементами вида $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $f \in I$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *нетривиальное многообразие Ф-алгебр с определяющей системой тождеств* $I$. *Тогда для любого множества* $Y$ *ограничение канонического гомоморфизма* $\sigma\colon \Phi[Y] \to \Phi[Y]/I(\Phi[Y])$ *инъективно на множестве* $Y$ *и алгебра* $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y^\sigma] = \Phi[Y]/I(\Phi[Y])$ *является свободной в многообразии* $\mathfrak{M}$ *с множеством свободных порождающих* $Y^\sigma$. *Любые две свободные алгебры в* $\mathfrak{M}$ *с равномощными множествами свободных порождающих изоморфны.*

Доказательство. Алгебра $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y^\sigma]$ порождается множеством $Y^\sigma$ и принадлежит $\mathfrak{M}$, так как удовлетворяет всем тождествам из $I$. Покажем, что она свободнь в $\mathfrak{M}$ с множеством свободных порождающих $Y^\sigma$. Пуста $A \in \mathfrak{M}$ и $\tau\colon Y^\sigma \to A$ — некоторое отображение $Y^\sigma$ в $A$. Тогда отображение $\sigma \circ \tau\colon Y \to A$ по теореме 1 продолжается до гомоморфизма $\eta\colon \Phi[Y] \to A$ *). Но идеал $I(\Phi[Y])$ лежит в ядре любого гомоморфизма алгебры $\Phi[Y]$ в алгебру многообразия $\mathfrak{M}$ и, в частности, в ядре гомоморфизма $\eta$. Поэтому существует гомоморфизм $\varphi\colon \Phi[Y]/I(\Phi[Y]) \to A$, делающий коммутативной

*) Здесь и далее $(\varphi \circ \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$.

диаграмму




т. е. такой, что $\sigma \circ \varphi = \eta$. Если $y \in Y$, то $\varphi(y^\sigma) = y^{\sigma\circ\varphi} = y^\eta = y^{\sigma\circ\tau} = \tau(y^\sigma)$ и, значит, $\varphi$ продолжает отображение $\tau$. Следовательно, $\varphi$ — искомый гомоморфизм. Единственность его очевидна.

Итак, $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y^\sigma]$ — свободная алгебра в многообразии $\mathfrak{M}$ и $Y^\sigma$ — множество ее свободных порождающих. Докажем, что ограничение $\sigma$ на $Y$ инъективно. Пусть $y_1 \neq y_2$, но $y_1^\sigma = y_2^\sigma$. Рассмотрим ненулевую алгебру $A$ из $\mathfrak{M}$ и ее ненулевой элемент $a$. Существует гомоморфизм $\tau\colon \Phi[Y] \to A$ такой, что $y_1^\tau = a$, $y_2^\tau = 0$. Так как $I(\Phi[Y])$ лежит в ядре $\tau$, существует гомоморфизм $\varphi\colon \Phi_{\mathfrak{M}}[Y^\sigma] \to A$ такой, что $\tau = \sigma \circ \varphi$. Но теперь, ввиду того что $y_1^\sigma = y_2^\sigma$, мы имеем $a = y_1^\tau = (y_1^\sigma)^\varphi = (y_2^\sigma)^\varphi = y_2^\tau = 0$. Полученное противоречие доказывает инъективность ограничения $\sigma$ на $Y$.

Мы доказали, что $Y^\sigma$ — множество свободных порождающих алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y^\sigma]$, равномощное $Y$. С помощью стандартной процедуры мы можем теперь построить свободную алгебру $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ с множеством свободных порождающих $Y$.

Пусть теперь множества $Y$ и $Y'$ равномощны. Докажем, что алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ и $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y']$ изоморфны. Рассмотрим биекцию $\sigma\colon Y \to Y'$. По доказанному, существует единственный гомоморфизм $\tau\colon \Phi_{\mathfrak{M}}[Y] \to \Phi_{\mathfrak{M}}[Y']$, продолжающий $\sigma$. Рассмотрим также биекцию $\sigma^{-1}\colon Y' \to Y$ и гомоморфизм $\tau'\colon \Phi_{\mathfrak{M}}[Y'] \to \Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$, продолжающий $\sigma^{-1}$. Тогда $\tau \circ \tau'$ отображает гомоморфно алгебру $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ в себя, а сужение $\tau \circ \tau'$ на $Y$ является тождественным отображением. Однако, по доказанному, имеется лишь один гомоморфизм алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ в $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$, тождественный на $Y$. Этот гомоморфизм — тождественный. Значит, $\tau \circ \tau' = \mathrm{id}$. Аналогично имеем $\tau' \circ \tau = \mathrm{id}$. Следовательно, $\tau$ — изоморфизм.

Теорема доказана.

Как легко заметить, многообразия ассоциативных, альтернативных, правоальтернативных и йордановых алгебр нетривиальны (все они содержат, например, алгебры с нулевым умножением) и потому обладают свободными алгебрами от любого множества свободных порождающих $Y$, которые мы будем обозначать Ass $[Y]$, Alt $[Y]$, RA $[Y]$ и J $[Y]$ соответственно.

Следствие. *Если $I$ — система определяющих тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, то $T(\mathfrak{M}) = I(\Phi[X])$.*

Доказательство. Идеал $T(\mathfrak{M})$ лежит в ядре любого гомоморфизма алгебры $\Phi[X]$ на алгебру из $\mathfrak{M}$ и, в частности, в ядре канонического гомоморфизма $\sigma$: $\Phi[X] \to \Phi_{\mathfrak{M}}[X]$, которое равно $I(\Phi[X])$. Ввиду очевидности обратного включения, следствие доказано.

Замечание 1. При изучении алгебр конкретного многообразия $\mathfrak{M}$ мы будем часто называть тождеством алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ элемент $f \in \Phi_{\mathfrak{M}}[X]$, подразумевая под этим тот факт, что некоторый прообраз элемента $f$ в $\Phi[X]$ при каноническом гомоморфизме $\Phi[X]$ на $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ (а, следовательно, и все прообразы) является тождеством алгебры $A$.

## § 3. Однородные тождества и однородные многообразия

Всякий неассоциативный многочлен $f \in \Phi[X]$ единственным способом может быть разложен в несократимую сумму одночленов. Будем говорить, что одночлен $\alpha v$, где $\alpha \in \Phi$, $v \in V[X]$, имеет *тип* $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$, если неассоциативное слово $v$ содержит $x_i$ ровно $n_i$ раз, причем $n_k \neq 0$, но $n_j = 0$ для $j > k$. Например, одночлен $((x_1x_2)x_2)(x_1x_4)$ имеет тип $[2, 2, 0, 1]$. Число $n_i$ будем называть *степенью одночлена* $\alpha v$ по $x_i$. Если все одночлены многочлена $f$ в несократимой записи имеют одну и ту же степень $n_i$ по $x_i$, то многочлен $f$ назовем *однородным по* $x_i$ степени $n_i$. Одночлены, имеющие один и тот же тип, называются *однотипными*. Неассоциативный многочлен (тождество алгебры) называется *однородным*, если все его одночлены в несократимой записи однотипны. Иначе говоря, многочлен $f$ является однородным, если он однороден по каждой переменной. Так, например, однородным является многочлен $(x_1^2x_2)x_4 + ((x_1x_4)x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_4 -$

— $(x_1x_4)(x_2x_1)$; каждый его одночлен имеет тип [2, 1, 0, 1]. Многочлен $x_1^2x_2 - (x_1x_3)x_1 + x_1^2$ однороден по $x_1$ степени 2, однако однородным не является. Однородный многочлен типа $[n_1, n_2, \ldots, n_k]$, где все $n_i \leqslant 1$, называется *полилинейным.*

Так как свободная алгебра $\Phi[X]$ является свободным $\Phi$-модулем с множеством $V[X]$ свободных порождающих, она обладает разложением в прямую сумму подмодулей $\Phi^{[n_1, \ldots, n_k]}[X]$, состоящих из однородных многочленов типа $[n_1, \ldots, n_k]$:

$$\Phi[X] = \bigoplus \Phi^{[n_1, \ldots, n_k]}[X].$$

*Степенью неассоциативного многочлена по* $x_i$ называется максимум степеней по $x_i$ его одночленов.

Пусть $f \in \Phi[X]$ — произвольный неассоциативный многочлен. Сгруппируем однотипные одночлены многочлена $f$. Тогда $f$ представится в виде суммы однородных многочленов. Эти однородные многочлены называются *однородными компонентами* многочлена $f$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \Phi[X]$ — *тождество* $\Phi$-*алгебры* $A$ *степени* $k_i$ *по* $x_i$. *Положим* $k = \max k_i$. *Допустим, что в* $\Phi$ *имеется* $k+1$ *элементов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ *таких, что для определителя Вандермонда*

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^k \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_{k+1} & \alpha_{k+1}^2 & \ldots & \alpha_{k+1}^k \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$

*равенство* $d \cdot a = 0$ *влечет* $a = 0$ *для любого* $a \in A$. *Тогда всякая однородная компонента тождества* $f$ *является тождеством алгебры* $A$.

Доказательство. Сначала мы представим $f$ в виде $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_{k_1}$, где $f_i$ — сумма всех одночленов многочлена $f$, имеющих степень $i$ по $x_1$. Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные элементы алгебры $A$. Будем сокращенно обозначать $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ через $f_i(a)$. Для $i = 1, 2, \ldots, k_1 + 1$

имеем соотношение

$$f_0(a)+\alpha_i f_1(a)+\alpha_i^2 f_2(\alpha)+\ldots+\alpha_i^{k_1} f_{k_1}(a)=$$
$$=f(\alpha_i a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=0,$$

откуда следует (см. Ленг С., Алгебра, «Мир», 1968, стр.376), что $d_1 f_j(a)=0$, $j=0,1,\ldots,k_1$, где

$$d_1=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{k_1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{k_1+1} & \alpha_{k_1+1}^2 & \ldots & \alpha_{k_1+1}^{k_1} \end{vmatrix}.$$

Так как $d_1$ — делитель $d$, то из $d_1 f_j(a)=0$ следует, что $f_j(a)=0$. Ввиду произвольности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ это означает, что $f_0, f_1, \ldots, f_{k_1}$ — тождества алгебры $A$. Проделав ту же операцию с многочленами $f_j$, $j=0, 1, 2, \ldots, k_1$, и переменной $x_2$ и т. д., в конце концов докажем теорему.

Условия теоремы заведомо выполнены в каждом из следующих случаев:

1) существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in \Phi$ такие, что определитель Вандермонда $d=\prod\limits_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)$ обратим в $\Phi$;

2) алгебра $A$ — свободный $\Phi$-модуль и существуют элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in \Phi$ такие, что $d=\prod\limits_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0$;

3) $\Phi$ — поле, содержащее более $k$ элементов.

Следствие 1. *Пусть $f$ — тождество $\Phi$-алгебры $A$ степени $k_i$ по $x_i$ и $k=\max k_i$. Тогда в любом из случаев 1) — 3) всякая однородная компонента $f$ является тождеством алгебры $A$.*

Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем *однородным*, если для всякого $f \in T(\mathfrak{M})$ все однородные компоненты $f$ также принадлежат $T(\mathfrak{M})$.

Следствие 2. *Всякое многообразие алгебр над бесконечным полем однородно.*

Заметим, что для однородного многообразия $\mathfrak{M}$

$$T(\mathfrak{M})=\bigoplus_{[n_1,\ \ldots,\ n_k]}(\Phi^{[n_1,\ \ldots,\ n_k]}[X]\cap T(\mathfrak{M})),$$

поэтому разложение алгебры $\Phi[X]$ в прямую сумму подпространств $\Phi^{[n_1, \ldots, n_k]}[X]$ индуцирует аналогичное разложение и для свободной алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ многообразия $\mathfrak{M}$, изоморфной фактор-алгебре $\Phi[X]/T(\mathfrak{M})$:

$$\Phi_{\mathfrak{M}}[X] = \bigoplus_{[n_1, \ldots, n_k]} \Phi_{\mathfrak{M}}^{[n_1, \ldots, n_k]}[X],$$

где

$$\Phi_{\mathfrak{M}}^{[n_1, \ldots, n_k]}[X] = \Phi^{[n_1, \ldots, n_k]}[X]/\Phi^{[n_1, \ldots, n_k]}[X] \cap T(\mathfrak{M}).$$

Поэтому для элементов свободной алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ многообразия $\mathfrak{M}$ могут быть корректно определены понятия однородности, степени, степени по каждой из переменных.

В дальнейшем нам понадобится следующий критерий однородности многообразия.

Лемма 1. *Для однородности многообразия $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы $T(\mathfrak{M})$ как идеал алгебры $\Phi[X]$ обладал системой однородных порождающих элементов.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ однородно, то совокупность всех однородных компонент элементов $T(\mathfrak{M})$ содержится в $T(\mathfrak{M})$ и порождает этот идеал даже как $\Phi$-модуль. Если же $T(\mathfrak{M})$ как идеал порождается множеством однородных многочленов $\{f_\alpha\}$, то $T(\mathfrak{M})$ как $\Phi$-модуль порождается однородными элементами вида

$$v(u_1, \ldots, u_k, f_\alpha, u_{k+1}, \ldots, u_m),$$

где $v, u_1, \ldots, u_m$ — одночлены из $\Phi[X]$. Наличие же в $T(\mathfrak{M})$ системы однородных порождающих как $\Phi$-модуля влечет однородность многообразия $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

## § 4. Частичные линеаризации тождеств

Зафиксируем некоторый элемент $y \in \Phi[X]$ и определим семейство $\Delta(y) = \{\Delta_i^k(y) \mid i = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, 2, \ldots\}$ линейных отображений алгебры $\Phi[X]$ в себя, полагая

1) $\Delta_i^0(y) = \mathrm{id}$ — тождественное отображение;
2) $x_s \Delta_i^k(y) = 0$, если $k > 1$, либо $k = 1$, $i \neq s$;
3) $x_i \Delta_i^1(y) = y$;
4) $(u \cdot v)\Delta_i^k(y) = \sum_{r+s=k} (u\Delta_i^r(y)) \cdot (v\Delta_i^s(y))$,

где $x_j \in X$, $u$, $v$ — произвольные одночлены из $\Phi[X]$. Как легко видеть, условия 1) — 4) вместе с условием линейности однозначно определяют действие отображений $\Delta_i^k(y)$ на алгебре $\Phi[X]$.

Лемма 2. *Пусть $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ — полилинейный одночлен. Тогда для любых $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Phi[X]$*

$$v(f_1, \ldots, f_n)\Delta_i^k(y) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v(f_1\Delta_i^{k_1}(y), \ldots, f_n\Delta_i^{k_n}(y)).$$

Доказательство. Будем обозначать для краткости $\Delta_i^k(y)$ просто через $\Delta_i^k$, а $v(f_1, \ldots, f_n)$ через $v(f)$. Проведем индукцию по $n$. При $n = 1$ все очевидно. Пусть теперь $n > 1$, тогда $v = v_1 \cdot v_2$, где $d(v_1) = m < n$, $d(v_2) = l < n$. По определению оператора $\Delta_i^k$ и по предположению индукции получаем

$$v(f)\Delta_i^k = (v_1(f)\cdot v_2(f))\Delta_i^k = \sum_{r+s=k}(v_1(f)\Delta_i^r)(v_2(f)\Delta_i^s) =$$

$$= \sum_{r+s=k}\Big(\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} v_1(f_1\Delta_i^{r_1}, \ldots, f_m\Delta_i^{r_m})\Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{s_1+\ldots+s_l=s} v_2(f_{m+1}\Delta_i^{s_1}, \ldots, f_n\Delta_i^{s_l})\Big) =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v_1(f_1\Delta_i^{k_1}, \ldots, f_m\Delta_i^{k_m}) \times$$

$$\times v_2(f_{m+1}\Delta_i^{k_{m+1}}, \ldots, f_n\Delta_i^{k_n}) =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} v(f_1\Delta_i^{k_1}, \ldots, f_n\Delta_i^{k_n}).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный одночлен из $\Phi[X]$ степени $m$ по $x_i$. Тогда при $k \leqslant m$*

$$u\Delta_i^k(y) = u_1 + u_2 + \ldots + u_{\binom{m}{k}},$$

*где $u_1, u_2, \ldots, u_{\binom{m}{k}}$ — всевозможные одночлены, получающиеся из $u$ заменой $k$ вхождений $x_i$ на $y$, а при $k > m$*

$$u\Delta_i^k(y) = 0.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть полилинейный одночлен $v(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nk_n})$, для

которого $u(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_1, \ldots, x_n, \ldots \ldots, x_n)$, и воспользоваться леммой 2 и условием 2) в определении оператора $\Delta_i^k(y)$.

Приведем примеры:

$$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^1(y) = (x_1^2x_2)y + [(x_1y)x_2]x_1 + [(yx_1)x_2]x_1,$$

$$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^2(y) = [(x_1y)x_2]y + [(yx_1)x_2]y + (y^2x_2)x_1,$$

$$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^3(y) = (y^2x_2)y,$$

$$[(x_1^2x_2)x_1]\Delta_1^4(y) = 0.$$

Заметим, что символ $i$ в обозначении $\Delta_i^k(y)$ нужен лишь для указания порождающего $x_i$, на котором оператор $\Delta_i^k(y)$ действует ненулевым образом. Если элементы множества $X$ не снабжены индексами, мы будем вместо индекса писать сам порождающий элемент. Например,

$$[(x^2z)t]\Delta_x^1(y) = [(xy)z]t + [(yx)z]t.$$

Лемма 3. *Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен из $\Phi[X]$ степени $m$ по $x_i$. Тогда*

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{m} f\Delta_i^k(y).$$

Доказательство. Ввиду следствия леммы 2 и линейности оператора $\Delta_i^k(y)$ достаточно рассмотреть случай, когда $f$ — одночлен. Проведем индукцию по степени $f$. Если $d(f) = 1$, то все ясно. Пусть теперь $d(f) > 1$, тогда $f = f_1 \cdot f_2$, где $d(f_i) < d(f)$, и пусть $f_1$ имеет степень $m_1$ по $x_i$, $f_2$ имеет степень $m_2$ по $x_i$. По предположению индукции и по определению оператора $\Delta_i^k(y)$ получаем

$$f(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) =$$
$$= f_1(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) f_2(x_1, \ldots, x_i + y, \ldots, x_n) =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{m_1} f_1\Delta_i^k(y)\right]\left[\sum_{r=0}^{m_2} f_2\Delta_i^r(y)\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{k+r=j}(f_1\Delta_i^k(y))(f_2\Delta_i^r(y))\right] = \sum_{j=0}^{m} f\Delta_i^j(y).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим некоторый неассоциативный многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$, и пусть $x_j \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Многочлены $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) = f\Delta_i^k(x_j)$ мы будем называть *частичными линеаризациями многочлена $f$ по $x_i$ степени $k$*. Пусть многочлен $f$ имеет степень $s$ по $x_i$. Ввиду следствия леммы 2 многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j)$ однороден по $x_j$ степени $k$ при $k \leqslant s$ и равен нулю при $k > s$. Если $f$ — однородный многочлен типа $[k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n]$, то многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1})$ также является однородным типа $[k_1, \ldots, k_i - k, \ldots, k_n, k]$ (при $k \leqslant k_i$). Заметим здесь же, что для любого $y \in \Phi[X]$ элемент $f\Delta_i^k(y)$ получается подстановкой элемента $y$ в многочлен $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j)$ вместо переменной $x_j$.

Предложение 3. *Если многообразие $\mathfrak{M}$ однородно, то для любых $f \in T(\mathfrak{M})$ и для любого $y \in \Phi[X]$ справедливо включение*

$$f\Delta(y) = \{f\Delta_i^k(y) \mid i = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, 2, \ldots\} \subseteq T(\mathfrak{M}).$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что если $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\mathfrak{M})$, то и $f(y_1, \ldots, y_n) \in T(\mathfrak{M})$ для любых элементов $y_1, \ldots, y_n \in \Phi[X]$. Поэтому для доказательства включений $f\Delta_i^k(y) \in T(\mathfrak{M})$ достаточно доказать, что $f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) \in T(\mathfrak{M})$, где $x_j \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. В силу леммы 3 мы имеем $T(\mathfrak{M}) \ni$

$$\ni f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n_i} f\Delta_i^k(x_j),$$ где $n_i$ — степень $f$ по $x_i$. Как было замечено выше, каждый из многочленов $f\Delta_i^k(x_j)$ однороден по $x_j$ степени $k$. Ввиду однородности $\mathfrak{M}$ отсюда следует, что $f\Delta_i^k(x_j) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) \in T(\mathfrak{M})$, откуда и $f\Delta_i^k(y) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; y) \in T(\mathfrak{M})$. Предложение доказано.

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: если $f\Delta(y) \subseteq T(\mathfrak{M})$ для любых $f \in T(\mathfrak{M})$ и $y \in \Phi[X]$, то многообразие $\mathfrak{M}$ однородно. Мы сейчас покажем, что на самом деле для однородности многообразия $\mathfrak{M}$ достаточно выполнения гораздо более слабого условия.

Пусть $f$ — неассоциативный многочлен. Обозначим через $f\Delta$ множество всех многочленов из $\Phi[X]$, которые можно получить из $f$ с помощью последовательных частичных линеаризаций:

$$f\Delta = \{g \in \Phi[X] \mid g = f\Delta_{i_1}^{j_1}(x_{k_1}) \ldots \Delta_{i_s}^{j_s}(x_{k_s})\}.$$

Теорема 4. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ обладает такой системой $I$ определяющих тождеств, что $f\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$ для всех $f \in I$. Тогда $\mathfrak{M}$ однородно.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что мы можем считать без ограничения общности, что система $I$ состоит из однородных многочленов. Действительно, пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$, $f = f_1 + f_2$, где $f_1$ однороден по $x_1$ степени $m$, а $f_2$ имеет по $x_1$ степень меньше $m$. Пусть, далее, $x_j$ — порождающий, не входящий в запись $f$. Тогда мы имеем $f\Delta_1^m(x_j) = f_1\Delta_1^m(x_j) + f_2\Delta_1^m(x_j) = f_1(x_j, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \in f\Delta$ и далее $f_1(x_j, x_2, \ldots, x_n)\,\Delta_j^m(x_1) = f_1(x_1,$ $x_2, \ldots, x_n) = f_1 \in f\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$, т. е. $f_1, f_2 \in T(\mathfrak{M})$. Покажем, что $f_1\Delta \cup f_2\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$. Так как $f_1 \in f\Delta$, то ясно, что $f_1\Delta \subseteq f\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$. Пусть теперь $g \in f_2\Delta$. Тогда $g = f_2\Delta_1 \ldots \Delta_k$, где $\Delta_i = \Delta_{t_i}^{r_i}(x_{s_i})$. Мы имеем $g = (f - f_1) \times$ $\times \Delta_1 \ldots \Delta_k = f\Delta_1 \ldots \Delta_k - f_1\Delta_1 \ldots \Delta_k \in T(\mathfrak{M})$. Итак, мы можем заменить в системе $I$ многочлен $f$ многочленами $f_1$ и $f_2$. Продолжая этот процесс, мы придем к однородной системе $I'$, удовлетворяющей условию теоремы. Согласно лемме 1 однородность многообразия $\mathfrak{M}$ эквивалентна тому, что идеал $T(\mathfrak{M})$ обладает системой однородных порождающих. По следствию теоремы 2 этот идеал порождается элементами вида $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, где $f \in I$; $g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_n \in \Phi[X]$. Разложим многочлены $g_1, \ldots, g_n$ на одночлены: $g_i = \sum_{k=1}^{s_i} g_{ik}$. Тогда по лемме 3 элемент $h =$ $= f(g_1, \ldots, g_n)$ представится в виде

$$h = \sum_m f_m(g_{11}, \ldots, g_{1s_1}, \ldots, g_{n1}, \ldots, g_{ns_n}),$$

где $f_m = f_m(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{ns_n}) \in f\Delta$. В силу однородности $f$ все элементы $f_m$ являются однородными; кроме того, по условию они лежат в $T(\mathfrak{M})$. Но тогда и все элементы

$$f_m(g_{11}, \ldots, g_{1s_1}, \ldots, g_{n1}, \ldots, g_{ns_n})$$

также являются однородными и лежат в $T(\mathfrak{M})$. Следовательно, совокупность этих элементов и есть искомая система однородных порождающих для идеала $T(\mathfrak{M})$.

Теорема доказана.

Выясним теперь, при каких условиях частичные линеаризации некоторого тождества сами являются тождествами.

Теорема 5. *Пусть $f \in \Phi[X]$ — тождество Ф-алгебры $A$, однородное по $x_i$ степени $k$. Допустим, что в Ф имеются такие $k-1$ элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, что для определителя*

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots \alpha_1^{k-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots \alpha_2^{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k-1} & \alpha_{k-1}^2 & \ldots \alpha_{k-1}^{k-1} \end{vmatrix} = \Big(\sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s\Big)\Big(\prod_{i<j} \alpha_j - \alpha_i\Big)\Big)$$

*равенство $d \cdot a = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in A$. Тогда все частичные линеаризации многочлена $f$ являются тождествами алгебры $A$.*

Доказательство. Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_j$ — произвольные элементы алгебры $A$. Как и при доказательстве теоремы 3, элементы $f_i^{(m)}(a_1, \ldots, a_n; a_j)$ для краткости обозначим $f_i^{(m)}(a)$. Имеем по лемме 3

$$0 = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\ = \sum_{s=0}^{k} f_i^{(s)}(a) = \sum_{s=1}^{k-1} f_i^{(s)}(a),$$

так как $f_i^{(0)}(a) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 0$ и $f_i^{(k)}(a) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 0$. Подставляя в полученное равенство последовательно элементы $\alpha_1 a_j, \alpha_2 a_j, \ldots, \alpha_{k-1} a_j$ вместо $a_j$, получим

$$\alpha_1 f_i^{(1)}(a) + \alpha_1^2 f_i^{(2)}(a) + \ldots + \alpha_1^{k-1} f_i^{(k-1)}(a) = 0,$$
$$\alpha_2 f_i^{(1)}(a) + \alpha_2^2 f_i^{(2)}(a) + \ldots + \alpha_2^{k-1} f_i^{(k-1)}(a) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{k-1} f_i^{(1)}(a) + \alpha_{k-1}^2 f_i^{(2)}(a) + \ldots + \alpha_{k-1}^{k-1} f_i^{(k-1)}(a) = 0,$$

откуда следует, что $d \cdot f_i^{(s)}(a) = 0$ для $1 \leqslant s \leqslant k-1$. Значит, $f_i^{(s)}(a) = 0$, что, ввиду произвольности элементов $a_1, \ldots, a_n, a_j \in A$, доказывает справедливость в $A$ тождества $f_i^{(s)}(x_1, x_2, \ldots, x_n; x_j)$. Теорема доказана.

Следствие. *Если многообразие Ф-алгебр* $\mathfrak{M}$ *задано системой* $I$ *однородных тождеств степени* $\leqslant k$ *по каждой из переменных и в* Ф *имеется* $k-1$ *элементов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ *таких, что для* $d = (\prod_{s=1}^{k-1} \alpha_s) (\prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i))$, *любой алгебры* $A \in \mathfrak{M}$ *и* $a \in A$ *равенство* $d \cdot a = 0$ *влечет* $a = 0$, *то многообразие* $\mathfrak{M}$ *однородно. В частности, всякое многообразие, заданное однородными тождествами степени* $\leqslant 2$ *по каждой из переменных, однородно.*

Доказательство. Если в Ф найдутся нужные элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$, то в силу теоремы 5 для всякого $f \in I$ мы будем иметь $f\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$, откуда по теореме 4 многообразие $\mathfrak{M}$ однородно. Если все элементы в $I$ имеют степень не выше 2 по каждой из переменных, то мы можем взять в качестве $\alpha_1$ единицу 1 и применить первую часть следствия.

Многообразия ассоциативных, альтернативных и правоальтернативных алгебр задаются однородными тождествами степени не более 2 и потому являются однородными. Определяющие тождества многообразия йордановых алгебр также однородны, но одно из них имеет степень 3 по $x_1$. Это является причиной того, что для некоторых колец операторов Ф, например, поля $\boldsymbol{Z}_2$ из двух элементов, многообразие йордановых алгебр не является однородным. Однако если в Ф разрешимо уравнение $2x = 1$, то ситуация в корне меняется. В самом деле, если положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве $\alpha_2$ взять решение этого уравнения (обозначим его $^1/_2$), то для $d = 1 \cdot {}^1/_2 \cdot (1 - {}^1/_2) = ({}^1/_2)^2$ импликация $da = 0 \Rightarrow a = 0$ верна, так как $4da = a$. По следствию теоремы 5 заключаем, что в этом случае многообразие йордановых алгебр однородно.

Теорема 6. *Пусть* $A$ — *алгебра над кольцом* Ф, *принадлежащая однородному многообразию* $\mathfrak{M}$, *и* $B$ — *ассоциативно-коммутативная* Ф-*алгебра. Тогда* Ф-*алгебра* $C = B \otimes_\Phi A$ *также принадлежит многообразию* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Достаточно показать, что $C$ удовлетворяет всем однородным тождествам из $T(\mathfrak{M})$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — такое тождество. Тогда для любых $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$ элемент $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ представляется в виде суммы элементов вида $g(b_1 \otimes a_1, \ldots, b_s \otimes a_s)$, $a_i \in A$, $b_j \in B$, где $g$ — однородный многочлен из $f\Delta \subseteq T(\mathfrak{M})$. Если многочлен $g(x_1, x_2, \ldots, x_s)$

имеет тип $[i_1, i_2, \ldots, i_s]$, то

$$g(b_1 \otimes a_1, \ldots, b_s \otimes a_s) = \\ = b_1^{i_1} b_2^{i_2} \ldots b_s^{i_s} \otimes g(a_1, a_2, \ldots, a_s) = 0.$$

Но это значит, что и $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Теорема доказана.

## § 5. Полилинейные тождества. Полная линеаризация тождеств

В этом параграфе мы докажем, что наличие в алгебре $A$ некоторого тождества влечет наличие в алгебре $A$ и некоторого полилинейного тождества.

Введем следующее обозначение: крышечка $\hat{}$ над $x_i$ в сумме $x_1 + \ldots + \hat{x}_i + \ldots + x_n$ означает, что $x_i$ входит в сумму с нулевым коэффициентом, т. е.

$$x_1 + \ldots + \hat{x}_i + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - x_i.$$

Например, $x_1 + \hat{x}_2 + x_3 + \hat{x}_4 + x_5 = x_1 + x_3 + x_5$.

Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторый неассоциативный многочлен из $\Phi[X]$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ определим неассоциативный многочлен $fL_i^k$ формулой

$$fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, y_2, \ldots, y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + y_2 + \ldots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\ - \sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \ldots + \hat{y}_q + \ldots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{1 \leq q_1 < q_2 \leq k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \ldots + \hat{y}_{q_1} + \ldots + \hat{y}_{q_2} + \\ + \ldots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \\ - \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_q, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно следующее

Предложение 4. *Пусть $P$ — подполугруппа и $Q$ — подгруппа аддитивной группы $\Phi$-алгебры $A$. Тогда*

*если для неассоциативного многочлена* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и любых элементов* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P$ *имеем* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in Q$, *то и для любых* $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, b_2, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n \in P$ *будем иметь* $fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, b_2, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q$. *В частности, если* $f \in T(A)$, *то и* $fL_i^k \in T(A)$.

Таким образом, оператор $L_i^k$ преобразует тождества алгебры $A$ снова в тождества алгебры $A$. Чтобы выяснить механизм его действия, докажем сначала одну лемму.

Лемма 4. *Пусть* $g\colon A \times A \times \ldots \times A \to A$ — *функция от* $n$ *переменных, заданная на Ф-алгебре* $A$ *и линейная по каждому аргументу. Тогда для любых* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$, *где* $k \geqslant n$,

$$g(a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - \sum_{q=1}^{k} g(a_1 + \ldots + \hat{a}_q + \ldots + a_k, \ldots, a_1 + \ldots + \hat{a}_q + \ldots + a_k) + \sum_{1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant k} g(a_1 + \ldots + \hat{a}_{q_1} + \ldots + \hat{a}_{q_2} + \ldots + a_k, \ldots, a_1 + \ldots + \hat{a}_{q_1} + \ldots + \hat{a}_{q_2} + \ldots + a_k) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{q=1}^{k} g(a_q, a_q, \ldots, a_q) = \begin{cases} \sum\limits_{(i_1 \ldots i_n) \in S_n} g(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}), & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k \geqslant n$. Пользуясь линейностью функции $g$, вынесем все знаки $+$ из-под знака этой функции. Тогда левая часть доказываемого равенства будет представлять из себя линейную комбинацию элементов вида $g(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$ с целыми коэффициентами. Вычислим коэффициент при элементе $g(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$. Если среди индексов $j_1, j_2, \ldots, j_n$ имеется $s$ различных и при этом $s < k$, то коэффициент при $g(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$ равен знакопеременной сумме $1 - \binom{k-s}{1} + \binom{k-s}{2} - \ldots + (-1)^{k-s}\binom{k-s}{k-s}$, которая равна

нулю. Заметим, что $s$ не превосходит $n$, а $k$ по предположению не меньше $n$. Поэтому $s \geqslant k$ может быть лишь при $s = k = n$. В этом случае коэффициент при $g(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n})$, очевидно, равен единице. Это доказывает нашу формулу, а следовательно, и лемму.

Предложение 5. *Для любых* $f, f' \in \Phi[X]$, *на которых оператор* $L_i^k$ *определен*, $(f + f')L_i^k = fL_i^k + f'L_i^k$. *Если* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — *одночлен степени* $n$ *по* $x_i$ *и* $g = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, y_2, \ldots, y_n, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ — *одночлен, линейный по* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$, *такой, что* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_i, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, *то*

$$fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_1, \ldots, z_k, x_{i+1}, \ldots, x_m) = \begin{cases} \sum\limits_{(i_1 \ldots i_n) \in S_n} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}, x_{i+1}, \ldots, x_m), & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Доказательство. Линейность оператора $L_i^k$ следует непосредственно из определений. Если $f$ и $g$ — одночлены, указанные в условиях предложения, то одночлен $g$ мы можем рассмотреть как функцию от $n$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, зафиксировав $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m$. Применяя лемму 4, получаем формулу для $fL_i^k$. Предложение доказано.

Проиллюстрируем это предложение примерами:

$$[x_1^2(x_2x_1)]\,L_1^3 = (y_1y_2)(x_2y_3) + (y_2y_1)(x_2y_3) + (y_1y_3)(x_2y_2) + (y_3y_1)(x_2y_2) + (y_2y_3)(x_2y_1) + (y_3y_2)(x_2y_1),$$

$$[(x_1^2x_2)\,x_1^2]\,L_1^5 = 0,$$

$$[x_1^2x_2^2]\,L_1^2L_2^2 = (y_1y_2)(z_1z_2) + (y_2y_1)(z_1z_2) + (y_1y_2)(z_2z_1) + (y_2y_1)(z_2z_1).$$

Пусть $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен типа $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$. Тогда полилинейный многочлен $fL_1^{k_1}L_2^{k_2}\ldots L_n^{k_n}$ будем называть *полной линеаризацией многочлена* $f$.

Теорема 7. *Пусть неассоциативный многочлен* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *обращается в нуль при подстановке*

*в него любых элементов подгруппы $P$ аддитивной группы алгебры $A$. Тогда полная линеаризация любой его однородной компоненты, имеющей максимальную степень, также обращается в нуль на $P$.*

Доказательство. Пусть $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s$ — разложение многочлена $f$ в сумму однородных компонент, причем степень $f_1$ максимальна. Допустим, что некоторая переменная $x_j$ не входит в $f_1$, но входит в другие однородные компоненты. Тогда многочлен

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

снова обращается в нуль на $P$, $f_1$ — снова его однородная компонента максимальной степени, но при этом $f'$ уже не содержит $x_j$. Далее, если $x_j$ входит в $f_1$, но не входит в какую-либо однородную компоненту многочлена $f'$, то рассмотрим новый многочлен

$$f''(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f'(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Этот многочлен также обращается в нуль на $P$, но $x_j$ входит уже во все однородные компоненты многочлена $f''$ и $f_1$ является в $f''$ по-прежнему однородной компонентой максимальной степени.

Таким образом, перенумеровав, если надо, переменные, мы с самого начала можем считать, что однородная компонента $f_1$ многочлена $f$ имеет тип $[k_1, k_2, \ldots, k_n]$, где $k_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а остальные однородные компоненты ($f_2$, например) имеют тип $[m_1, m_2, \ldots, m_n]$, где $m_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и где для некоторого $j$ имеет место строгое неравенство $m_j < k_j$. Так как $m_j < k_j$, то, ввиду предложения 5, $f_2 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots L_n^{k_n} = 0$. Следовательно,

$$f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots L_n^{k_n} = f L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots L_n^{k_n}.$$

Теперь в силу предложения 4 заключаем, что полная линеаризация $f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \ldots L_n^{k_n}$ компоненты $f_1$ обращается в нуль на $P$. Теорема доказана.

Следствие. *Если алгебра $A$ удовлетворяет некоторому тождеству, то она удовлетворяет и некоторому полилинейному тождеству.*

## § 6. Присоединение единицы

Пусть $A$ — некоторая алгебра над кольцом Ф. Рассмотрим кольцо Ф как модуль над собой. Единица 1 кольца Ф является порождающим элементом этого Ф-модуля: $\Phi = \Phi \cdot 1$. Рассмотрим прямую сумму $A^{\#} = A \oplus \Phi \cdot 1$ двух Ф-модулей $A$ и $\Phi \cdot 1$ и определим на ней умножение следующим образом:

$$(a + \alpha \cdot 1)(b + \beta \cdot 1) = (ab + \alpha b + \beta a) + \alpha\beta \cdot 1,$$

где $\alpha, \beta \in \Phi$, $a, b \in A$. Алгебру $A^{\#}$ мы будем называть *алгеброй, полученной формальным присоединением единицы к алгебре* $A$. Легко видеть, что 1 — единица алгебры $A^{\#}$ и $A$ — подалгебра в $A^{\#}$. Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем *унитарно замкнутым*, если для любой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ алгебра $A^{\#}$ также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Алгебру $\Phi[X]^{\#}$, полученную присоединением единицы к свободной алгебре $\Phi[X]$, мы будем в дальнейшем называть *свободной алгеброй с единицей*.

Предложение 6. *Многообразие* $\mathfrak{M}$, *определенное множеством тождеств* $I$, *является унитарно замкнутым тогда и только тогда, когда* $I(\Phi[X]^{\#}) \subseteq T(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{M}$-свободную алгебру $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ и $\mathfrak{M}$-свободную алгебру с присоединенной единицей $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]^{\#}$. Как легко видеть, $\mathfrak{M}$ является унитарно замкнутым тогда и только тогда, когда $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]^{\#} \in \mathfrak{M}$. Последнее условие эквивалентно тому, что $I(\Phi_{\mathfrak{M}}[X]^{\#}) = (0)$. Заметим теперь, что алгебра $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]^{\#}$ изоморфна фактор-алгебре $\Phi[X]^{\#}/T(\mathfrak{M})$, поэтому равенство $I(\Phi_{\mathfrak{M}}[X]^{\#}) = (0)$ эквивалентно включению $I(\Phi[X]^{\#}) \subseteq T(\mathfrak{M})$. Предложение доказано.

Обозначим через $\Delta_i^k$ отображение алгебры $\Phi[X]$ в алгебру $\Phi[X]^{\#}$, сопоставляющее многочлену

$$f = f(x_1, \ldots, x_n)$$

из $\Phi[X]$ элемент

$$f\Delta_i^k(1) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n; 1)$$

из алгебры $\Phi[X]^{\#}$. Отображение $\Delta_i^k$ линейно и определено на всей алгебре $\Phi[X]$. Действие оператора $\Delta_i^k$ аналогично «частному дифференцированию» по переменной $x_i$.

Например,

$$[(x_1^2x_2)\,x_1]\,\Delta_1^1 = x_1^2x_2 + 2\,(x_1x_2)\,x_1,$$
$$[(x_1^2x_2)\,x_1]\,\Delta_1^2 = x_2x_1 + 2x_1x_2,$$
$$[(x_1^2x_2)\,x_1]\,\Delta_1^3 = x_2,$$
$$[(x_1^2x_2)\,x_1]\,\Delta_1^4 = 0.$$

Если элементы множества $X$ не снабжены индексами, то мы будем заменять индекс $i$ обозначением соответствующего порождающего. Например,

$$[(x^2y)\,x]\,\Delta_x^3 = y.$$

Совокупность всех элементов, которые можно получить из многочлена $f$ с помощью применения операторов $\Delta_i^k$, мы обозначим через $f\Delta'$.

Т е о р е м а 8. *Пусть многообразие* $\mathfrak{M}$ *обладает такой системой* $I$ *определяющих тождеств, что* $f\Delta' \subseteq T\,(\mathfrak{M})$ *для всех* $f \in I$. *Тогда* $\mathfrak{M}$ *унитарно замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду предложения 6 нам нужно доказать, что $I\,(\Phi\,[X]^{\#}) \subseteq T\,(\mathfrak{M})$. Так как $T\,(\mathfrak{M})$ — идеал в $\Phi\,[X]^{\#}$, то достаточно доказать, что $f\,(g_1, \ldots, g_n) \in T\,(\mathfrak{M})$ для любого $f = f\,(x_1, \ldots, x_n) \in I$ и любых $g_1, \ldots, g_n \in \Phi\,[X]^{\#}$. Имеем $g_i = y_i + \alpha_i \cdot 1$, где $y_i \in \Phi\,[X]$, $\alpha_i \in \Phi$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Теперь в силу леммы 3

$$f\,(g_1, \ldots, g_n) = f\,(y_1 + \alpha_1 \cdot 1, \ldots, y_n + \alpha_n \cdot 1) = \\ = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n} f\Delta_1^{i_1} \ldots \Delta_n^{i_n}\,(y_1, \ldots, y_n).$$

Так как по условию $f\Delta_1^{i_1} \ldots \Delta_n^{i_n} = f\Delta_1^{i_1} \ldots \Delta_n^{i_n}\,(x_1, \ldots, x_n) \in T\,(\mathfrak{M})$, то и $f\,(g_1, \ldots, g_n) \in T\,(\mathfrak{M})$. Теорема доказана.

Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем *сильно однородным*, если $\mathfrak{M}$ однородно и $f\Delta' \subseteq T\,(\mathfrak{M})$ для любого $f \in T\,(\mathfrak{M})$.

П р е д л о ж е н и е 7. *Многообразие* $\mathfrak{M}$ *является сильно однородным тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *однородно и унитарно замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{M}$ сильно однородно, то утверждение следует из теоремы 8. Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ однородно и унитарно замкнуто. Рассмотрим $f = f\,(x_1, \ldots$

$\ldots, x_n) \in T(\mathfrak{M})$. По предложению 3 имеем $f\Delta_i^k(x_j) = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n;\ x_j) \in T(\mathfrak{M})$, где $x_j \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Так как множество тождеств $T(\mathfrak{M})$ определяет многообразие $\mathfrak{M}$, то по предложению 6 мы получаем $f\Delta_i^k = f_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_n;\ 1) \in T(\mathfrak{M})$. Предложение доказано.

Из теорем 4 и 8 получаем теперь

Следствие 1. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ обладает такой системой $I$ определяющих тождеств, что $f\Delta \cup f\Delta' \subseteq T(\mathfrak{M})$ для всех $f \in I$. Тогда $\mathfrak{M}$ сильно однородно.*

В частности, справедливо

Следствие 2. *Многообразия ассоциативных, альтернативных и правоальтернативных алгебр являются сильно однородными. Если в $\Phi$ есть элемент $\frac{1}{2}$, то и многообразие йордановых $\Phi$-алгебр является сильно однородным.*

Доказательство. Как мы уже видели в § 4, все эти многообразия однородны. Покажем, что многообразие Jord йордановых алгебр сильно однородно. Это многообразие определяется тождествами $f_1 = x_1x_2 - x_2x_1$ и $f_2 = (x_1^2x_2)x_1 - x_1^2(x_2x_1)$. Легко видеть, что $f_i\Delta_l^k = 0$ во всех случаях, кроме случая, когда $i = 2$, $k = l = 1$. В этом случае

$$f_2\Delta_1^1 = 2(x_1x_2)x_1 + x_1^2x_2 - 2x_1(x_2x_1) - x_1^2x_2 =$$
$$= 2(x_1x_2 - x_2x_1)x_1 + 2(x_2x_1)x_1 - 2x_1(x_2x_1) =$$
$$= 2f_1(x_1, x_2)x_1 + 2f_1(x_2x_1, x_1) \in T(\mathrm{Jord}).$$

Таким образом, $f_1\Delta' \cup f_2\Delta' \subseteq T(\mathrm{Jord})$ и многообразие Jord сильно однородно. Для других многообразий доказательства аналогичны. Следствие доказано.

Докажем теперь одно свойство свободных алгебр сильно однородных многообразий.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — сильно однородное многообразие. Тогда для любого $f \in \Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ и для любого $x \in X$ каждое из равенств $f\cdot x = 0$, $x\cdot f = 0$ влечет $f = 0$.*

Доказательство. Обозначим через $d_x(f)$ степень многочлена $f$ по переменной $x$ и через $R_z$ — оператор правого умножения на элемент $z$: $yR_z = y\cdot z$. Покажем индукцией по $d_x(f)$, что для любого натурального $m$

равенство $fR_x^m = 0$ влечет $f = 0$. При $d_x(f) = 0$, вследствие сильной однородности многообразия, имеем $0 = (fR_x^m)\Delta_x^m = f$, что дает нам основание для индукции. Пусть $d_x(f) = n > 0$. Используя вновь сильную однородность многообразия $\mathfrak{M}$ и лемму 2, получаем

$$0 = (fR_x^m)\Delta_x^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (f\Delta_x^i) R_x^i = f + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (f\Delta_x^i) R_x^i,$$

откуда $f = f_1 R_x$, где $d_x(f_1) < n$. Теперь имеем

$$0 = fR_x^m = f_1 R_x^{m+1}.$$

Предположение индукции дает нам $f_1 = 0$ и $f = 0$.

В частности, мы доказали, что если $f \cdot x = 0$, то $f = 0$. Аналогично доказывается, что равенство $x \cdot f = 0$ влечет $f = 0$.

Предложение доказано.

Элемент $a$ алгебры $A$ называется ее *правым* (*левым*) *аннулятором*, если $A \cdot a = (0)$ (соответственно $a \cdot A = (0)$).

Следствие. *В свободной алгебре сильно однородного многообразия не содержится ненулевых правых и левых аннуляторов.*

В частности, свободные альтернативные, правоальтернативные и йордановы алгебры не содержат ненулевых аннуляторов.

В заключение докажем одно предложение, облегчающее иногда доказательство тождеств в сильно однородных многообразиях. Утверждение, в нем содержащееся, часто называют *принципом Кёхера*.

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{M}$ — сильно однородное многообразие и $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый однородный неассоциативный многочлен. Предположим, что для любой конечнопорожденной как Ф-модуль алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ многочлен $f$ обращается в нуль при подстановке в него любых элементов вида $1 + x$ таких, что идеал, порожденный элементом $x$ в $A$, нильпотентен. Тогда $f$ — тождество многообразия $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Достаточно установить, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в $\mathfrak{M}$-свободной алгебре $F = \Phi_{\mathfrak{M}}[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть степень многочлена $f$ равна $m$. Рассмотрим фактор-алгебру $G = F/F^{m+1}$ и в ней элементы $y_1, \ldots, y_n$ — образы элементов $x_1, \ldots, x_n$ при канониче-

ском гомоморфизме $F$ на $G$. Присоединив к этой алгебре единицу, получим алгебру $G^{\#} \in \mathfrak{M}$. Элементы $y_1, \ldots, y_n$ порождают в этой алгебре нильпотентные идеалы. Поэтому

$$f(1 + y_1, \ldots, 1 + y_n) = 0.$$

Но тогда в силу однородности в алгебре $F^{\#}$ имеем соотношение

$$f(1 + x_1, \ldots, 1 + x_n) = 0.$$

Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ является однородной компонентой многочлена $f(1 + x_1, \ldots, 1 + x_n)$ и потому равен нулю. Предложение доказано.

Во всех классических многообразиях элементы указанного в условиях предложения вида являются обратимыми, так что тождества в этих многообразиях достаточно доказывать только для обратимых элементов.

*ГЛАВА 2*

# КОМПОЗИЦИОННЫЕ АЛГЕБРЫ

Одно из важнейших свойств комплексных чисел выражается тождеством

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|.$$

Если обозначить $z = a_1 + a_2 i$, $z' = b_1 + b_2 i$, то это тождество перепишется в виде

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2.$$

Допуская некоторую расплывчатость формулировки, его можно прочитать так: произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов есть снова сумма двух квадратов.

Естественно возникает вопрос: существуют ли аналогичные тождества с бóльшим числом квадратов? Как описать все такие тождества?

Примеры тождеств для суммы 4 квадратов были известны еще Эйлеру и Лагранжу. В 1818 г. Деген *) указал первый пример тождества для суммы 8 квадратов, который, к сожалению, остался тогда незамеченным. В 1843 г. Гамильтон заметил, что существование тождества для суммы $n$ квадратов эквивалентно существованию алгебры с делением определенного вида размерности $n$ над полем вещественных чисел. В случае $n = 2$ такой алгеброй является, например, алгебра комплексных чисел. Гамильтон построил 4-мерную алгебру с делением, дающую тождество Эйлера для суммы 4 квадратов. В 1845 г. Кэли построил 8-мерную алгебру с делением, дающую тождество для суммы 8 квадратов. Аналогичная алгебра независимо была построена в 1844 г. Грейвзом. После этого долгое время не удавалось выяснить, существуют ли

---

*) Degen C. F., Mem. Acad. Sc. St. Petersbourg, 8 (1818), 207—219.

аналогичные тождества для других значений $n$. Лишь в 1898 г. Гурвиц доказал, что тождества интересующего нас типа возможны лишь при $n = 1, 2, 4, 8$.

Алгебры, построенные Гамильтоном и Кэли и известные теперь соответственно как алгебра кватернионов и алгебра чисел Кэли, оказались весьма интересными и с многих других точек зрения. Так, в 1878 г. Фробениус доказал, что алгебра кватернионов вместе с полем комплексных чисел являются единственными конечномерными ассоциативными алгебрами с делением размерности больше 1 над полем вещественных чисел. Алгебра чисел Кэли позднее заняла важное место в теории альтернативных и йордановых алгебр.

В связи с теоремой Гурвица возникает такой более общий вопрос: что будет, если вместо суммы квадратов рассматривать некоторую невырожденную квадратичную форму над произвольным полем? Для каких квадратичных форм справедлив результат, аналогичный теореме Гурвица? Этот вопрос, известный как проблема Гурвица, был решен сравнительно недавно в работах Алберта, Капланского и Джекобсона. Оказалось, что и в этом случае задача сводится к описанию некоторого класса алгебр — так называемых «композиционных алгебр». Композиционные алгебры являются естественным обобщением алгебр комплексных чисел, кватернионов и чисел Кэли и играют важную роль в теории альтернативных и йордановых алгебр. Изучению этих алгебр и посвящена данная глава.

## § 1. Определение и простые свойства композиционных алгебр

Пусть $F$ — произвольное поле, $A$ — векторное пространство ненулевой размерности над $F$. Отображение $f\colon A \times A \to F$ называется *билинейной формой*, если для любых $x, x', y, y' \in A$, $\alpha \in F$

1) $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$;
2) $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$;
3) $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

Билинейная форма $f$ называется *симметрической*, если $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in A$. Симметрическая билинейная форма $f$ называется *невырожденной*, если из того, что $f(a, x) = 0$ для всех $x \in A$, следует, что $a = 0$.

Отображение $n$: $A \to F$ называется *квадратичной формой*, если

1) $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$, где $x \in A$, $\lambda \in F$;

2) функция $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ является билинейной формой на $A$.

Квадратичная форма $n(x)$ называется *строго невырожденной*, если невырождена соответствующая ей симметрическая билинейная форма $f(x, y)$, и *невырожденной*, если из того, что $n(a) = f(a, x) = 0$ для всех $x \in A$, следует, что $a = 0$. Всякая строго невырожденная квадратичная форма является невырожденной; обратное верно, если характеристика поля $F$ отлична от 2. Форма $n(x)$ называется *допускающей композицию*, если существует такая бинарная билинейная операция (композиция) $xy$ в $A$, что

$$n(x)\, n(y) = n(xy). \tag{1}$$

*Проблема Гурвица* заключается в определении невырожденных квадратичных форм, допускающих композицию. Если $A = E^n$ — $n$-мерное евклидово пространство, а $n(x) = (x, x)$ — скалярный квадрат вектора $x$, то мы получаем классическую формулировку проблемы Гурвица. Равенство (1), расписанное в ортонормированном базисе, в этом случае дает искомое тождество для суммы квадратов.

Примером квадратичной формы, допускающей композицию и отличной от суммы квадратов, может служить следующая форма от двух переменных:

$$n(x) = n(x_1, x_2) = x_1^2 + kx_1x_2 + tx_2^2, \quad k, \ t \in F.$$

Действительно, легко проверить, что

$$n(x_1, x_2)\cdot n(y_1, y_2) = n(x_1y_1 - tx_2y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1 + kx_2y_2).$$

Если форма $n(x)$ допускает композицию, то линейное пространство $A$ превращается в алгебру относительно операций сложения, умножения на скаляр и умножения $xy$; при этом умножение связано с квадратичной формой $n(x)$ равенством (1). Обратно, если на некоторой алгебре $A$ определена квадратичная форма $n(x)$, связанная с умножением равенством (1), то форма $n(x)$ допускает композицию. Следовательно, проблема Гурвица эквивалентна проблеме описания алгебр, на которых определена невы-

рожденная квадратичная форма $n(x)$, удовлетворяющая (1).

Как мы увидим далее, если форма $n(x)$ строго невырождена и допускает композицию, то, как и в теореме Гурвица, размерность соответствующей алгебры $A$ может быть равна лишь 1, 2, 4, 8. В то же время над всяким несовершенным полем характеристики 2 существует бесконечное число невырожденных квадратичных форм, не являющихся строго невырожденными и допускающих композицию; при этом размерность соответствующей алгебры $A$ принимает бесконечное число различных значений и может быть даже бесконечной. В связи с этим в дальнейшем для того, чтобы обезопасить себя от «патологических» случаев в характеристике 2 и в то же время не накладывать ограничений на характеристику, мы будем рассматривать лишь строго невырожденные квадратичные формы. Невырожденные квадратичные формы, допускающие композицию, рассмотрены в упражнениях к § 2.

Алгебра $A$ над полем $F$ с квадратичной формой $n(x)$ называется *композиционной алгеброй*, если

1) $n(xy) = n(x)\,n(y)$;
2) форма $n(x)$ строго невырождена;
3) в $A$ есть единица 1.

Предложение 1. *Пусть $n(x)$ — строго невырожденная квадратичная форма на конечномерном векторном пространстве $A$. Тогда если $n(x)$ допускает какую-либо композицию $xy$ на $A$, то $n(x)$ допускает такую композицию $x\cdot y$, относительно которой $A$ является композиционной алгеброй.*

Доказательство. По предположению алгебра $A$ с умножением $xy$ и форма $n(x)$ удовлетворяют условиям 1) и 2). В силу условия 2) существует такой элемент $a \in A$, для которого $n(a) \neq 0$. Пусть $u = a^2/n(a)$. Тогда $n(u) = 1$; следовательно, $n(xu) = n(ux) = n(x)$. Отсюда следует, что $f(xu, yu) = f(ux, uy) = f(x, y)$. В силу условия 2) это означает, что линейные отображения $R_u\colon x \longmapsto xu$ и $L_u\colon x \longmapsto ux$ невырождены. Ввиду конечномерности $A$ отображения $R_u$ и $L_u$ обратимы. Определим теперь новое умножение в $A$, положив $x\cdot y = (xR_u^{-1})(yL_u^{-1})$. Тогда $u^2\cdot x = (u^2R_u^{-1})(xL_u^{-1}) = u(xL_u^{-1}) = x$. Аналогично $x\cdot u^2 = x$. Следовательно, $u^2$ является единицей относительно нового умножения. Далее, $n(x\cdot y) = n((xR_u^{-1})(yL_u^{-1})) =$

$= n(xR_u^{-1})\, n(yL_u^{-1}) = n(x)\, n(y)$. Таким образом, мы можем заменить композицию $xy$ на $x \cdot y$ и получить композиционную алгебру. Предложение доказано.

Итак, для строго невырожденных квадратичных форм, определенных на конечномерных пространствах, проблема Гурвица эквивалентна проблеме описания конечномерных композиционных алгебр. Мы опишем все композиционные алгебры, без каких-либо ограничений на размерность.

Нам понадобится следующее определение.

Алгебра $R$ называется *альтернативной*, если для любых $x$, $y$ из $R$ $x^2y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$.

Лемма 1. *Пусть $A$ — композиционная алгебра. Тогда $A$ альтернативна и каждый элемент алгебры $A$ удовлетворяет квадратному уравнению с коэффициентами из $F$ (т. е. алгебра $A$ квадратична над $F$).*

Доказательство. Мы будем отождествлять поле $F$ с подалгеброй $F \cdot 1$ алгебры $A$. Подставив в (1) $y + w$ вместо $y$, получим $n(x)\, n(y + w) = n(xy + xw)$. Вычитая из этого равенства тождество (1), а также тождество, получающееся из (1) заменой $y$ на $w$, получим

$$n(x)\, f(y, w) = f(xy, xw). \tag{2}$$

Проделав ту же процедуру с $x$, получим

$$f(x, z)\, f(y, w) = f(xy, zw) + f(xw, zy). \tag{3}$$

Подставим теперь в (3) $z = 1$, $y = xu$:

$$f(x, 1)\, f(xu, w) = f(x \cdot xu, w) + f(xw, xu)\ ^{*)}. \tag{4}$$

Так как в силу (2) $f(xw, xu) = n(x)\, f(w, u)$, то (4) можно переписать в виде

$$f(x \cdot xu, w) + n(x)\, f(w, u) - f(x, 1)\, f(xu, w) = 0,$$

что, в силу билинейности и симметричности формы $f$, эквивалентно тождеству

$$f(x \cdot xu + n(x)\, u - f(x, 1)\, xu, w) = 0.$$

Так как форма $f(x, y)$ невырождена, отсюда следует в силу произвольности $w$, что

$$x \cdot xu + n(x)\, u - f(x, 1)\, xu = 0 \tag{5}$$

*) Здесь и далее, чтобы избежать нагромождения скобок, будем иногда использовать вместо некоторых из них точку. Например, $xy \cdot zt = (xy)(zt)$.

для любых $x$, $u$ из $A$. Положив теперь в (5) $u = 1$, получим

$$x^2 - f(x, 1)x + n(x) = 0, \tag{6}$$

что доказывает вторую половину леммы. Остается доказать альтернативность алгебры $A$.

Умножив (6) справа на $u$ и сравнив с (5), получим $x^2u = x(xu)$. Аналогично доказывается, что $ux^2 = (ux)x$. Следовательно, алгебра $A$ альтернативна. Лемма доказана.

Эндоморфизм $\varphi$ векторного пространства $A$ называется *инволюцией* алгебры $A$, если $\varphi(\varphi(a)) = a$ и $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$ для любых $a, b \in A$.

Лемма 2. *Отображение* $a \mapsto \bar{a} = f(1, a) - a$ *является инволюцией алгебры* $A$, *оставляющей неподвижными элементы поля* $F$; *при этом элементы* $t(a) = a + \bar{a}$ *и* $n(a) = a\bar{a}$ *лежат в* $F$ *для всех* $a$ *из* $A$. *Кроме того,* $a$ *удовлетворяет равенству*

$$a^2 - t(a)a + n(a) = 0.$$

Доказательство. Будем проверять последовательно все свойства инволюции:

а) $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$. Имеем $\overline{a+b} = f(1, a+b) - (a+b) = f(1, a) - a + f(1, b) - b = \bar{a} + \bar{b}$.

б) Пусть $\lambda \in F$. Тогда $\overline{\lambda a} = f(1, \lambda a) - \lambda a = \lambda(f(1, a) - a) = \lambda\bar{a}$.

в) $\bar{\bar{a}} = a$. Имеем $\bar{\bar{a}} = f(1, \bar{a}) - \bar{a} = f(1, f(1, a) - a) - f(1, a) + a = f(1, 1)f(1, a) - 2f(1, a) + a$. Далее, как легко видеть, $n(1) = 1$, поэтому $f(1, 1) = n(2) - n(1) - n(1) = 2$. Следовательно, $\bar{\bar{a}} = a$.

г) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$. Из тождества (6) получаем, подставляя вместо $x$ последовательно $a + b$, $a$ и $b$ и вычитая из первого получившегося тождества два других:

$$ab + ba - f(1, a)b - f(1, b)a + f(a, b) = 0. \tag{7}$$

Далее, из (3) получаем при $x = y = 1$, $z = a$ и $w = b$

$$f(1, a)f(1, b) = f(1, ab) + f(a, b). \tag{8}$$

Подставив это в (7), получим

$$ab + ba - f(1, a)\, b - f(1, b)\, a + f(1, a)\, f(1, b) - \\ - f(1, ab) = 0, \quad (9)$$

откуда

$$(f(1, a) - a)(f(1, b) - b) = ab - f(1, a)\, b - \\ - f(1, b)\, a + f(1, a)\, f(1, b) = f(1, ab) - ba.$$

Из (8) следует, что $f(1, ab) = f(1, ba)$. Следовательно, $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$, что и требовалось доказать.

Далее, если $\lambda \in F$, то $\overline{\lambda} = f(1, \lambda) - \lambda = \lambda f(1, 1) - - \lambda = \lambda$. Наконец, $a + \overline{a} = f(1, a) \in F$ и в силу (6) $a\overline{a} = f(1, a)\, a - a^2 = n(a) \in F$. Так как $t(a) = f(1, a)$, то последнее утверждение леммы следует также из (6). Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть $A$ — алгебра над полем $F$ с единицей $1$ и с инволюцией $x \mapsto \overline{x}$, причем для всякого $x \in A$ элементы $x + \overline{x}$ и $x\overline{x}$ принадлежат $F$. Тогда если квадратичная форма $n(x) = x\overline{x}$ строго невырождена на $A$, то алгебра $A$ либо проста, либо изоморфна прямой сумме $F \oplus F$ с инволюцией $\overline{(a, b)} = (b, a)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале, что $A$ проста, как алгебра с инволюцией. Пусть $I \neq A$ — идеал алгебры $A$ и $\overline{I} = I$. Так как $I \cap F = 0$, то мы имеем $a + \overline{a} = 0$, $a\overline{a} = 0$ для любого $a \in I$. Далее, для любых элементов $a \in I$, $x \in A$ мы имеем $a\overline{x} \in I$, откуда по предыдущему $f(a, x) = a\overline{x} + x\overline{a} = a\overline{x} + \overline{(a\overline{x})} = 0$. Ввиду невырожденности формы $f$, отсюда следует, что $I = (0)$.

Пусть теперь $T$ — произвольный идеал алгебры $A$, $T \neq (0)$ и $T \neq A$. Положим $I = T + \overline{T}$, тогда $\overline{I} = I$, $I \neq (0)$, откуда по доказанному выше $I = A$. Далее, положим $J = T \cap \overline{T}$, тогда $\overline{J} = J$, $J \neq A$ и вновь по доказанному выше $J = (0)$. Следовательно, алгебра $A$ есть прямая сумма идеалов $T$ и $\overline{T}$. Остается доказать, что идеал $T$ одномерен над полем $F$. Пусть $t, s \in T$, $t \neq 0$; $\lambda = t + \overline{t}$, $\mu = s + \overline{s}$; $\lambda, \mu \in F$. Заметим, что $\lambda \neq 0$, так как иначе $t = -\overline{t} \in T \cap \overline{T} = (0)$. Далее, имеем $T \cdot \overline{T} + + \overline{T} \cdot T \subseteq T \cap \overline{T} = (0)$, откуда $\lambda s = (t + \overline{t})\, s = ts$, $\mu t =$

$= t(s+\bar{s}) = ts$. Следовательно, $\lambda s = \mu t$ и $s = (\lambda^{-1}\mu)\, t$, т. е. одномерность идеала $T$ доказана.

Итак, если алгебра $A$ не проста, то она является прямой суммой двух экземпляров поля $F$. Лемма доказана.

Мы видим, что задача описания композиционных алгебр естественным образом приводит нас к изучению простых альтернативных алгебр. В § 3 мы покажем, что в свою очередь, за исключением некоторых алгебр характеристики 2, каждая простая квадратичная альтернативная алгебра является композиционной алгеброй. Окончательное описание простых альтернативных неассоциативных алгебр будет получено нами в главе 7.

## § 2. Процесс Кэли — Диксона. Обобщенная теорема Гурвица

Пусть $A$ — алгебра над полем $F$ с единицей 1 и с инволюцией $a \mapsto \bar{a}$, причем $a + \bar{a}$, $a\bar{a} \in F$ для любого $a \in A$. С помощью так называемого *процесса Кэли — Диксона* мы построим новую алгебру с инволюцией, содержащую $A$ в качестве подалгебры. При этом если размерность алгебры $A$ равна $m$, то размерность новой алгебры будет равна $2m$.

Зафиксируем $0 \neq \alpha \in F$ и обозначим через $(A, \alpha)$ совокупность всех упорядоченных пар $(a_1, a_2)$, $a_i \in A$, с операциями покомпонентного сложения и умножения на скаляр и следующим умножением:

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2,\ \bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

Как легко видеть, $(A, \alpha)$ является алгеброй над $F$. Элемент $(1, 0)$ является единицей алгебры $(A, \alpha)$; множество $A' = \{(a, 0) \mid a \in A\}$ есть подалгебра алгебры $(A, \alpha)$, изоморфная алгебре $A$. Пусть $v = (0, 1)$; тогда $v^2 = \alpha(1, 0)$ и $(A, \alpha)$ является прямой суммой векторных пространств $A'$ и $vA'$. Если мы отождествим $A'$ с $A$, элементы алгебры $(A, \alpha)$ представятся в виде $x = a_1 + va_2$, где $a_i \in A$ однозначно определены элементом $x$, и умножение в $(A, \alpha)$ будет задаваться следующим образом:

$$(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) + v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

Для произвольного элемента $x = a_1 + va_2 \in (A, \alpha)$ мы положим $\bar{x} = \bar{a}_1 - va_2$.

Лемма 4. *Отображение* $x \mapsto \bar{x}$ *есть инволюция алгебры* $(A, \alpha)$; *при этом* $x + \bar{x}$, $x\bar{x} \in F$ *для любого* $x \in (A, \alpha)$. *Если квадратичная форма* $n(a) = a\bar{a}$ *строго невырождена на* $A$, *то квадратичная форма* $n(x) = x\bar{x}$ *строго невырождена на* $(A, \alpha)$.

Доказательство. Ясно, что отображение $x \mapsto \bar{x}$ линейно и что $\bar{\bar{x}} = x$ для любого $x \in (A, \alpha)$. Пусть $x = a_1 + va_2$, $y = a_3 + va_4$, где $a_i \in A$. Тогда мы имеем

$$\bar{y}\bar{x} = (\bar{a}_3 - va_4)(\bar{a}_1 - va_2) = (\bar{a}_3\bar{a}_1 + \alpha a_2\bar{a}_4) - v(a_3a_2 + \bar{a}_1a_4).$$

С другой стороны,

$$\overline{xy} = (\bar{a}_3\bar{a}_1 + \alpha a_2\bar{a}_4) - v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) = \bar{y}\bar{x}.$$

Следовательно, отображение $x \mapsto \bar{x}$ есть инволюция алгебры $(A, \alpha)$. Далее, $x + \bar{x} = a_1 + \bar{a}_1 \in F$ и $x\bar{x} = a_1\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_2 \in F$.

Пусть теперь квадратичная форма $n(a)$ строго невырождена на $A$. Квадратичной форме $n(x) = x\bar{x}$ соответствует билинейная форма $f(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x} = (a_1\bar{a}_3 + a_3\bar{a}_1) - \alpha(a_2\bar{a}_4 + a_4\bar{a}_2)$, где $x = a_1 + va_2$, $y = a_3 + va_4$, $a_i \in A$. Пусть $f(x, y) = 0$ для всех $y \in (A, \alpha)$. Полагая $y = a_3 \in A$, мы получим $a_1\bar{a}_3 + a_3\bar{a}_1 = 0$ для всех $a_3 \in A$, откуда, ввиду строгой невырожденности формы $n(a) = a\bar{a}$, следует $a_1 = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то аналогично мы получаем $a_2 = 0$, откуда $x = 0$. Значит, квадратичная форма $n(x) = x\bar{x}$ строго невырождена. Лемма доказана.

Пусть теперь $A$ — композиционная алгебра с квадратичной формой $n(a)$. По лемме 2 в $A$ существует инволюция $a \mapsto \bar{a}$ такая, что $n(a) = a\bar{a}$ и $t(a) = a + \bar{a} \in F$ для любого $a \in A$. Значит, мы можем применить к $A$ процесс Кэли — Диксона. Найдем условия, при которых получающаяся алгебра $(A, \alpha)$ с квадратичной формой $n(x)$ также является композиционной.

Лемма 5. *Если* $A$ — *композиционная алгебра, то алгебра* $(A, \alpha)$ *является композиционной тогда и только тогда, когда алгебра* $A$ *ассоциативна.*

Доказательство. Выше показано, что алгебра $(A, \alpha)$ обладает единицей. Кроме того, по лемме 4 квадра-

тичная форма $n(x) = x\bar{x}$ строго невырождена на $(A, \alpha)$. Значит, алгебра $(A, \alpha)$ является композиционной тогда и только тогда, когда форма $n(x)$ допускает композицию. Заметим, что если $x = a_1 + va_2$, то $n(x) = n(a_1) - \alpha n(a_2)$. Пусть $y = a_3 + va_4$, тогда мы имеем

$$n(xy) - n(x)n(y) = n(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \alpha n(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) - \\ - [n(a_1) - \alpha n(a_2)][n(a_3) - \alpha n(a_4)] = \\ = n(a_1a_3) + \alpha^2 n(a_4\bar{a}_2) + \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - \alpha n(\bar{a}_1a_4) - \\ - \alpha n(a_3a_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) - n(a_1)n(a_3) + \alpha n(a_1)n(a_4) + \\ + \alpha n(a_2)n(a_3) - \alpha^2 n(a_2)n(a_4).$$

Так как $n(ab) = n(a)n(b)$ и $n(\bar{a}) = n(a)$ для любых $a, b \in A$, то мы получаем

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2).$$

Ввиду (3) мы имеем

$$f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) = f(a_1a_3\cdot 1, a_4\bar{a}_2) = -f(a_1a_3\cdot\bar{a}_2, a_4) + \\ + f(a_1a_3, a_4)f(1, \bar{a}_2) = f(a_1a_3\cdot(f(1, \bar{a}_2) - \bar{a}_2), a_4) = \\ = f(a_1a_3\cdot a_2, a_4)$$

и аналогично

$$f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) = f(a_4, a_1\cdot a_3a_2).$$

Следовательно,

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f(a_1a_3\cdot a_2 - a_1\cdot a_3a_2, a_4).$$

Так как $\alpha \neq 0$ и билинейная форма $f$ невырождена, отсюда следует, что квадратичная форма $n(x)$ допускает композицию тогда и только тогда, когда алгебра $A$ ассоциативна. Лемма доказана.

Мы можем теперь привести следующие примеры композиционных алгебр:

I. $F$ — поле характеристики $\neq 2$, $n(\alpha) = \alpha^2$ для всех $\alpha \in F$. Заметим, что в случае характери^^тики 2 поле $F$ не является композиционной алгеброй. Действительно, в этом случае билинейная форма $f(x, y) = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \equiv 0$ на $F$, т. е. квадратичная форма $n(x) = x^2$ не является строго невырожденной. Можно изменить

определение композиционной алгебры так, чтобы поле характеристики 2 являлось композиционной алгеброй; но тогда появится целая дополнительная серия композиционных алгебр характеристики 2, которые могут быть даже бесконечномерными (см. упражнение 6).

II. $\boldsymbol{K}(\mu) = F + Fv_1$, где $v_1^2 = v_1 + \mu$, $4\mu + 1 \neq 0$; поле $F$ произвольно; инволюция: $\overline{\alpha + \beta v_1} = (\alpha + \beta) - \beta v_1$; квадратичная форма: $n(a) = a\bar{a}$. Если многочлен $x^2 - x - \mu$ неприводим в $F[x]$, то алгебра $\boldsymbol{K}(\mu)$ является полем (квадратичное сепарабельное расширение поля $F$); в противном случае $\boldsymbol{K}(\mu) = F \oplus F$. Если характеристика поля $F$ не равна 2, то элемент $v = v_1 - \frac{1}{2}$ удовлетворяет равенству $v^2 = \alpha$, где $\alpha = (4\mu + 1)/4 \neq 0$; в этом случае $\boldsymbol{K}(\mu) = (F, \alpha)$. Обратно, если $F$ — поле характеристики $\neq 2$, то алгебра $(F, \alpha)$ есть алгебра типа II. Действительно, полагая $v_1 = v + \frac{1}{2}$, мы получим $v_1^2 = v_1 + \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)$, при этом $4\left(\alpha - \frac{1}{4}\right) + 1 = 4\alpha \neq 0$; кроме того, $\overline{\gamma + \beta v_1} = \gamma + \beta\,\overline{\left(v + \frac{1}{2}\right)} = \gamma - \beta v + \frac{\beta}{2} = (\gamma + \beta) - \beta v_1$. Заметим здесь же, что если $F$ — поле характеристики 2, то условие $4\mu + 1 \neq 0$ выполняется автоматически.

III. $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta) = (\boldsymbol{K}(\mu), \beta)$, $\beta \neq 0$,— *алгебра обобщенных кватернионов*. Как легко видеть, алгебра $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$ ассоциативна, но не коммутативна.

IV. $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma) = (\boldsymbol{Q}(\mu, \beta), \gamma)$, $\gamma \neq 0$,— *алгебра Кэли — Диксона*. Легко проверить (см. упражнение 2), что алгебра Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ неассоциативна, поэтому в силу леммы 5 наш индуктивный процесс построения композиционных алгебр дальше продолжить нельзя.

Докажем теперь, что указанными примерами исчерпываются все композиционные алгебры.

Пусть $A$ — композиционная алгебра, $n(x)$ — соответствующая квадратичная форма, определенная на $A$. По лемме 2 в алгебре $A$ есть инволюция $a \mapsto \bar{a}$ такая, что $n(a) = \bar{a}a$ и $a + \bar{a} \in F$ для любого $a \in A$. Кроме того, $\bar{\alpha} = \alpha$ для любого $\alpha \in F$. Пусть $f(x, y)$ — билинейная форма, ассоциированная с квадратичной формой $n(x)$, тогда $f(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$. Если $B$ — некоторое подпространство пространства $A$, то через $B^{\perp}$ мы будем обозна-

чать ортогональное дополнение подпространства $B$ относительно формы $f(x, y)$: $B^{\perp} = \{a \in A \mid f(a, B) = 0\}$.

Нам понадобится следующая

Лемма 6. *Пусть $B$ — подалгебра композиционной алгебры $A$, содержащая единицу 1 алгебры $A$. Тогда $B^{\perp}B + BB^{\perp} \subseteq B^{\perp}$, и для любых $a, b \in B$, $v \in B^{\perp}$ верны соотношения*

$$\bar{v} = -v, \qquad av = v\bar{a}, \tag{10}$$

$$a(vb) = v(\bar{a}b), \quad (vb)a = v(ab), \tag{11}$$

$$(va)(vb) = -n(v)\,b\bar{a}. \tag{12}$$

Доказательство. Из равенств $f(v, 1) = 0$, $f(a, v) = 0$ мы получаем $v + \bar{v} = 0$, $a\bar{v} + v\bar{a} = 0$, откуда следует (10). Далее, в силу (3) имеем

$$f(a, vb) = f(a \cdot 1, vb) = -f(ab, v) + f(a, v)\,f(1, b) = 0$$

и аналогично

$$f(a, bv) = 0.$$

Ввиду произвольности элементов $a, b \in B$, $v \in B^{\perp}$ это означает, что $BB^{\perp} + B^{\perp}B \subseteq B^{\perp}$. Далее, по лемме 1 в алгебре $A$ выполнено тождество $x(xy) = x^2y$. Отсюда легко следует, что в $A$ верно и соотношение

$$x(\bar{x}y) = (x\bar{x})\,y = n(x)\,y. \tag{13}$$

Линеаризуя это соотношение по $x$ (см. гл. 1), получаем

$$x(\bar{z}y) + z(\bar{x}y) = f(x, z)\,y. \tag{14}$$

Полагая здесь $x = a$, $y = b$, $z = v$, мы получим

$$a(\bar{v}b) = -v(\bar{a}b),$$

откуда следует первое из равенств (11). Подействовав на обе части этого равенства инволюцией, получим второе из равенств (11). Наконец, по тождеству (14) и ввиду (2), (13), (11) имеем

$$(va)(vb) = -\bar{v}(\overline{va} \cdot b) + f(va, \bar{v})\,b = v(\bar{a}\bar{v} \cdot b) - f(va, v)\,b =$$

$$= -v(\bar{a}v \cdot b) - n(v)\,f(a, 1)\,b = -v(va \cdot b) - n(v)\,f(a, 1)\,b =$$

$$= v(\bar{v} \cdot ba) - n(v)\,f(a, 1)\,b = n(v)\,(ba - f(a, 1)\,b) = -n(v)\,b\bar{a}.$$

Лемма доказана.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. *Пусть $A$ — композиционная алгебра. Тогда $A$ изоморфна одной из приведенных выше алгебр типов* I — IV.

Доказательство. Под словом «подалгебра» мы будем понимать подалгебру, содержащую единицу 1. Так как $a + \bar{a} \in F$, всякая такая подалгебра выдерживает инволюцию.

Пусть $B$ — конечномерная подалгебра алгебры $A$, на которой ограничение формы $f(x, y)$ невырождено. Тогда, как хорошо известно (см., например, Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, «Наука», 1975, стр. 284), $A$ разлагается в прямую сумму подпространств: $A = B + B^{\perp}$; при этом ограничение формы $f(x, y)$ на $B^{\perp}$ также невырождено. Предположим, что $B \neq A$. Тогда мы можем найти $v \in B^{\perp}$ такой, что $n(v) = -\alpha \neq 0$. Из (2) получаем $f(va, vb) = n(v) f(a, b) = -\alpha f(a, b)$. Ввиду невырожденности $f$ на $B$ отсюда следует, что отображение $x \mapsto vx$ подпространства $B$ на $vB$ взаимно однозначно; следовательно, $B$ и $vB$ имеют одинаковую размерность. Кроме того, полученное соотношение показывает, что подпространство $vB$ невырождено относительно $f(x, y)$. Значит, невырождено и подпространство $B_1 = B + vB$, являющееся по лемме 6 ортогональной суммой двух невырожденных подпространств. Соотношения (11), (12) показывают, что $B_1 = B + vB$ — подалгебра алгебры $A$, полученная из $B$ с помощью процесса Кэли — Диксона: $B_1 = (B, \alpha)$. Так как $\bar{v} = -v$, $\overline{a + vb} = \bar{a} - \bar{b}v = \bar{a} - vb$, то инволюция, индуцированная в $B_1$ инволюцией в $A$, совпадает с инволюцией, получающейся в процессе Кэли — Диксона. Наконец, подалгебра $B_1$ невырождена относительно $f(x, y)$ и удовлетворяет тем же условиям, что и $B$, поэтому мы можем повторить тот же процесс с алгеброй $B_1$.

Вернемся к алгебре $A$. Рассмотрим отдельно 2 случая:

1. $F$ — поле характеристики $\neq 2$. В этом случае подалгебра $F$ невырождена относительно $f(x, y)$, поэтому мы можем положить $B = F$. Если $F \neq A$, то в $A$ содержится подалгебра $B_1$ типа II. Если $B_1 \neq A$, то в $A$ содержится подалгебра $B_2$ типа III. Если, наконец, $B_2 \neq A$, то $A$

содержит подалгебру $B_3$ типа IV. На этом процесс должен оборваться, так как в противном случае по лемме 5 в алгебре $A$ содержалась бы подалгебра $B_4$, не являющаяся композиционной алгеброй, что невозможно. Следовательно, $A = B_3$.

2. $F$ — поле характеристики 2. В этом случае, как мы видели, $A \neq F$. Покажем, что существует $a \in A \setminus F$, для которого $t(a) \neq 0$. Действительно, пусть $t(x) = f(1, x) = 0$ для всякого $x \in A \setminus F$. Так как $t(\alpha) = 2\alpha = 0$ для всякого $\alpha \in F$, то вообще $t(x) = f(1, x) = 0$ для всех $x \in A$, что противоречит невырожденности формы $f$. Пусть $t(a) \neq 0$, $a \notin F$. Положим $s = a/t(a)$. Тогда $t(s) = 1$, т. е. $s^2 = s + \mu$, $\mu \in F$. Подалгебра $F + Fs$, как легко видеть, невырождена относительно $f(x, y)$; далее, $\overline{\alpha + \beta s} = \alpha + \beta - \beta s$, так что подалгебра $F + Fs$ есть алгебра типа II. Полагая $B = F + Fs$, мы вновь получим, что алгебра $A$ есть одна из алгебр типа II, III или IV.

Теорема доказана.

Следствие. *Строго невырожденная квадратичная форма $n(x)$, определенная на векторном пространстве $V$ над полем $F$, тогда и только тогда допускает композицию, когда $\dim_F V = 1, 2, 4, 8$, и в некотором базисе пространства $V$ форма $n(x)$ имеет соответственно один из видов*:

1) $n(x) = x^2 \qquad (\mathrm{char}\, F \neq 2)$;

2) $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2$;

3) $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta\mu x_4^2$;

4) $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta\mu x_4^2 - \gamma x_5^2 - \gamma x_5x_6 + \gamma\mu x_6^2 + \beta\gamma x_7^2 + \beta\gamma x_7x_8 - \beta\gamma\mu x_8^2$,

*где* $\mu, \beta, \gamma \in F$, $(4\mu + 1)\beta\gamma \neq 0$. *Если характеристика поля $F$ не равна 2, то в $V$ можно выбрать такой базис, в котором форма $n(x)$ имеет один из видов*:

1) $n(x) = x^2$;

2) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2$;

3) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2$;

4) $n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2 - \gamma x_5^2 + \alpha\gamma x_6^2 + \beta\gamma x_7^2 - \alpha\beta\gamma x_8^2$, *где* $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

**Упражнения**

**1.** Пусть $A = F + Fs$, где $s^2 = s + \alpha$, $\alpha \in F$, $4\alpha + 1 \neq 0$. Доказать, что в $A$ существует единственная нетривиальная инволюция, причем относительно этой инволюции $A$ является композиционной алгеброй (алгеброй $\boldsymbol{K}(\mu)$ типа II).

**2.** Пусть $A$ — алгебра над полем $F$ с единицей 1 и с инволюцией $a \mapsto \bar{a}$ такой, что $a + \bar{a}$, $a\bar{a} \in F$ для любого $a \in A$. Пусть, далее, $(A, \alpha)$ — алгебра, полученная из $A$ с помощью процесса Кэли — Диксона. Доказать, что

а) алгебра $(A, \alpha)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда $A$ ассоциативна и коммутативна;

б) алгебра $(A, \alpha)$ альтернативна тогда и только тогда, когда алгебра $A$ ассоциативна.

**3.** Доказать, что в алгебре Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ над полем $F$ характеристики $\neq 2$ можно выбрать базис $e_0 = 1$, $e_1$, $e_2, \ldots, e_7$ со следующей таблицей умножения ($e_0 = 1$ — единица алгебры $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$):

| | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $\alpha$ | $e_3$ | $\alpha e_2$ | $e_5$ | $\alpha e_4$ | $-e_7$ | $-\alpha e_6$ |
| $e_2$ | $-e_3$ | $\beta$ | $-\beta e_1$ | $e_6$ | $e_7$ | $\beta e_4$ | $\beta e_5$ |
| $e_3$ | $-\alpha e_2$ | $\beta e_1$ | $-\alpha\beta$ | $e_7$ | $\alpha e_6$ | $-\beta e_5$ | $-\alpha\beta e_4$ |
| $e_4$ | $-e_5$ | $-e_6$ | $-e_7$ | $\gamma$ | $-\gamma e_1$ | $-\gamma e_2$ | $-\gamma e_3$ |
| $e_5$ | $-\alpha e_4$ | $-e_7$ | $-\alpha e_6$ | $\gamma e_1$ | $-\alpha\gamma$ | $\gamma e_3$ | $\alpha\gamma e_2$ |
| $e_6$ | $e_7$ | $-\beta e_4$ | $\beta e_5$ | $\gamma e_2$ | $-\gamma e_3$ | $-\beta\gamma$ | $-\beta\gamma e_1$ |
| $e_7$ | $\alpha e_6$ | $-\beta e_5$ | $\alpha\beta e_4$ | $\gamma e_3$ | $-\alpha\gamma e_2$ | $\beta\gamma e_1$ | $\alpha\beta\gamma$ |

где $\alpha = \dfrac{4\mu + 1}{4} \neq 0$. Если $\alpha = \beta = \gamma = -1$ и $F$ — поле вещественных чисел, то мы получим классическую *алгебру чисел Кэли*, решающую проблему Гурвица для суммы 8 квадратов.

**4.** Доказать, что над полем вещественных чисел квадратичная форма $n(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ не допускает композиции.

5. Определить с точностью до эквивалентности все невырожденные квадратичные формы над полем вещественных чисел, допускающие композицию. (Существует всего 7 таких форм.)

6. Доказать, что если в определении композиционной алгебры заменить требование строгой невырожденности формы $n(x)$ на невырожденность, то кроме алгебр типов I—IV появятся следующие композиционные алгебры: поле $F$ характеристики 2 и произвольные чисто несепарабельные квадратичные расширения поля $F$, размерность которых либо равна $2^t$, либо бесконечна.

(Указание. Если $f(x, y) \equiv 0$, то отображение $x \longmapsto n(x)$ является кольцевым гомоморфизмом с нулевым ядром.)

## § 3. Простые квадратичные альтернативные алгебры

В этом параграфе мы докажем, что, за исключением некоторых алгебр характеристики 2, всякая простая квадратичная альтернативная алгебра является композиционной алгеброй.

Нам понадобится несколько простых результатов об альтернативных алгебрах.

Пусть $A$ — некоторая алгебра над произвольным кольцом операторов $\Phi$ и $x, y, z \in A$. Через $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ мы будем обозначать *ассоциатор* элементов $x, y, z$; через $[x, y] = xy - yx$ — *коммутатор* элементов $x, y$ и через $x \circ y = xy + yx$ — *йорданово произведение* элементов $x, y$. В этих обозначениях тождества, определяющие многообразие альтернативных алгебр, запишутся в виде

$$(x, x, y) = 0,$$
$$(x, y, y) = 0.$$

Первое из этих тождеств называется *тождеством левой альтернативности*, второе — *тождеством правой альтернативности*.

Линеаризуя тождества левой и правой альтернативности, мы получаем тождества

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0,$$
$$(x, y, z) + (x, z, y) = 0,$$

из которых следует, что в альтернативной алгебре ассоциатор является кососимметрической функцией своих аргументов. В частности, во всякой альтернативной алгебре справедливо тождество

$$(x, y, x) = 0.$$

Алгебры, удовлетворяющие этому тождеству, называются *эластичными*, а само это тождество называется тождеством эластичности. Например, всякая коммутативная или антикоммутативная алгебра эластична. Ввиду тождества эластичности мы можем (и будем) в дальнейшем записывать произведение $xyx$ в альтернативной алгебре, не указывая расстановку скобок.

Лемма 7. *Во всякой альтернативной алгебре $A$ справедливы следующие тождества:*

$$x(yzy) = [(xy)z]y \text{ — правое тождество Муфанг,}$$

$$(yzy)x = y[z(yx)] \text{ — левое тождество Муфанг,}$$

$$(xy)(zx) = x(yz)x \text{ — центральное тождество Муфанг.}$$

Доказательство. Докажем вначале, что в алгебре $A$ выполнено тождество

$$(x^2, y, x) = 0. \tag{15}$$

В силу тождеств эластичности и левой альтернативности имеем

$$(x^2y)x = [x(xy)]x = x(xyx) = x^2(yx),$$

т. е. (15) доказано. Теперь в силу (15)

$$xy^3 = (xy^2)y - (x, y^2, y) = (xy^2)y = [(xy)y]y.$$

Ввиду следствия теоремы 1.5 многообразие альтернативных алгебр однородно, поэтому по предложению 1.3 в алгебре $A$ верно тождество

$$\begin{aligned} 0 &= \{xy^3 - [(xy)y]y\}\,\Delta_y^1(z) = \\ &= x(yzy) + x(y^2 \circ z) - [(xy)z]y - (xy^2)z - (xz)y^2 = \\ &= x(yzy) - [(xy)z]y - (x, y^2, z) - (x, z, y^2) = \\ &= x(yzy) - [(xy)z]y. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается левое тождество Муфанг. Наконец,

$$\begin{aligned} (xy)(zx) - x(yz)x &= -(xy, z, x) + (x, y, z)x = \\ &= (z, xy, x) + (z, x, y)x = \\ &= [z(xy)]x - z(xyx) + [(zx)y]x - [z(xy)]x = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Во всякой альтернативной алгебре верны тождества*

$$(x, xy, z) = (x, y, z)\, x, \tag{16}$$

$$(x, yx, z) = x\,(x, y, z), \tag{16'}$$

$$(x^2, y, z) = (x, x \circ y, z), \tag{17}$$

$$(x^2, y, z) = x \circ (x, y, z). \tag{17'}$$

Доказательство. Тождества (16) и (16′) эквивалентны соответственно правому и левому тождествам Муфанг. Действительно,

$$(z, xy, x) + (z, x, y)\, x = -z\,(xyx) + [(zx)\, y]\, x,$$

$$(x, yx, z) + x\,(y, x, z) = (xyx)\, z - x\,[y\,(xz)].$$

Далее, из (15) мы получаем

$$0 = (x^2, y, x)\, \Delta_x^1(z) = (x \circ z, y, x) + (x^2, y, z),$$

откуда следует (17). Наконец, (17′) вытекает из (17) и (16), (16′). Следствие доказано.

Тождества (16) — (17) мы в дальнейшем также будем называть *тождествами Муфанг*.

Теорема 2 (Артин). *В альтернативной алгебре $A$ любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что если $u_i = u_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2, 3$,— произвольные неассоциативные слова от порождающих $x_1$, $x_2$, то для любых $a, b \in A$ справедливо равенство $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0$, где $\bar{u}_i = u_i(a, b)$. Будем доказывать это утверждение индукцией по числу $n = d(u_1) + d(u_2) + d(u_3)$, где $d(u_i)$ — длина слова $u_i$. Если $n = 3$, то все следует из тождеств левой и правой альтернативности и эластичности. Пусть теперь $n > 3$ и для любых неассоциативных слов $v_1(x_1, x_2)$, $v_2(x_1, x_2)$, $v_3(x_1, x_2)$ таких, что $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) < n$, имеет место равенство $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 0$. Тогда по предположению индукции ассоциатор $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ не зависит от способа расстановки скобок в словах $u_i$, и поэтому можно считать, что каждое $u_i$ имеет правонормированную расстановку скобок, т. е. $u_i = \{\ldots[(x_1^{(i)} x_2^{(i)})\, x_3^{(i)}] \ldots\}\, x_{k_i}^{(i)}$, где $x_j^{(i)} \in \{x_1, x_2\}$, $k_i = d(u_i)$. В этом случае какие-то два слова среди $u_1$, $u_2$, $u_3$ оканчиваются на одинаковые порож-

дающие. Пусть, например, $u_1 = (v_1) x_1$, $u_2 = (v_2) x_1$. Легко видеть, что если $v_1$ либо $v_2$ отсутствуют, то по предположению индукции и в силу тождеств Муфанг $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0$. Следовательно, можно считать, что $d(v_1) \geqslant 1$, $d(v_2) \geqslant 1$. Тогда в силу линеаризованного тождества Муфанг имеем

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{v}_1 a, \bar{v}_2 a, \bar{u}_3) =$$
$$= -(\bar{v}_1 \bar{u}_3, \bar{v}_2 a, a) + a(\bar{v}_1, \bar{v}_2 a, \bar{u}_3) + \bar{u}_3(\bar{v}_1, \bar{v}_2 a, a) =$$
$$= -(\bar{v}_1 \bar{u}_3, \bar{v}_2 a, a) = -a(\bar{v}_1 \bar{u}_3, \bar{v}_2, a) = 0.$$

Теорема доказана.

Алгебра $A$ называется *алгеброй с ассоциативными степенями*, если каждый элемент алгебры $A$ порождает ассоциативную подалгебру.

Следствие. *Всякая альтернативная алгебра есть алгебра с ассоциативными степенями.*

Заметим, что из теоремы Артина следует также, что альтернативную алгебру можно определить как алгебру, в которой любые два элемента порождают ассоциативную подалгебру.

Напомним, что алгебра $A$ над полем $F$ с единицей 1 называется *квадратичной* над $F$, если каждый элемент $x$ из $A$ удовлетворяет равенству вида

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0, \quad t(x), \; n(x) \in F \tag{18}$$

(при этом мы отождествляем поле $F$ с подалгеброй $F \cdot 1$ алгебры $A$). Элементы $t(x)$ и $n(x)$ мы будем называть соответственно *следом* и *нормой* элемента $x$. Заметим, что если $x \notin F$, то $t(x)$ и $n(x)$ определены однозначно. Положим для $\alpha \in F$ по определению $t(\alpha) = 2\alpha$, $n(\alpha) = \alpha^2$; тогда след $t(x)$ и норма $n(x)$ определены однозначно для любого $x \in A$.

Теорема 3. *Пусть $A$ — квадратичная алгебра над полем $F$, содержащим по крайней мере 3 элемента. Тогда след $t(x)$ является линейной функцией, а норма $n(x)$ — квадратичной формой на $A$. Если при этом алгебра $A$ альтернативна, то квадратичная форма $n(x)$ удовлетворяет соотношению* (1).

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in F$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha\beta \neq 0$. Имеем из (18) для любых $x, y \in A$

$$0 = (\alpha x + \beta y)^2 - t(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y) + n(\alpha x + \beta y) - \alpha\beta[(x+y)^2 - t(x+y)(x+y) + n(x+y)],$$

и, далее,

$$0 = [\alpha^2 t(x) - \alpha t(\alpha x + \beta y) - \alpha\beta t(x) + \alpha\beta t(x+y)]x + [\beta^2 t(y) - \beta t(\alpha x + \beta y) - \alpha\beta t(y) + \alpha\beta t(x+y)]y + [-\alpha^2 n(x) - \beta^2 n(y) + n(\alpha x + \beta y) + \alpha\beta n(x) + \alpha\beta n(y) - \alpha\beta n(x+y)].$$

Если теперь $1, x, y$ линейно независимы над $F$, то имеем

$$\alpha[\alpha t(x) - t(\alpha x + \beta y) - \beta t(x) + \beta t(x+y)] = 0,$$
$$\beta[\beta t(y) - t(\alpha x + \beta y) - \alpha t(y) + \alpha t(x+y)] = 0,$$

откуда

$$(\alpha - \beta)[t(x) + t(y) - t(x+y)] = 0$$

и

$$t(x+y) = t(x) + t(y). \tag{19}$$

Пусть теперь элементы $1, x, y$ линейно зависимы над $F$ и, например, $y = \alpha x + \beta$. Прямым вычислением получаем из (18) $t(y) = \alpha t(x) + 2\beta$ и $t(x+y) = t((1+\alpha)x + \beta) = (1+\alpha)t(x) + 2\beta = t(x) + t(y)$. Таким образом, равенство (19) доказано для всех $x$ и $y$.

Далее, имеем для любого $\lambda \in F$

$$\lambda^2 x^2 - \lambda t(x)\lambda x + \lambda^2 n(x) = 0,$$

откуда $t(\lambda x) = \lambda t(x)$ и $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$. Тем самым линейность следа $t(x)$ доказана. Для доказательства того, что норма $n(x)$ является квадратичной формой на $A$, нам осталось показать, что функция $f(x, y) = n(x+y) - n(x) - n(y)$ является билинейной формой на $A$. Из равенства

$$(x+y)^2 - t(x+y)(x+y) + n(x+y) = 0$$

ввиду (19) получаем

$$f(x, y) = t(x)y + t(y)x - x \circ y, \tag{20}$$

откуда в силу линейности следа вытекает билинейность функции $f(x, y)$. Тем самым первая часть теоремы 3 доказана.

Пусть теперь $A$ — альтернативная алгебра. Докажем равенство (1). В силу теоремы Артина подалгебра, порожденная элементами $x$ и $y$, ассоциативна. Умножив равенство (20) справа на $xy$, получим

$$f(x, y)\, xy = t(x)\, yxy + t(y)\, x^2y - (xy)^2 - yx^2y.$$

В силу (18) имеем

$$yx^2y = y\,(t(x)\, x - n(x))\, y = t(x)\, yxy - \\ - n(x)\, t(y)\, y + n(x)\, n(y),$$

$$t(y)\, x^2y = t(y)\, t(x)\, xy - t(y)\, n(x)\, y.$$

Подставив эти два равенства в предыдущее, получим

$$(xy)^2 - (-f(x, y) + t(y)\, t(x))\, xy + n(x)\, n(y) = 0,$$

откуда следует (1), если $xy \notin F$. Пусть теперь $xy = \alpha \in F$. Так как $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x) = n(\lambda)\, n(x)$ для любого $\lambda \in F$, то нам достаточно рассмотреть случай, когда $x \notin F$, $y \notin F$. Умножив равенство (18) справа на $y^2$, получим

$$\alpha^2 - \alpha t(x)\, y + n(x)\, y^2 = 0.$$

Пусть $n(x) = 0$. Если в этом случае $\alpha \neq 0$, то имеем $\alpha = t(x)\, y$, откуда $y \in F$, что не так. Значит, $\alpha = 0$ и $n(xy) = 0 = n(x)\, n(y)$. Если же $n(x) \neq 0$, то получаем

$$\frac{\alpha^2}{n(x)} - \frac{\alpha t(x)}{n(x)}\, y + y^2 = 0,$$

откуда ввиду того, что $y \notin F$, следует $n(y) = \frac{\alpha^2}{n(x)}$ и $n(x)\, n(y) = \alpha^2 = n(xy)$. Равенство (1) доказано.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *Пусть $A$ — простая квадратичная альтернативная алгебра над полем $F$, содержащим по крайней мере 3 элемента. Тогда либо $A$ — композиционная алгебра, либо $A$ — некоторое поле характеристики 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3 на алгебре $A$ определена квадратичная форма $n(x)$, связанная с умножением в алгебре $A$ равенством (1). Пусть $f(x, y)$ — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $n(x)$. Рассмотрим множество $W = \{a \in A \mid f(a, A) = 0\}$ — ядро формы $f(x, y)$, и покажем, что $W$ является идеалом

в $A$. Ясно, что $W$ является подпространством векторного пространства $A$. Линеаризуя соотношение (1), как и при доказательстве леммы 1, мы получаем, что в алгебре $A$ верно соотношение (3). Пусть $a \in W$; $x, y \in A$. Тогда из (3) получаем

$$f(ax, y) = f(ax, y\cdot 1) = -f(a, yx) + f(a, y)\, f(x, 1) = 0,$$

т. е. $W$ — правый идеал алгебры $A$. Аналогично доказывается, что $W$ — левый идеал в $A$. Ввиду простоты алгебры $A$ либо $W = (0)$, либо $W = A$. В первом случае форма $n(x)$ строго невырождена, и $A$ является композиционной алгеброй. Пусть теперь $W = A$. В этом случае $f(x, y) \equiv 0$ на $A$, так что $n(x + y) = n(x) + n(y)$ для любых $x, y \in A$. Следовательно, отображение $x \mapsto n(x)$ является гомоморфизмом кольца $A$ в кольцо $F$. Ядро этого гомоморфизма является, как легко видеть, идеалом алгебры $A$. Так как алгебра $A$ проста и $n(1) = 1 \neq 0$, то это ядро равно нулю, т. е. кольцо $A$ изоморфно некоторому подкольцу кольца $F$. Далее, из равенства $0 = f(1, 1) = 2$ следует, что в этом случае поле $F$ имеет характеристику 2. Ясно также, что кольцо $A$ является подполем поля $F$.

Теорема доказана.

**Упражнения**

1 (обобщенная теорема Артина). Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $a, b, c \in A$. Доказать, что если $(a, b, c) = 0$, то подалгебра, порожденная элементами $a, b, c$, ассоциативна.

В упражнениях 2—4 $D$ — конечномерная альтернативная алгебра без делителей нуля над полем вещественных чисел $\boldsymbol{R}$.

**2.** Доказать, что $D$ является алгеброй с делением, т. е. для любых $a, b \in D$, $a \neq 0$, разрешимы уравнения

$$ax = b, \quad ya = b.$$

**3.** Доказать, что в $D$ есть единица 1.

**4.** Доказать, что алгебра $D$ квадратична над $\boldsymbol{R}$.

Указание. Каждый элемент алгебры $D$ порождает ассоциативную подалгебру, поэтому в $D$ имеет смысл понятие минимального многочлена элемента конечномерной алгебры.

5 (обобщенная теорема Фробениуса). Пусть $D$ — конечномерная альтернативная алгебра без делителей нуля над полем вещественных чисел $\boldsymbol{R}$. Тогда $D$ изоморфна одной из следующих алгебр над $\boldsymbol{R}$: 1) $\boldsymbol{R}$; 2) поле комплексных чисел $\boldsymbol{K}$; 3) тело кватернионов $\boldsymbol{Q}$; 4) алгебра чисел Кэли $\boldsymbol{C}$.

**6.** Пусть $A$ — алгебра с единицей 1 над полем $F$, $K$ — некоторое расширение поля $F$. Доказать, что если алгебра $A_K = K \otimes_F A$ квадратична над $K$, то алгебра $A$ квадратична над $F$.

## § 4. Дальнейшие свойства композиционных алгебр

В этом параграфе мы докажем некоторые свойства композиционных алгебр, необходимые нам в дальнейшем. Напомним, что во всякой композиционной алгебре $A$ кроме квадратичной формы $n(x)$ определены также билинейная форма $f(x, y)$, связанная с $n(x)$, и линейная форма следа $t(x) = f(1, x)$; при этом каждый элемент алгебры $A$ удовлетворяет равенству (18). Если $B$ — некоторое подпространство композиционной алгебры $A$, то через $B^{\perp}$ мы, как и раньше, обозначаем ортогональное дополнение подпространства $B$ относительно формы $f(x, y)$.

Композиционные алгебры, отличные от поля $F$, можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{K}(\mu) = F + Fv_1,\\
v_1^2 = v_1 + \mu, \qquad 4\mu + 1 \neq 0,\\
\boldsymbol{Q}(\mu, \beta) = (\boldsymbol{K}(\mu), \beta) = \boldsymbol{K}(\mu) + v_2\boldsymbol{K}(\mu),\\
v_2 \in \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}, \qquad v_2^2 = \beta \neq 0,\\
\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma) = (\boldsymbol{Q}(\mu, \beta), \gamma) = \boldsymbol{Q}(\mu, \beta) + v_3\boldsymbol{Q}(\mu, \beta),\\
v_3 \in \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)^{\perp}, \quad v_3^2 = \gamma \neq 0.
\end{gathered}$$

Заметим, что так как по (10) $v_2k = \bar{k}v_2$, $v_3q = \bar{q}v_3$ для любых $k \in \boldsymbol{K}(\mu)$, $q \in \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$, то алгебры $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$ и $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ можно представить и в виде

$$\boldsymbol{Q}(\mu, \beta) = \boldsymbol{K}(\mu) + \boldsymbol{K}(\mu)v_2,$$

$$\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma) = \boldsymbol{Q}(\mu, \beta) + \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)v_3.$$

Отсюда следует, что в алгебрах $\boldsymbol{K}(\mu)$, $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$, $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ можно выбрать соответственно следующие базисы:

$$\{1, \ v_1\}, \ \{1, v_1, v_2, v_1v_2\},$$
$$\{1, v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, (v_1v_2)v_3\};$$

при этом $v_1^2 = v_1 + \mu$, $v_2^2 = \beta$, $v_3^2 = \gamma$; $(4\mu + 1)\beta\gamma \neq 0$; $\bar{v}_1 = 1 - v_1$, $\bar{v}_2 = -v_2$, $\bar{v}_3 = -v_3$; $v_iv_j = v_jv_i$ при $j > i$.

Если $F$ — поле характеристики $\neq 2$, то каждая композиционная алгебра над $F$, отличная от $F$, представляется в виде $F + F^{\perp}$; кроме того, в любом случае алгебры

$\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$ и $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ представляются в виде $\boldsymbol{K}(\mu) + \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$, а алгебра $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ — в виде $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta) + \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)^{\perp}$.

Заметим, наконец, что по лемме 3 алгебры $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$ и $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ всегда являются простыми алгебрами.

Пусть теперь $A$ — некоторая алгебра. Обозначим через $N(A)$ совокупность всех таких элементов $n$ из $A$, что $(n, a, b) = (a, n, b) = (a, b, n) = 0$ для любых элементов $a, b \in A$. Множество $N(A)$ называется *ассоциативным центром* алгебры $A$. Совокупность всех таких элементов $z \in N(A)$, что $[z, a] = 0$ для всех $a \in A$, называется *центром* алгебры $A$ и обозначается через $Z(A)$.

Теорема 5. *Пусть $A$ — композиционная алгебра над полем $F$. Если $\dim_F A \geqslant 4$, то $Z(A) = F$; если же $A = \boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли — Диксона, то и $N(A) = F$.*

Доказательство. Ясно, что $F \subseteq Z(A) \subseteq N(A)$. Для доказательства включения $Z(A) \subseteq F$ достаточно показать, что если $[a, x] = 0$ для всех $x$ из $A$, то $a \in F$. Как было замечено выше, $A = \boldsymbol{K}(\mu) + \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$. Пусть $a = k + a'$, где $k \in \boldsymbol{K}(\mu)$, $a' \in \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$. Мы имеем $0 = [a, v_1] = [a', v_1]$. Но ввиду (10) $v_1 a' = a'\bar{v}_1 = a' - a'v_1$, поэтому мы получаем $a' = 2a'v_1 = 4a'v_1^2 = 4a'(v_1 + \mu) = 2a' + 4a'\mu = (2 + 4\mu) a'$. Так как $4\mu + 1 \neq 0$, отсюда следует, что $a' = 0$, т. е. $a = k \in \boldsymbol{K}(\mu)$. Пусть $a = \alpha + \beta v_1$, где $\alpha, \beta \in F$. Тогда мы имеем $0 = [a, v_2] = \beta [v_1, v_2] = \beta (v_1 v_2 - \bar{v}_1 v_2) = \beta (2v_1 v_2 - v_2)$, откуда $\beta = 0$ и $a \in F$. Тем самым равенство $Z(A) = F$ доказано.

Пусть теперь $A = \boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ и $a \in N(A)$. Мы вновь можем записать $a = q + a'$, где $q \in \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$, $a' \in \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)^{\perp}$. По условию и в силу (11) имеем $0 = (a, v_1, v_2) = (a', v_1, v_2) = (a'v_1) v_2 - a'(v_1 v_2) = a'[v_2, v_1] = a'(v_2 - 2v_1 v_2)$, откуда $a'v_2 = 2a'(v_1 v_2)$, и вновь по (11) $a'v_2 = 2(a'v_2)v_1 = 4(a'v_2) v_1^2 = (2 + 4\mu) a'v_2$. Так как $1 + 4\mu \neq 0$, то получаем $a'v_2 = 0$, откуда $0 = (a'v_2) v_2 = a'v_2^2 = \beta a'$, и $a' = 0$. Итак, $a = q \in \boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$. Пусть теперь $b$ — произвольный элемент из $\boldsymbol{Q}(\mu, \beta)$. Тогда мы имеем $0 = (v_3, a, b) = (v_3 a) b - v_3 (ab)$, откуда в силу (11) получаем $0 = v_3 [a, b]$, и, далее, $0 = v_3 (v_3 [a, b]) = \gamma [a, b]$, т. е. $[a, b] = 0$. Мы получили, что $a \in Z(\boldsymbol{Q}(\mu, \beta))$, откуда по доказанному $a \in F$.

Теорема доказана.

Лемма 8. *Пусть* $A$ — *композиционная алгебра. Тогда для любых* $x, y \in A$ *таких, что* $t(x) = t(y) = 0$, *имеют место включения* $x^2$, $x \circ y \in F$. *В частности, для любых* $x, y, z, r, s, t \in A$ *верны включения*

$$[x, y]^2,\ [x, y] \circ [z, r],\ (x, y, z)^2,\ (x, y, z) \circ [r, s],\ (x, y, z) \circ (r, s, t) \in F.$$

Доказательство. В алгебре $A$ справедливо тождество (9), которое можно переписать в виде

$$x \circ y = t(x)\, y + t(y)\, x - t(x)\, t(y) + t(xy). \qquad (21)$$

Отсюда вытекает первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что

$$t([x, y]) = t((x, y, z)) = 0. \qquad (22)$$

Так как $x + \bar{x} = t(x) \in F$, то мы имеем

$$[\bar{x}, y] = -[x, y],$$
$$(\bar{x}, y, z) = (x, \bar{y}, z) = (x, y, \bar{z}) = -(x, y, z).$$

Теперь

$$t([x, y]) = [x, y] + \overline{[x, y]} = [x, y] - [\bar{x}, \bar{y}] = 0,$$
$$t((x, y, z)) = (x, y, z) + \overline{(x, y, z)} = (x, y, z) - (\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}) = (x, y, z) + (z, y, x) = 0,$$

т. е. (22) доказано. Тем самым доказана и лемма.

Следствие. *Во всякой композиционной алгебре справедливы тождества*

$$[[x, y]^2, t] = [[x, y] \circ [z, t], r] = 0,$$
$$[(x, y, z)^2, t] = [(x, y, z) \circ [r, s], t] = [(x, y, z) \circ (r, s, t), u] = 0,$$
$$([x, y]^2, s, t) = ([x, y] \circ [z, r], s, t) = 0,$$
$$((x, y, z)^2, s, t) = ((x, y, z) \circ [r, s], u, t) = ((x, y, z) \circ (r, s, t), u, v) = 0.$$

Лемма 9. *Следующие условия для композиционной алгебры* $A$ *эквивалентны*:

а) $n(x) = 0$ *для некоторого* $x \neq 0$ *из* $A$;

б) *в* $A$ *есть делители нуля.*

Доказательство. Если $x \neq 0$ и $n(x) = x\bar{x} = 0$, то ясно, что $x$ является делителем нуля. Обратно, пусть $xy = 0$, где $x, y \in A$; $x \neq 0$, $y \neq 0$. Тогда имеем $0 = n(xy) = n(x)\,n(y)$, откуда либо $n(x) = 0$, либо $n(y) = 0$. Лемма доказана.

Если в композиционной алгебре $A$ выполнено одно из условий а), б) леммы 9, то $A$ называется *расщепляемой*.

Лемма 10. *Композиционная алгебра $A$ тогда и только тогда является расщепляемой, когда $A$ содержит идемпотент $e \neq 0, 1$.*

Доказательство. Если в $A$ есть идемпотент $e \neq 0, 1$, то имеем $e^2 = e$, откуда $n(e) = 0$ и алгебра $A$ расщепляема. Обратно, пусть алгебра $A$ расщепляема. Если в $A$ найдется такой элемент $x$, что $n(x) = 0$, $t(x) = \alpha \neq 0$, то элемент $\alpha^{-1}x$ будет искомым идемпотентом. Пусть теперь таких элементов не существует, т. е. для всякого $x \in A$ равенство $n(x) = 0$ влечет $t(x) = 0$. Так как $A$ расщепляема, то существует $0 \neq a \in A$, для которого $n(a) = 0$. Для любого $x \in A$ имеем $n(ax) = n(a)\,n(x) = 0$, откуда по нашему условию и $t(ax) = 0$. Теперь в силу (8) получаем $f(a, x) = t(a)\,t(x) - t(ax) = 0$. Ввиду невырожденности формы $f(x, y)$ отсюда следует, что $a = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 6. *Любые две расщепляемые композиционные алгебры одинаковой размерности над полем $F$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $A$ — расщепляемая композиционная алгебра и $B$ — невырожденная подалгебра алгебры $A$, содержащая единицу 1 и идемпотент $e \neq 0, 1$. Докажем, что если $B \neq A$, то существует $v \in B^\perp$ такой, что $v^2 = 1$. Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что существует $u \in B^\perp$, для которого $u^2 = -n(u) = \alpha \neq 0$, при этом $uB \subseteq B^\perp$. Положим теперь $v = u + \alpha^{-1}(1 - \alpha)\,ue$, тогда $v \in B^\perp$. Кроме того, по центральному тождеству Муфанг имеем $(ue)^2 = (ue)\,(\overline{eu}) = u\,(e\bar{e})\,u = 0$, откуда

$$v^2 = (u + \alpha^{-1}(1 - \alpha)\,ue)^2 = \\ = u^2 + \alpha^{-1}(1 - \alpha)\,(u^2e + ueu) = \\ = \alpha + (\alpha^{-1} - 1)\,(\alpha e + u\,(\overline{ue})) = \alpha + (1 - \alpha)\,(e + \bar{e}) = 1.$$

Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, в силу леммы 10 мы получаем, что алгебра $A$ изоморфна либо алгебре $\boldsymbol{K}(0)$, либо алгебре $\boldsymbol{Q}(0, 1)$, либо алгебре $\boldsymbol{C}(0, 1, 1)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Над алгебраически замкнутым полем $F$ существует всего 4 неизоморфные композиционные алгебры.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякая композиционная алгебра $A$ над полем $F$ размерности $n > 1$ является расщепляемой. Пусть $a \in A$, $a \notin F$, и пусть $\alpha \in F$ — корень уравнения $x^2 - t(a)x + n(a) = 0$. Тогда мы имеем

$$a^2 - \alpha^2 = t(a)(a - \alpha),$$

откуда

$$(a - \alpha)(a + \alpha - t(a)) = 0,$$

т. е. в $A$ есть делители нуля. Следствие доказано.

Рассмотрим более детально строение расщепляемых композиционных алгебр.

Ясно прежде всего, что $\boldsymbol{K}(0) \cong F \oplus F$; соответствующий изоморфизм устанавливается отображением

$$\alpha + \beta v_1 \mapsto (\alpha + \beta, \alpha).$$

При этом инволюции алгебры $\boldsymbol{K}(0)$ соответствует инволюция $\overline{(\alpha, \beta)} = (\beta, \alpha)$ в алгебре $F \oplus F$.

Далее, рассмотрим алгебру $F_2$ матриц порядка $2 \times 2$ с элементами из $F$. Как легко видеть, $F_2$ является композиционной алгеброй относительно квадратичной формы $n(x) = \det x$, при этом, ввиду наличия делителей нуля, алгебра $F_2$ расщепляема. По теореме 6 всякая четырехмерная расщепляемая композиционная алгебра над $F$ изоморфна $F_2$. Следовательно, $\boldsymbol{Q}(0, 1) \cong F_2$. Этот изоморфизм можно установить и непосредственно, рассмотрев соответствие

$$\alpha + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 v_2 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma + \delta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Как мы уже отмечали, соответствующей квадратичной формой в алгебре $F_2$ является определитель матрицы; заметим еще, что линейной формой следа $t(x)$ в алгебре $F_2$ является обычный след матрицы. При этом равенство (18)

справедливо в $F_2$ в силу теоремы Гамильтона — Кэли. Наконец, инволюция $a \mapsto \bar{a} = t(a) - a$ в алгебре $F_2$ выглядит следующим образом:

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Перейдем теперь к рассмотрению алгебры Кэли — Диксона $C(0, 1, 1)$. По доказанному выше имеем $C(0, 1, 1) \cong (F_2, 1)$, т. е. $C(0, 1, 1) = F_2 + vF_2$, где $v \in F_2^{\perp}$, $v^2 = 1$. Пусть $e_{11}$, $e_{12}$, $e_{21}$, $e_{22}$ — матричные единицы алгебры $F_2$. Мы положим

$$e_{12}^{(1)} = e_{12}, \quad e_{12}^{(2)} = ve_{22}, \quad e_{12}^{(3)} = ve_{21};$$
$$e_{21}^{(1)} = e_{21}, \quad e_{21}^{(2)} = ve_{11}, \quad e_{21}^{(3)} = -ve_{12};$$

тогда элементы $e_{11}$, $e_{22}$, $e_{12}^{(k)}$, $e_{21}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, образуют базис алгебры $C(0, 1, 1)$.

Лемма 11. *Элементы $e_{ii}$, $e_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \quad e_{ii}^2 = e_{ii}, \quad e_{ii}e_{jj} = 0;\\
&\text{б)} \quad e_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{jj} = e_{ij}^{(k)}, \quad e_{jj}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}e_{ii} = 0;\\
&\text{в)} \quad (e_{ij}^{(k)})^2 = e_{ij}^{(k)} \circ e_{ij}^{(l)} = 0 \qquad (k \neq l);\\
&\text{г)} \quad e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(k)} = e_{ii}, \quad e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0 \quad (k \neq l);\\
&\text{д)} \quad e_{ij}^{(k)}e_{ij}^{(k+1)} = (j-i)\, e_{ji}^{(k+2)} \qquad (k \bmod 3).
\end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Соотношения а) выполняются в алгебре $F_2$. Справедливость соотношений б) — д) проверяется непосредственно по определению умножения в алгебре $(F_2, 1)$. Докажем, например, справедливость соотношения г). Мы имеем

$$e_{ij}^{(1)}e_{ji}^{(1)} = e_{ij}e_{ji} = e_{ii}.$$

Далее, из (23) следует, что $\bar{e}_{ii} = e_{jj}$, $\bar{e}_{ij} = -e_{ij}$, поэтому

$$e_{ij}^{(2)}e_{ji}^{(2)} = (ve_{jj})(ve_{ii}) = e_{ii}\bar{e}_{jj} = e_{ii}^2 = e_{ii},$$
$$e_{ij}^{(3)}e_{ji}^{(3)} = -(ve_{ji})(ve_{ij}) = -e_{ij}\bar{e}_{ji} = e_{ij}e_{ji} = e_{ii}.$$

С другой стороны, мы имеем

$$e_{ij}^{(1)}e_{ji}^{(2)} = e_{ij}(ve_{ii}) = v(\overline{e_{ij}}e_{ii}) = -v(e_{ij}e_{ii}) = 0,$$
$$e_{ij}^{(1)}e_{ji}^{(3)} = \pm e_{ij}(ve_{ij}) = \pm v(\overline{e_{ij}}e_{ij}) = 0,$$
$$e_{ij}^{(2)}e_{ji}^{(3)} = \pm (ve_{jj})(ve_{ij}) = \pm e_{ij}\overline{e_{jj}} = \pm e_{ij}e_{ii} = 0.$$

Мы доказали, что $e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0$ при $k < l$. Так как $t(e_{ij}^{(k)}) = 0$, то в силу (21) мы имеем $e_{ij}^{(k)} \circ e_{ji}^{(l)} = 0$ при $k \neq l$, откуда и $e_{ij}^{(k)}e_{ji}^{(l)} = 0$ при $k > l$. Тем самым г) доказано. Аналогично доказываются остальные соотношения. Лемма доказана.

Восьмимерная алгебра над полем $F$ с базисом $e_{ii}$, $e_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$, и таблицей умножения (24) называется *матричной алгеброй Кэли — Диксона* над $F$. Мы будем обозначать эту алгебру через $\boldsymbol{C}(F)$. Элементы $e_{ii}$, $e_{ij}^{(k)}$ мы будем называть *матричными единицами Кэли — Диксона*. Из доказанного выше следует, что всякая расщепляемая алгебра Кэли — Диксона над полем $F$ изоморфна матричной алгебре Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}(F)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Всякая расщепляемая композиционная алгебра над полем $F$ изоморфна либо алгебре $F \oplus F$, либо алгебре матриц $F_2$, либо матричной алгебре Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}(F)$.*

Матричную алгебру Кэли — Диксона можно рассматривать не только над полем, но и над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ. Ясно, что алгебра $\boldsymbol{C}(\Phi)$ также будет альтернативной.

Название «матричная алгебра» объясняется тем, что элементы из $\boldsymbol{C}(F)$ можно следующим образом представить матрицами. Пусть $a \in \boldsymbol{C}(F)$, $a = \alpha_{11}e_{11} + \alpha_{22}e_{22} + \sum_{k=1}^{3}(\alpha_{12}^{(k)}e_{12}^{(k)} + \alpha_{21}^{(k)}e_{21}^{(k)})$. Сопоставим элементу $a$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}) \in F^3. \tag{25}$$

Тогда сложению и умножению на скаляр элементов алгебры $\boldsymbol{C}(F)$ будут соответствовать обычные сложение и умножение на скаляр матриц вида (25), а умножению элементов алгебры $\boldsymbol{C}(F)$ будет соответствовать следующее

умножение матриц вида (25):

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & a_{12}\\ a_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{11} & b_{12}\\ b_{21} & \beta_{22}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+(a_{12},\ b_{21}) & \alpha_{11}b_{12}+\beta_{22}a_{12}-a_{21}\times b_{21}\\ \beta_{11}a_{21}+\alpha_{22}b_{21}+a_{12}\times b_{12} & \alpha_{22}\beta_{22}+(a_{21},\ b_{12})\end{pmatrix},$$

где для векторов $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)\in F^3$ через $(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ обозначено их скалярное произведение, а через $x\times y=(x_2y_3-x_3y_2,\ x_3y_1-x_1y_3,\ x_1y_2-x_2y_1)$ — «векторное произведение». Заметим еще, что при таком представлении следом элемента $a$ является обычный след матрицы: $t(a)=\alpha_{11}+\alpha_{22}$, а соответствующей квадратичной формой (или нормой) является следующий аналог определителя для матриц вида (25): $n(a)=\alpha_{11}\alpha_{22}-(a_{12},\ a_{21})$. Кроме того, действие инволюции $a\mapsto\bar{a}$ в алгебре $C(F)$ определяется в данном случае равенством (23).

Приведем теперь примеры композиционных алгебр без делителей нуля. Как мы видели, над алгебраически замкнутым полем $F$ не существует таких алгебр, отличных от $F$. Мы сейчас покажем, что любое поле $F$ можно расширить до поля $F_1$, над которым уже существуют композиционные алгебры без делителей нуля.

Лемма 12. *Пусть $F$ — произвольное поле, $F_1=F(\alpha)$ — простое трансцендентное расширение поля $F$. Тогда композиционная алгебра $\mathbf{K}(\alpha)$ над полем $F_1$ не содержит делителей нуля.*

Доказательство. Достаточно доказать, что многочлен $x^2-x-\alpha$ неприводим над полем $F(\alpha)$. Предположим, что это не так, т. е. $a^2-a-\alpha=0$ для некоторого $a\in F(\alpha)$. Тогда $a=f\cdot g^{-1}$, где $f$, $g$ — многочлены от $\alpha$ с коэффициентами из поля $F$, и мы имеем $f^2-fg=\alpha g^2$. Если $\deg f=m$, $\deg g=n$, то мы получаем, что $\max\{2m,\ m+n\}=2n+1$. Однако, как легко видеть, это равенство невозможно ни при каких $m$, $n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 13. *Пусть $A$ — конечномерная алгебра над полем $F$ с единицей 1 и с инволюцией $a\mapsto\bar{a}$, причем $a+\bar{a}$, $a\bar{a}\in F$ для любого $a\in A$; $F_1=F(\alpha)$ — простое трансцендентное расширение поля $F$. Тогда если $A$ не имеет делите-*

*лей нуля, то алгебра* $A_{F_1} = F_1 \otimes {}_F A$ *и алгебра* $A_1 = (A_{F_1}, \alpha)$, *полученная из алгебры* $A_{F_1}$ *с помощью процесса Кэли — Диксона, также не содержат ненулевых делителей нуля.*

Доказательство. Докажем вначале, что в алгебре $A_{F_1}$ нет делителей нуля. Пусть $ab = 0$ для некоторых $a, b \in A_{F_1}$, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда $a = \sum_i t_i \otimes a_i$, $b = \sum_j s_j \otimes b_j$, где $t_i, s_j \in F(\alpha)$; $a_i, b_j \in A$. Пусть $f$ — общий знаменатель дробей $t_i$; $g$ — общий знаменатель дробей $s_j$; тогда $fa = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \otimes a_i'$, $gb = \sum_{j=0}^{m} \alpha^j \otimes b_j'$, где $a_i'$, $b_j' \in A$; $a_n' \neq 0$, $b_m' \neq 0$. Мы имеем $(fa)(gb) = 0$, откуда $a_n' b_m' = 0$ и либо $a_n' = 0$, либо $b_m' = 0$. Полученное противоречие доказывает, что либо $a = 0$, либо $b = 0$, т. е. в алгебре $A_{F_1}$ нет делителей нуля. Пусть теперь $x = a + vb$, $y = c + vd$ — ненулевые элементы из $(A_{F_1}, \alpha)$ такие, что $xy = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} ac + \alpha d\bar{b} &= 0, \\ \bar{a}d + cb &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Так как в алгебре $A_{F_1}$ нет делителей нуля, то все элементы $a, b, c, d$ должны быть ненулевыми. Как и в предыдущем случае, существует такие многочлены $f, g, h, t$ из кольца $F[\alpha]$, что $fa = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \otimes a_i$, $gb = \sum_{i=0}^{m} \alpha^i \otimes b_i$, $hc = \sum_{i=0}^{k} \alpha^i \otimes c_i$, $td = \sum_{i=0}^{l} \alpha^i \otimes d_i$, где все $a_i, b_i, c_i, d_i \in A$ и $a_n, b_m, c_k, d_l$ отличны от нуля. Первое из равенств (26) дает нам

$$gt\Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i \otimes a_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k} \alpha^i \otimes c_i\Big) + \alpha fh\Big(\sum_{i=0}^{l} \alpha^i \otimes d_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha^i \otimes \bar{b}_i\Big) = 0,$$

откуда

$$\deg g + \deg t + n + k = \deg f + \deg h + l + m + 1. \tag{27}$$

Аналогично из второго равенства (26) получаем

$$\deg g + \deg h + n + l = \deg f + \deg t + k + m. \quad (28)$$

Вычитая теперь (28) из (27), мы получаем

$$2(\deg t - \deg h) + 2(k - l) = 1,$$

что невозможно, так как 1 не является четным числом. Полученное противоречие доказывает, что алгебра $(A_{F_1}, \alpha)$ не имеет делителей нуля. Лемма доказана.

Из лемм 12 и 13 вытекает

Теорема 8. *Пусть $F$ — произвольное поле. Тогда для любого $n = 2, 4, 8$ существует бесконечное расширение $F_1$ поля $F$ и композиционная алгебра $A$ над полем $F_1$ размерности $n$, не содержащая ненулевых делителей нуля.*

**Упражнения**

**1.** Доказать, что базисные элементы $v_1$, $v_2$, $v_3$ алгебры Кэли — Диксона удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(v_i v_j) v_k = \pm(v_1 v_2) v_3 + \varepsilon\, v_2 v_3,$$
$$v_i (v_j v_k) = \pm(v_1 v_2) v_3 + \varepsilon\, v_2 v_3,$$

где $(i, j, k)$ — произвольная перестановка символов 1, 2, 3; $\varepsilon = 0, \pm 1$. Если $F$ — поле характеристики $\neq 2$, то элементы $e_1 = v_1 - \frac{1}{2}$, $e_2 = v_2$, $e_3 = v_3$ удовлетворяют соотношениям

$$(e_i e_j) e_k = -e_i (e_j e_k) = (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} (e_1 e_2) e_3$$

для любой перестановки $\sigma = (i, j, k)$ символов 1, 2, 3.

В упражнениях 2—5 $A$ — альтернативная алгебра с единицей 1, содержащая систему матричных единиц Кэли — Диксона таких, что $e_{11} + e_{22} = 1$.

**2.** Доказать, что $A$ разлагается в прямую сумму подмодулей:

$$A = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22},$$

где $A_{ij} = \{a \in A \mid e_{ii} a = a e_{jj} = a\}$; при этом компоненты $A_{ij}$ связаны соотношениями

$$A_{ii}^2 \subseteq A_{ii}, \quad A_{ii} A_{jj} = 0,$$
$$A_{ii} A_{ij} + A_{ij} A_{jj} \subseteq A_{ij}, \quad A_{jj} A_{ij} = A_{ij} A_{ii} = 0,$$
$$A_{ij} A_{ij} \subseteq A_{ji}, \quad A_{ij} A_{ji} \subseteq A_{ii},$$

где $i \neq j$.

**3.** Доказать, что при $i \neq j$

$$A_{ij} = A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} + A_{ij}^{(3)},$$

где $A_{ij}^{(k)}=A_{ii}e_{ij}^{(k)}=e_{ij}^{(k)}A_{jj}$, $k=1, 2, 3$; при этом компоненты $A_{ij}^{(k)}$ связаны соотношениями

$$A_{ij}^{(k)}A_{ji}^{(k)}\subseteq A_{ii}, \qquad A_{ij}^{(k)}A_{ji}^{(l)}=0, \quad k\neq l,$$

$$A_{ij}^{(k)}A_{ij}^{(k)}=0, \qquad A_{ij}^{(k)}A_{ij}^{(k+1)}\subseteq A_{ji}^{(k+2)}, \qquad k \bmod 3.$$

4. Доказать, что кольцо $\Omega = A_{11}$ ассоциативно и коммутативно.

Указание. Доказать, что ассоциатор $(x_{11}, y_{11}, z_{11})$ аннулируется элементом $e_{12}^{(1)}$, а следовательно, и элементом $e_{12}^{(1)}e_{21}^{(1)} = e_{11}$; коммутатор же $[x_{11}, y_{11}]$ аннулируется элементом $e_{21}^{(3)}e_{21}^{(2)} = e_{12}^{(1)}$ и, следовательно, элементом $e_{12}^{(1)}e_{21}^{(1)} = e_{11}$.

Определим на $A$ «координатные функции» $\pi_{ij}^{(k)}$: $A \to \Omega$, полагая, что $\pi_{ij}^{(k)}$ на всех компонентах, кроме $A_{ij}^{(k)}$, равны нулю, а на $A_{ij}^{(k)}$ определены следующим образом:

$$\pi_{11}(a_{11})=a_{11}, \qquad \pi_{22}(a_{22})=e_{12}(a_{22}e_{21}),$$

$$\pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)})=a_{12}^{(k)}e_{21}^{(k)}, \qquad \pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)})=e_{12}^{(k)}a_{21}^{(k)}.$$

Далее, определим линейное отображение $\pi$: $A \to C(\Omega)$, полагая

$$\pi(a)=\sum_{i=1}^{2}\pi_{ii}(a)\,e_{ii}+\sum_{k=1}^{3}(\pi_{12}^{(k)}(a)\,e_{12}^{(k)}+\pi_{21}^{(k)}(a)\,e_{21}^{(k)}).$$

5. Доказать, что $\pi(ab) = \pi(a)\,\pi(b)$.

Указание. Достаточно рассмотреть случаи, когда элементы $a$ и $b$ лежат в компонентах $A_{ij}^{(k)}$. Предварительно доказать равенство $e_{12}(a_{22}e_{21}) = e_{12}^{(k)}(a_{22}e_{21}^{(k)})$, $k = 2, 3$.

6 (координатизационная теорема Цорна). Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей 1, содержащая систему матричных единиц Кэли — Диксона таких, что $e_{11} + e_{22} = 1$. Тогда $A$ есть матричная алгебра Кэли — Диксона над кольцом $\Omega = A_{11}$.

7. Пусть $C(\Phi)$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над ассоциативно-коммутативным кольцом $\Phi$. Тогда всякий односторонний идеал $B$ алгебры $C(\Phi)$ является двусторонним и имеет вид $C(\Lambda)$, где $\Lambda$ — идеал кольца $\Phi$, $\Lambda = B \cap \Phi\cdot 1$.

## ЛИТЕРАТУРА

Алберт [1, 8], Брак и Клейнфелд [24], Браун [25], Джекобсон [43, 45], [47, стр. 162—171], Диксон [53], Капланский [88], Линник [106], Маккриммон [118], Фрейденталь [239], Херстейн [250], Цорн [258], Шафер [261, стр. 44—50].

Квадратичные формы, удовлетворяющие более слабому условию композиции $n(x^2) = (n(x))^2$, изучал Гайнов [31—33].

В работах Шафера [260, 263] и Маккриммона [115, 119, 120] было введено понятие формы $n$-й степени, допускающей композицию, и теорема о квадратичных формах, допускающих композицию, была обобщена на формы $n$-й степени.

*ГЛАВА 3*

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

В этой главе Φ — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей 1, в котором разрешимо уравнение $2x = 1$. Решение этого уравнения (оно, как легко видеть, единственно) обозначается через $^1/_2$. Через $F$ обозначается произвольное поле характеристики $\neq 2$.

## 1. Определение и примеры йордановых алгебр

Алгебра называется *йордановой*, если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx,$$
$$(x^2y)\,x = x^2\,(yx).$$

Пусть $A$ — ассоциативная Φ-алгебра. Определим на аддитивном Φ-модуле алгебры $A$ новую операцию умножения $\odot$, связанную со старым умножением формулой

$$a \odot b = \frac{1}{2}\,(ab + ba).$$

После замены старого умножения на новое получается новая алгебра, которая обозначается через $A^{(+)}$. Легко проверить, что она йорданова. Если $J$—подмодуль алгебры $A$, замкнутый относительно операции $a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, то $J$ вместе с этой операцией является подалгеброй в $A^{(+)}$ и, следовательно, йордановой алгеброй. Такая йорданова алгебра $J$ называется *специальной*. Подалгебра $A_0$ алгебры $A$, порожденная множеством $J$, называется *ассоциативной обертывающей алгеброй* для $J$. Неспециальные йордановы алгебры называются также *исключи-*

*тельными*. Заметим, что для неассоциативной алгебры $A$ алгебра $A^{(+)}$ также может быть определена, однако она не всегда является йордановой.

Пусть $V$ — векторное пространство над полем $F$ с заданной на нем симметрической билинейной формой $f = f(x, y)$. Рассмотрим прямую сумму $B = F\cdot 1 + V$ векторного пространства $V$ и одномерного векторного пространства $F\cdot 1$ с базисом 1 и зададим на $B$ умножение следующим правилом:

$$(\alpha\cdot 1 + x)(\beta\cdot 1 + y) = (\alpha\beta + f(x, y))\cdot 1 + (\beta x + \alpha y),$$

где $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$. Сразу отметим, что элемент 1 является единицей алгебры $B$ и что, ввиду симметричности формы $f$, умножение в алгебре $B$ коммутативно. Пусть $a = \alpha\cdot 1 + x \in B$. Тогда $a^2 = (\alpha^2 + f(x, x))\cdot 1 + 2\alpha x = (\alpha^2 + f(x, x))\cdot 1 + 2\alpha a - 2\alpha^2\cdot 1 = (f(x, x) - \alpha^2)\cdot 1 + 2\alpha a$. Теперь тождество $(a^2b)a = a^2(ba)$ для алгебры $B$ есть следствие соотношений $(ab)a = a(ba)$ и $(1b)a = 1(ba)$, верных в любой коммутативной алгебре. Следовательно, алгебра $B$ йорданова. Она называется *йордановой алгеброй симметрической билинейной формы* $f$. Эта алгебра специальна (см. упражнение 1).

Пусть теперь $U$ — некоторая (не обязательно ассоциативная) алгебра и $*$ — ее инволюция. Множество $H(U, *) = \{u \in U \mid u = u^*\}$ симметричных относительно $*$ элементов замкнуто относительно операции $a \odot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ и является подалгеброй алгебры $U^{(+)}$. Если $U$ ассоциативна, то $U^{(+)}$ йорданова и $H(U, *)$ — специальная йорданова алгебра.

Пусть $D$ — композиционная алгебра с инволюцией $d \to \bar{d}$ и $D_n$ — алгебра матриц $n$-го порядка над $D$. Отображение $S$: $X \to \bar{X}^t$, где $\bar{X}^t$ — матрица, полученная из матрицы $X$ применением инволюции к каждому ее члену и транспонированием, является, как легко видеть, инволюцией алгебры $D_n$. Если $D$ ассоциативна, то $H(D_n, S)$ — специальная йорданова алгебра. Если же $D$ — алгебра Кэли — Диксона, то алгебра $H(D_n, S)$ будет йордановой только при $n \leqslant 3$, причем при $n = 3$ она будет исключительной. Доказательству этих двух утверждений и будет посвящена оставшаяся часть параграфа.

В дальнейшем для краткости алгебру $H(D_n, S)$ будем обозначать через $H(D_n)$.

Итак, пусть $C$ — алгебра Кэли — Диксона над полем $F$. Рассмотрим алгебру $H(C_3)$. Через $\varepsilon_{ij}$ мы будем обозначать матрицу из $C_3$, у которой на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, а все остальные элементы — нули. Элементы $\varepsilon_{ij}$ перемножаются по обычным формулам: $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{jk}\varepsilon_{il}$, где $\delta_{jk}$ — символ Кронекера. Элемент $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}$ является единицей алгебры $C_3$, и мы будем обозначать его через 1, так же как и единицу алгебры $C$. Отображение

$$c \mapsto \mathrm{diag}\,\{c, c, c\}$$

алгебры $C$ в $C_3$ есть мономорфизм. Диагональную матрицу, в которую переходит при этом мономорфизме элемент $c$, будем обозначать также через $c$. Тогда матрицу $X = (x_{ij})$ можно записать в виде $X = \sum x_{ij}\varepsilon_{ij}$. Легко проверить, что $(a\varepsilon_{ij})(b\varepsilon_{kl}) = \delta_{jk}(ab)\,\varepsilon_{il}$.

Лемма 1. *Пусть $A$ — произвольная алгебра и $a, b, c \in A$. Тогда если $(a, b, c)^+$ — ассоциатор элементов $a$, $b$ и $c$ в алгебре $A^{(+)}$, то*

$$4(a, b, c)^+ = (a, b, c) - (c, b, a) + (b, a, c) - \\ - (c, a, b) + (a, c, b) - (b, c, a) + [b, [a, c]]. \quad (1)$$

Доказательство состоит в раскрытии всех ассоциаторов и коммутаторов и сличении обеих частей равенства.

Лемма 2. *В произвольной альтернативной алгебре $A$ справедливо тождество*

$$[(a, b, c), d] = (ab, c, d) + (bc, a, d) + (ca, b, d). \quad (2)$$

Доказательство. Линеаризуем центральное тождество Муфанг (см. § 2.3). Получим

$$(ca)(bd) + (da)(bc) = [c(ab)]\,d + [d(ab)]\,c. \quad (3)$$

Теперь имеем

$$d(a, b, c) = d[(ab)c] - d[a(bc)] = \\ = -(d, ab, c) + [d(ab)]\,c - d[a(bc)] \overset{\text{по (3)}}{=} \\ = -(d, ab, c) + [d(ab)]\,c + (d, a, bc) - (da)(bc) =$$

$$= -(ab,\ c,\ d) - (bc,\ a,\ d) - [c\,(ab)]\,d + (ca)\,(bd) =$$
$$= -(ab,\ c,\ d) - (bc,\ a,\ d) + (c,\ a,\ b)\,d -$$
$$- [(ca)\,b]\,d + (ca)\,(bd) = -(ab,\ c,\ d) - (bc,\ a,\ d) +$$
$$+ (c,\ a,\ b)\,d - (ca,\ b,\ d),$$

что и требовалось доказать.

Напомним (см. доказательство леммы 2.8), что в алгебре Кэли — Диксона $C$ верны соотношения

$$(a,\ b,\ c) = -(\bar{a},\ b,\ c) = -(a,\ \bar{b},\ c) = -(a,\ b,\ \bar{c}), \quad (4)$$
$$\overline{(a,\ b,\ c)} = -(a,\ b,\ c). \quad (5)$$

Кроме того, так как $F$ — поле характеристики $\neq 2$, из равенства $\bar{a} = a$ следует $a = \frac{1}{2}\,t\,(a) \in F$. В частности, если $A = (a_{ij}) \in H\,(C_3)$, то $a_{ii} \in F$. Наконец, легко проверить, что для любых $a,\ b,\ c \in C$ в алгебре $C_3$ выполняется соотношение

$$(a\varepsilon_{ij},\ b\varepsilon_{kl},\ c\varepsilon_{pq}) = (a,\ b,\ c)\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{pq}. \quad (6)$$

Лемма 3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in H\,(C_3)$. *Тогда* $[A^2,\ A] = 2a$, *где* $a = (a_{12},\ a_{23},\ a_{31})$.

Доказательство. Согласно (6) и правилу перемножения матричных единиц мы имеем

$$[A^2,\ A] = (A,\ A,\ A) = \sum (a_{ij},\ a_{jk},\ a_{kl})\,\varepsilon_{il}.$$

Если $i = j$, $j = k$ или $k = l$, то $(a_{ij},\ a_{jk},\ a_{kl}) = 0$, так как один из элементов ассоциатора в этом случае лежит в $F$. Если $i = k$, то $a_{jk} = \bar{a}_{ij}$ и $(a_{ij},\ \bar{a}_{ij},\ a_{kl}) = -(a_{ij},\ a_{ij},\ a_{kl}) = 0$. Аналогично, если $j = l$, то $(a_{ij},\ a_{jk},\ a_{kl}) = 0$. Так как индекса всего три, то ассоциатор $(a_{ij},\ a_{jk},\ a_{kl})$ может быть ненулевым лишь в случае, когда $i$, $j$ и $k$ все различны и $i = l$. Следовательно, $[A^2,\ A] = \sum_{i,j,k\neq} (a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ki})\,\varepsilon_{ii}$. Далее, имеем $(a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ki}) = (a_{jk},\ a_{ki},\ a_{ij})$ и $(a_{ik},\ a_{kj},\ a_{ji}) = (\bar{a}_{ki},\ \bar{a}_{jk},\ \bar{a}_{ij}) = -(a_{ki},\ a_{jk},\ a_{ij}) = (a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ki})$. Следовательно, $(a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ki}) = (a_{12},\ a_{23},\ a_{31}) = a$ и $[A^2,\ A] = 2a\,(\sum \varepsilon_{ii}) = 2a$. Лемма доказана.

Теорема 1. *$H\,(C_3)$ — йорданова алгебра.*

Доказательство (Маккриммон). Так как коммутативность алгебры $H\,(C_3)$ очевидна, мы должны

только проверить, что $(A^2 \odot B) \odot A = A^2 \odot (B \odot A)$ для любых двух матриц $A$, $B \in H(\mathbf{C}_3)$. Это эквивалентно тому, что $(A, B, C)^+ = 0$ для $C = A^2$. Достаточно показать, что коэффициенты при $\varepsilon_{11}$ и $\varepsilon_{12}$ у элемента $(A, B, C)^+$ являются нулями; те же доказательства с заменой одних индексов на другие будут годиться и для других коэффициентов. Ввиду (1), (2), (6) и леммы 3 коэффициент элемента $(A, B, C)^+$ при $\varepsilon_{11}$ есть сумма ассоциаторов и согласно (5) является кососимметричным. Однако $(A, B, C)^+ \in H(\mathbf{C}_3)$, и его коэффициент при $\varepsilon_{11}$ должен быть симметричен. Следовательно, он равен нулю. Рассмотрим коэффициент при $\varepsilon_{12}$ элемента $(A, B, C)^+$. Так как ассоциатор $(A, B, C)^+$ линеен по $B$, достаточно показать, что коэффициент при $\varepsilon_{12}$ равен нулю в следующих четырех случаях: $B = b_{ii}\varepsilon_{ii}$, $B = b_{13}\varepsilon_{13} + b_{31}\varepsilon_{31}$, $B = b_{23}\varepsilon_{23} + b_{32}\varepsilon_{32}$, $B = b_{12}\varepsilon_{12} + b_{21}\varepsilon_{21}$, где $b_{ij} = \overline{b}_{ji}$. В первом случае $b_{ii} \in F \cdot 1$, поэтому ввиду (1) коэффициент при $\varepsilon_{12}$ равен нулю. Если $B = b_{13}\varepsilon_{13} + b_{31}\varepsilon_{31}$, то коэффициент при $\varepsilon_{12}$ у элемента $(A, B, C)$ ввиду (6) равен $\sum_{k,l} (a_{1k}, b_{kl}, c_{l2}) = (a_{11}, b_{13}, c_{32}) + (a_{13}, b_{31}, c_{12}) = (a_{13}, b_{31}, c_{12})$. Аналогично, коэффициенты при $\varepsilon_{12}$ элементов $-(C, B, A)$, $(B, A, C)$, $-(C, A, B)$, $(A, C, B)$, $-(B, C, A)$ соответственно равны: $-(c_{13}, b_{31}, a_{12})$, $(b_{13}, a_{31}, c_{12})$, 0, 0, $-(b_{13}, c_{31}, a_{12})$. Коэффициент при $\varepsilon_{12}$ элемента $[B, [A, C]] = -2[b_{13}\varepsilon_{13} + b_{31}\varepsilon_{31}, a]$ равен нулю. Суммируя, получаем, что коэффициент при $\varepsilon_{12}$ элемента $4(A, B, C)^+$ равен

$$(a_{13}, b_{31}, c_{12}) - (c_{13}, b_{31}, a_{12}) + (b_{13}, a_{31}, c_{12}) - (b_{13}, c_{31}, a_{12}) = \\ = (a_{13}, b_{31}, c_{12}) + (\overline{b}_{31}, \overline{a}_{13}, c_{12}) - \\ - (c_{13}, b_{31}, a_{12}) - (\overline{b}_{31}, \overline{c}_{13}, a_{12}).$$

Это выражение равно нулю в силу (4) и кососимметричности ассоциатора. Аналогичные аргументы пригодны и в случае, если $B = b_{23}\varepsilon_{23} + b_{32}\varepsilon_{32}$. Пусть теперь $B = b_{12}\varepsilon_{12} + b_{21}\varepsilon_{21}$. Используя (1), мы находим коэффициент при $\varepsilon_{12}$ элемента $4(A, B, C)^+$; он равен

$$(a_{12}, b_{21}, c_{12}) - (c_{12}, b_{21}, a_{12}) + (b_{12}, a_{21}, c_{12}) + (b_{12}, a_{23}, c_{32}) - \\ - (c_{12}, a_{21}, b_{12}) - (c_{13}, a_{31}, b_{12}) + (a_{12}, c_{21}, b_{12}) + \\ + (a_{13}, c_{31}, b_{12}) - (b_{12}, c_{21}, a_{12}) - (b_{12}, c_{23}, a_{32}) - 2[b_{12}, a].$$

В силу (4) и кососимметричности ассоциатора его можно записать так:

$$-2\,(c_{32},\ a_{23},\ b_{12}) - 2\,(c_{21},\ a_{12},\ b_{12}) - \\ -2\,(c_{13},\ a_{31},\ b_{12}) - 2\,[b_{12},\ (a_{12},\ a_{23},\ a_{31})]. \quad (7)$$

Теперь $c_{ij} = \sum a_{ik}a_{kj}$, поэтому $(c_{ij},\ a_{ji},\ b_{12}) = (a_{ii}a_{ij},\ a_{ji},\ b_{12}) + (a_{ij}a_{jj},\ a_{ji},\ b_{12}) + (a_{ik}a_{kj},\ a_{ji},\ b_{12})$, где $i$, $j$, $k$ различны. Так как $a_{ii} \in F\cdot 1$, то согласно (4) $(a_{ii}a_{ij},\ a_{ji},\ b_{12}) = a_{ii}\,(a_{ij},\ a_{ji},\ b_{12}) = a_{ii}\,(a_{ij},\ \bar{a}_{ij},\ b_{12}) = 0$. Аналогично, $(a_{ij}a_{jj},\ a_{ji},\ b_{12}) = 0$. Следовательно, (7) приобретает вид

$$-2\,(a_{31}a_{12},\ a_{23},\ b_{12}) - 2\,(a_{23}a_{31},\ a_{12},\ b_{12}) - \\ -2\,(a_{12}a_{23},\ a_{31},\ b_{12}) - 2\,[b_{12},\ (a_{12},\ a_{23},\ a_{31})].$$

Однако это выражение равно нулю в силу (2).

Теорема доказана.

Нам будет удобно теперь ввести следующие обозначения для элементов алгебры $H\,(C_3)$:

$$x_{ii} = x\varepsilon_{ii}, \qquad x = \alpha\cdot 1, \qquad \alpha \in F,$$
$$x_{ij} = x\varepsilon_{ij} + \bar{x}\varepsilon_{ji}, \qquad x \in C, \qquad i \neq j,$$
$$e_{ii} = \varepsilon_{ii}, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}, \qquad i \neq j.$$

Теорема 2 (Алберт). *$H\,(C_3)$ — исключительная алгебра.*

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что существует ассоциативная алгебра $A$ такая, что $H\,(C_3)$ является подалгеброй алгебры $A^{(+)}$. Умножение в алгебре $C$ будем обозначать точкой $\cdot$, умножение в алгебре $H\,(C_3)$ — кружком с точкой внутри $\odot$; умножая элементы в алгебре $A$, не будем ставить между ними ничего.

Пусть $X,\,Y \in H\,(C_3)$. Тогда $X \odot Y = {}^1/_2\,(XY + YX)$. Это соотношение связывает умножение в $A$ с умножением в $H\,(C_3)$ и, в конечном итоге, с умножением в $C$. Используя его, найдем в $A$ подалгебру, изоморфную алгебре Кэли — Диксона $C$. Ввиду неассоциативности алгебры $C$ теорема будет доказана.

Отыщем в алгебре $A$ нужные соотношения:

$$e_{ii}^2 = e_{ii},\ e_{ij}^2 = e_{ii} + e_{jj}, \tag{8}$$

$$e_{ii}x_{ij} + x_{ij}e_{ii} = e_{jj}x_{ij} + x_{ij}e_{jj} = x_{ij}, \tag{9}$$

$$e_{kk}x_{ij} + x_{ij}e_{kk} = 0,\ k \neq i,\ j; \tag{10}$$

$$x_{12}y_{23} + y_{23}x_{12} = (x \cdot y)_{13}. \tag{11}$$

Соотношения (8) — (10) очевидны. Докажем равенство (11). Имеем

$$x_{12}y_{23} + y_{23}x_{12} = 2x_{12} \odot y_{23} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & \bar{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \cdot y \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x \cdot y)_{13}.$$

Аналогично получаем соотношения

$$x_{12}y_{13} + y_{13}x_{12} = (\bar{x} \cdot y)_{23}, \tag{12}$$

$$x_{13}y_{23} + y_{23}x_{13} = (x \cdot \bar{y})_{12}. \tag{13}$$

В силу (10) для $k \neq i,\ j$ имеем

$$0 = e_{kk}(e_{kk}x_{ij} + x_{ij}e_{kk}) = e_{kk}x_{ij} + e_{kk}x_{ij}e_{kk},$$

однако в силу (8) и (10)

$$2e_{kk}x_{ij}e_{kk} = (e_{kk}x_{ij} + x_{ij}e_{kk})\,e_{kk} + \\ + e_{kk}(e_{kk}x_{ij} + x_{ij}e_{kk}) - (e_{kk}^2x_{ij} + x_{ij}e_{kk}^2) = 0,$$

и поэтому

$$e_{kk}x_{ij} = x_{ij}e_{kk} = 0,\ k \neq i,\ j. \tag{14}$$

Отобразим теперь $C$ в $A$ следующим образом:

$$\sigma\colon\ x \mapsto e_{11}x_{12}e_{12}.$$

Ясно, что это отображение — гомоморфизм векторных пространств. Покажем, что $(x \cdot y)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$. В силу (13) и (14) имеем

$$(x \cdot y)^\sigma = e_{11}(x \cdot y)_{12}e_{12} = e_{11}(x_{13}\bar{y}_{23} + \bar{y}_{23}x_{13})\,e_{12} = e_{11}x_{13}\bar{y}_{23}e_{12}.$$

Преобразуем полученное выражение с помощью (11) и (14):

$$e_{11}x_{13}\bar{y}_{23}e_{12} = e_{11}(x_{12}e_{23} + e_{23}x_{12})\,\bar{y}_{23}e_{12} = e_{11}x_{12}e_{23}\bar{y}_{23}e_{12},$$

а затем с помощью (12):

$$e_{11}x_{12}e_{23}\bar{y}_{23}e_{12} = e_{11}x_{12}e_{23}\,(y_{12}e_{13} + e_{13}y_{12})\,e_{12} = \\ = e_{11}x_{12}e_{23}e_{13}y_{12}e_{12},$$

так как в силу (9) и (14) $y_{12}e_{13}e_{12} = y_{12}\,(e_{33}e_{13} + e_{13}e_{33})\,e_{12} = 0$. Итак,

$$(x\cdot y)^\sigma = e_{11}x_{12}e_{23}e_{13}y_{12}e_{12}. \qquad (15)$$

Однако в силу (9), (13) и (14) $e_{23}e_{13}y_{12} = e_{23}\,(e_{11}e_{13} + e_{13}e_{11})\;y_{12} = e_{23}e_{13}e_{11}y_{12} = (e_{12} - e_{13}e_{23})\,e_{11}y_{12} = e_{12}e_{11}y_{12}$, и поэтому из (15) вытекает, что

$$(x\cdot y)^\sigma = e_{11}x_{12}e_{12}e_{11}y_{12}e_{12} = x^\sigma y^\sigma,$$

что доказывает гомоморфность введенного отображения. Однако алгебра Кэли — Диксона по лемме 2.3 проста, поэтому наш гомоморфизм есть либо изоморфизм, либо отображает алгебру $C$ в нуль. Но последнее неверно: в силу (8) и (14)

$$1^\sigma = e_{11}e_{12}e_{12} = e_{11}\,(e_{11} + e_{22}) = e_{11} \neq 0.$$

Мы получили противоречие, так как алгебра $C$ неассоциативна и ее нельзя изоморфно отобразить в ассоциативную алгебру. Теорема доказана.

**Упражнения**

**1.** Пусть $B\,(f) = F\cdot 1 + M$ — йорданова алгебра симметрической билинейной формы $f\colon M \times M \to F$. Доказать, что алгебра Клиффорда $C\,(f)$ формы $f$ (см. Ленг С., Алгебра, стр. 411) является ассоциативной обертывающей алгеброй для $B\,(f)$.

**2.** Доказать, что если форма $f$ невырождена и $\dim_F M > 1$, то йорданова алгебра $B\,(f) = F\cdot 1 + M$ проста.

**3.** Доказать, что алгебра $C^{(+)}$ для алгебры Кэли — Диксона $C$ изоморфна йордановой алгебре симметрической невырожденной билинейной формы.

**4.** Доказать, что для любых элементов $a$, $b$, $c$ ассоциативной Φ-алгебры имеет место равенство

$$^1/_2\,(abc + cba) = (a \odot b) \odot c + (b \odot c) \odot a - (c \odot a) \odot b. \qquad (16)$$

**5** (Маккриммон). Пусть $A$ — ассоциативная Φ-алгебра и $J$ — идеал алгебры $A^{(+)}$. Тогда $A^{\#}b^2A^{\#} \subseteq J$ для любого $b \in J$; если же $b^2 = 0$ для всех $b \in J$, то $(A^{\#}bA^{\#})^3 = (0)$ для любого $b \in J$.

**6** (Херстейн). Если $A$ — простая ассоциативная Φ-алгебра, то и алгебра $A^{(+)}$ проста.

**7** (Маккриммон). Пусть $A$ — ассоциативная Φ-алгебра с инволюцией $*$ и $J$ — идеал в $H\,(A, *)$. Тогда, если $bcb \neq 0$

для некоторых $b, c \in J$, то для идеала $B = A^{\#}bcA^{\#}$ алгебры $A$ имеет место включение $B \cap H(A, *) \subseteq J$; если же $bcb = 0$ для всех $b, c \in J$, то $A$ содержит ненулевой нильпотентный идеал.

Набросок доказательства. Доказать, что для любых $x, y \in A$

$$xbcbx^* \in J, \quad xbcby^* + ybcbx^* \in J.$$

Отсюда следует первая часть утверждения. В случае, когда $bcb = 0$ для всех $b, c \in J$, предположить сначала, что $bhb \neq 0$ для некоторых $b \in J$, $h \in H(A, *)$, и доказать, что для любого $x \in A$

$$xbhb + bhbx^* \in J.$$

Отсюда $(xbhb + bhbx^*)^3 = 0$ и $0 = xbhb\,(xbhb + bhbx^*)^3 = (xbhb)^4$, т. е. левый идеал $I = A^{\#}bhb$ есть ниль-алгебра ограниченного индекса. В силу хорошо известного результата теории ассоциативных PI-колец (см., например, [46, стр. 335] это влечет наличие в $I$ нильпотентного идеала. Теперь нетрудно обнаружить такой идеал и в $A$. Если же $bhb = 0$ для всех $h \in H(A, *)$, то доказать, что левый идеал $A^{\#}b$ удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$, что тоже влечет существование в $A$ нильпотентного идеала.

8 (Херстейн). Если $A$ —ассоциативная Ф-алгебра с инволюцией $*$, не содержащая собственных *$*$-идеалов* (т. е. таких идеалов $I$, что $I^* \subseteq I$), то йорданова алгебра $H(A, *)$ проста.

**9.** Йорданова алгебра $H(D_n)$, где $D$ — ассоциативная композиционная алгебра, проста.

**10.** Доказать, что $H(C_3)$ — простая алгебра.

**11.** Доказать, что алгебра $H(C_2)$ изоморфна йордановой алгебре симметрической билинейной невырожденной формы и поэтому является простой и специальной.

**12.** Пусть $u = v_1$, $v = v_2$, $w = v_3$ — порождающие алгебры Кэли — Диксона $C$ (см. § 2.4). Докажите, что элементы $X = e_{12}$, $Y = e_{23}$, $Z = u_{12} + v_{13} + w_{23}$ порождают алгебру $H(C_3)$.

**13.** Доказать, что алгебра $H(C_n)$ не является йордановой при $n \geqslant 4$.

## § 2. Свободные специальные йордановы алгебры

Рассмотрим свободную ассоциативную Ф-алгебру $\mathrm{Ass}[X]$ от множества свободных порождающих $X = \{x_\alpha\}$. Подалгебру алгебры $\mathrm{Ass}[X]^{(+)}$, порожденную множеством $X$, назовем *свободной специальной йордановой алгеброй от множества свободных порождающих* $X$ и обозначим $\mathrm{SJ}[X]$. Как мы увидим в конце параграфа, специальные йордановы алгебры не образуют многообразия, так как при $\mathrm{card}(X) \geqslant 3$ существуют гомоморфные образы алгебры $\mathrm{SJ}[X]$, являющиеся исключительными алгебрами. Однако все специальные йордановы алгебры от множества порождающих мощности $\lambda$ являются гомо-

морфными образами алгебры SJ $[X]$ при card $(X)=\lambda$. В этом смысле мы и говорим о свободе алгебр SJ $[X]$.

Предложение 1. *Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра. Тогда всякое отображение $X$ в $J$ единственным образом продолжается до гомоморфизма* SJ $[X]$ *в* $J$.

Доказательство. Пусть $\sigma\colon X\to J$ — некоторое отображение и $A$ — ассоциативная обертывающая алгебра для $J$. Тогда отображение $\sigma$ продолжается до гомоморфизма $\bar\sigma\colon$ Ass $[X]\to A$. Ясно теперь, что ограничение $\bar\sigma$ на SJ $[X]$ есть гомоморфизм SJ $[X]$ в $J$, продолжающий $\sigma$. Предложение доказано.

Элемент свободной ассоциативной алгебры Ass $[X]$ называется *йордановым многочленом* (*j-многочленом*), если он принадлежит SJ $[X]$, т. е. выражается через элементы множества $X$ при помощи операций $+$ и $\odot$. Например, многочлены $x_1x_2x_1$ и $x_1x_2x_3+x_3x_2x_1$ являются $j$-многочленами в силу (16). До сих пор неизвестно ни одного удобного критерия, позволяющего по записи многочлена из Ass $[X]$ узнавать, является ли он $j$-многочленом или нет. Для card $(X)\leqslant 3$ такой критерий дает теорема Кона, которая будет сформулирована ниже.

Свяжем со свободной ассоциативной алгеброй Ass $[X]$ еще одну йорданову алгебру. Для этого определим на Ass $[X]$ инволюцию $*$, которая на одночленах задается правилом

$$(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k})^*=x_{i_k}\ldots x_{i_2}x_{i_1}$$

и на многочлены распространяется по линейности: если $f=\sum\alpha_su_s$, где $\alpha_s\in\Phi$, $u_s$ — одночлены, то $f^*=\sum\alpha_su_s^*$. Через H $[X]$ обозначим йорданову алгебру $H$ (Ass $[X]$, $*$) симметричных элементов алгебры Ass $[X]$ относительно $*$.

Теорема 3 (Кон). *Для любого множества $X$ справедливо включение* H $[X]\supseteq$ SJ $[X]$, *причем при* card $(X)\leqslant 3$ *имеет место равенство, а при* card $(X)>3$ — *строгое включение*.

Доказательство. Порождающие $x_\alpha\in X$ симметричны относительно $*$ и лежат в H $[X]$. Кроме того, если $a$, $b\in$ H $[X]$, то и $a\odot b\in$ H $[X]$, так как $(a\odot b)^*={}^1/_2\,[(ab)^*+(ba)^*]={}^1/_2\,(b^*a^*+a^*b^*)={}^1/_2\,(ab+ba)=a\odot b$. Поэтому H $[X]\supseteq$ SJ $[X]$.

Пусть card $(X) = 3$, т. е. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для доказательства того, что $\mathrm{H}[X] = \mathrm{SJ}[X]$, достаточно показать, что элементы из $\mathrm{H}[X]$ вида $u + u^*$, где $u$ — одночлен, являются $j$-многочленами. В самом деле, если $f = \sum u_i$ симметричен относительно $*$, то $f = {}^1/_2\,(f + f^*) = {}^1/_2 \sum (u_i + u_i^*)$.

Пусть $u = x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \ldots x_{i_h}^{l_h}$, причем $i_r \neq i_{r+1}$ для $r = 1, 2, \ldots, h-1$. Число $h$ назовем *высотой* одночлена $u$.

Доказательство того, что $u + u^* \in \mathrm{SJ}[X]$, мы проведем двойной индукцией. Первая индукция — по длине одночлена $u$; основание ее очевидно. Пусть для одночленов длины $< k$ утверждение доказано. Рассмотрим множество одночленов длины $k$. Среди них всего три одночлена высоты 1 — это $x_1^k$, $x_2^k$ и $x_3^k$. Для них наше утверждение очевидно, и мы имеем основание для второй индукции. Предположим, что для всех одночленов длины $k$ и высоты $< h$ утверждение справедливо. Допустим, что одночлен $u$ имеет длину $k$ и высоту $h$. Рассмотрим сначала случай, когда одночлен $u$ начинается и кончается на один и тот же порождающий элемент, а именно $u = a^p v a^q$, где $a \in \{x_1, x_2, x_3\}$, $v$ — одночлен. В этом случае

$$u + u^* = a^p v a^q + a^q v^* a^p =$$
$$= a^p (v a^q + a^q v^*) + (a^q v^* + v a^q)\, a^p - (a^{p+q} v^* + v a^{p+q}).$$

Заметим, что сумма первых двух слагаемых является $j$-многочленом в силу первого индуктивного предположения, а последнее — в силу второго, так как одночлен $a^{p+q} v^*$ имеет высоту $h - 1$.

Второй случай, который надо рассмотреть,— следующий: $u = a^p b^r a^q v$, где $a, b \in \{x_1, x_2, x_3\}$, $a \neq b$ и $v$ — одночлен. Имеем

$$u + u^* = a^p b^r a^q v + v^* a^q b^r a^p =$$
$$= a^p b^r (a^q v + v^* a^q) + (v^* a^q + a^q v)\, b^r a^p - (a^p b^r v^* a^q + a^q v b^r a^p),$$

и сумма первых двух слагаемых есть йорданов многочлен ввиду (16), а в последней скобке имеем первый случай.

Третий случай: $u = a^p v a^q b^r$, где $a, b \in \{x_1, x_2, x_3\}$, $a \neq b$ и $v$ — одночлен. В этом случае

$$u + u^* = a^p v a^q b^r + b^r a^q v^* a^p =$$
$$= a^p (v a^q + a^q v^*)\, b^r + b^r (a^q v^* + v a^q)\, a^p - (a^{p+q} v^* b^r + b^r v a^{p+q}).$$

Ввиду (16) и первого индуктивного предположения сумма первых двух членов есть $j$-многочлен, а вычитаемая скобка находится в условиях второго индуктивного предположения.

Четвертый случай. Осталось рассмотреть для одночлена $u$ лишь две возможности: $u = a^p b^r c^s$ и $u = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s$, где $v$ — одночлен, возможно, отсутствующий, $a, b, c \in \{x_1, x_2, x_3\}$ и попарно различны. Если $u = a^p b^r c^s$, то в силу (16) $u + u^* = a^p b^r c^s + c^s b^r a^p \in \mathrm{SJ}[X]$. Пусть теперь $u = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s$. Тогда

$$u + u^* = a^p c^q b^t v a^l c^r b^s + b^s c^r a^l v^* b^t c^q a^p =$$
$$= a^p (c^q b^t v a^l c^r + c^r a^l v^* b^t c^q)\, b^s +$$
$$+ b^s (c^r a^l v^* b^t c^q + c^q b^t v a^l c^r)\, a^p - (a^p c^r a^l v^* b^t c^q b^s + b^s c^q b^t v a^l c^r a^p).$$

Сумма первых двух членов является $j$-многочленом ввиду (16) и первого индуктивного предположения, а третий член — также $j$-многочлен согласно уже разобранному второму случаю.

Итак, равенство $\mathrm{H}[X] = \mathrm{SJ}[X]$ в случае, когда $\mathrm{card}(X) = 3$, доказано. Отсюда, конечно, следует справедливость этого равенства и при $\mathrm{card}(X) = 2$. Доказательство, приведенное нами, принадлежит Ширшову. Оно конструктивно и дает алгоритм, позволяющий по записи симметричного многочлена от трех переменных найти его представление в виде $j$-многочлена.

Докажем, что $\mathrm{H}[X] \neq \mathrm{SJ}[X]$ при $\mathrm{card}(X) > 3$. Для этого достаточно показать, что элемент $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 + x_4 x_3 x_2 x_1$ не является йордановым многочленом от $x_1, x_2, x_3, x_4$.

Рассмотрим свободный Ф-модуль $E$ от порождающих $e_1, e_2, e_3, e_4$ и внешнюю алгебру $\bigwedge(E)$ этого модуля. (Ее определение и свойства см. в книге Ленга С., Алгебра, «Мир», 1968, стр. 474.) Ф-модуль алгебры $\bigwedge(E)$ также свободен с базисом $\{1, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s};\ i_1 < \ldots < i_s;\ s = 1, 2, 3, 4\}$ и, кроме того, $e_i \odot e_j = 0$ в $\bigwedge(E)$. Пусть $\sigma$: $\mathrm{Ass}[X] \to \bigwedge(E)$ — гомоморфизм такой, что $\sigma(x_i) = e_i$: $i = 1, 2, 3, 4$, и $\sigma(x_i) = 0$, $i > 4$. Все йордановы многочлены при этом гомоморфизме переходят в нуль, однако $\sigma[f(x_1, x_2, x_3, x_4)] = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Значит,

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не есть йорданов многочлен, и теорема полностью доказана.

Замечание. Если уравнение $2x = 1$ неразрешимо в Φ, операция $\odot$ не может быть определена. В этом случае йордановыми многочленами свободной ассоциативной алгебры Ass $[X]$ называют элементы, которые можно получить из элементов множества $X$ при помощи операций сложения, возведения в квадрат и квадратичного умножения $\{xyx\} = xyx$. Если $^1/_2 \in \Phi$, то, как нетрудно видеть, это определение дает нам обычные йордановы многочлены. Проследив доказательство теоремы Кона, можно заметить, что для множества SJ $[X]$ йордановых многочленов в новом смысле равенство H $[X]$ = SJ $[X]$ верно при card $(X) \leqslant 3$ для любого кольца операторов Φ.

Теорема 4. *Если* card $(X) > 1$, *то свободная йорданова алгебра* SJ $[X]$ *не изоморфна алгебре* $A^{(+)}$ *ни для какой ассоциативной алгебры* $A$.

Доказательство. Допустим, что SJ $[X]$ изоморфна алгебре $A^{(+)}$, где $A$ — ассоциативная алгебра. Мы можем тогда считать, что на множестве SJ $[X]$ задана дистрибутивная со сложением ассоциативная операция (обозначаемая точкой) такая, что для любых $a, b \in$ SJ $[X]$

$$a \odot b = {}^1/_2\,(a \cdot b + b \cdot a) \qquad (17)$$

и что $A = \langle \mathrm{SJ}\,[X], +, \cdot \rangle$. В силу (17) множество $X$ есть множество порождающих и для $A$. Пусть $\sigma$: Ass $[X] \to A$ — гомоморфизм такой, что $x_\alpha^\sigma = x_\alpha$ для всех $x_\alpha \in X$. Рассмотрим ядро $I$ этого гомоморфизма. В силу (17) ограничение $\sigma$ на SJ $[X]$ является тождественным отображением. Поэтому

$$I \cap \mathrm{SJ}\,[X] = (0). \qquad (18)$$

Кроме того, для любого $f(x) \in$ Ass $[X]$ найдется $j(x) \in$ SJ $[X]$ такой, что $f(x) - j(x) \in I$. В частности, это верно для многочлена $f(x) = x_1x_2$. Но тогда в силу (16)

$$[x_1x_2 - j(x)]\,[x_2x_1 - j(x)] =$$
$$= x_1x_2^2x_1 - x_1x_2j(x) - j(x)\,x_2x_1 + j(x)^2 \in I \cap \mathrm{SJ}\,[X].$$

Значит, в силу (18) $[x_1x_2 - j(x)]\,[x_2x_1 - j(x)] = 0$, и получаем, что либо $j(x) = x_1x_2$, либо $j(x) = x_2x_1$. Но ни того, ни другого быть не может. Теорема доказана.

Переходим к изучению гомоморфных образов свободных специальных йордановых алгебр.

Лемма 4. *Пусть $I$ — идеал специальной йордановой алгебры $J$ с ассоциативной обертывающей алгеброй $A$ и $\hat{I}$ — идеал алгебры $A$, порожденный множеством $I$, причем*

$$\hat{I} \cap J = I.$$

*Тогда фактор-алгебра $J/I$ специальна.*

Доказательство. Отметим сначала один очевидный изоморфизм: для любого идеала $B$ алгебры $A$

$$(A/B)^{(+)} \cong A^{(+)}/B^{(+)}.$$

Теперь по второй теореме о гомоморфизмах

$$J/I = J/J \cap \hat{I}^{(+)} \cong J + \hat{I}^{(+)}/\hat{I}^{(+)} \subseteq A^{(+)}/\hat{I}^{(+)},$$

что в силу предыдущего замечания дает нам специальность алгебры $J/I$.

Лемма 5 (Кон). *Пусть $I$ — идеал свободной специальной йордановой алгебры* SJ $[X]$ *и $\hat{I}$ — идеал в* Ass $[X]$, *порожденный множеством $I$. Фактор-алгебра* SJ $[X]/I$ *специальна тогда и только тогда, когда $\hat{I} \cap$* SJ $[X] = I$.

Доказательство. Если условие $\hat{I} \cap$SJ $[X] = I$ выполнено, то фактор-алгебра SJ $[X]/I$ специальна в силу леммы 4.

Допустим теперь, что фактор-алгебра SJ $[X]/I$ специальна и $A$ — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Обозначим через $\tau$ канонической гомоморфизм алгебры SJ $[X]$ на SJ $[X]/I$. Алгебра $A$ порождается элементами $a_\alpha = \tau(x_\alpha)$, где $x_\alpha \in X$. Пусть $\sigma$ — гомоморфизм алгебры Ass $[X]$ на $A$ такой, что $\sigma(x_\alpha) = a_\alpha$. Тогда ограничение $\sigma$ на SJ $[X]$ есть гомоморфизм SJ $[X]$ в SJ $[X]/I$, совпадающий с $\tau$ на порождающих и, следовательно, равный $\tau$. Но тогда Ker $\sigma \cap$ SJ $[X]$ = Ker $\tau$. Заметим теперь, что $\hat{I} \subseteq$ Ker $\sigma$ и Ker $\tau = I$. Следовательно, $\hat{I} \cap$ SJ $[X] \subseteq I$ и, ввиду очевидности обратного включения, имеем $\hat{I} \cap$ $\cap$ SJ $[X] = I$. Теорема доказана.

Теорема 5 (Кон). *Пусть* SJ $[x, y, z]$ — *свободная специальная йорданова алгебра от порождающих $x$, $y$, $z$ и $I$ — ее идеал, порожденный элементом $k = x^2 - y^2$. Тогда фактор-алгебра* SJ $[x, y, z]/I$ *исключительна.*

Доказательство. Элемент $v = kxyz + zyxk$ лежит в $\hat{I} \cap \mathrm{SJ}[x, y, z]$, где $\hat{I}$ — идеал алгебры $\mathrm{Ass}[x, y, z]$, порожденный множеством $I$. Покажем, что $v \notin I$, и все будет доказано в силу леммы 5. Допустим, что $v \in I$. Тогда существует йорданов многочлен $j(x, y, z, t)$, каждый одночлен которого содержит $t$ такой, что $v = j(x, y, z, k)$. Ясно, что мы можем считать, что все одночлены в $j(x, y, z, t)$ имеют степень 4 и линейны по $z$. Сравнивая степени элементов $v$ и $j(x, y, z, x^2 - y^2)$ по отдельным переменным, заключаем, что $j(x, y, z, t)$ линеен по $t$ и, следовательно, по остальным переменным тоже. Многочлен $j(x, y, z, t)$ симметричен и лежит в $\mathrm{H}[x, y, z, t]$. Поэтому он является линейной комбинацией 24 четверок вида $\{xyzt\} = xyzt + tzyx$ по всем перестановкам элементов $x, y, z, t$. Однако вид элемента $v$ говорит о том, что в этой линейной комбинации ненулевые коэффициенты могут быть лишь у тех четверок, на конце (или в начале) которых находится $z$:

$$j(x, y, z, t) = \alpha_1\{txyz\} + \alpha_2\{xtyz\} + \alpha_3\{tyxz\} + \alpha_4\{ytxz\} + \alpha_5\{xytz\} + \alpha_6\{yxtz\}.$$

Заменяя в этом равенстве $t$ на $x^2 - y^2$, получаем соотношение

$$\{x^3yz\} - \{y^2xyz\} = \alpha_1\{x^3yz\} - \alpha_1\{y^2xyz\} + \alpha_2\{x^3yz\} - \alpha_2\{xy^3z\} + \alpha_3\{x^2yxz\} - \alpha_3\{y^3xz\} + \alpha_4\{yx^3z\} - \alpha_4\{y^3xz\} + \alpha_5\{xyx^2z\} - \alpha_5\{xy^3z\} + \alpha_6\{yx^3z\} - \alpha_6\{yxy^2z\}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\{y^2xyz\}$, заключаем, что $\alpha_1 = 1$. Затем сравним коэффициенты при $\{x^3yz\}$ и получим $\alpha_2 = 0$. Сравнение коэффициентов при $\{x^2yxz\}$ дает нам $\alpha_3 = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_4 = 0$, как коэффициент при $\{y^3xz\}$. Далее, сравнивая коэффициенты при $\{xyx^2z\}$ и $\{yxy^2z\}$, получаем, что $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Но это значит, что

$$j(x, y, z, t) = \{xyzt\}.$$

Однако, как мы видели в доказательстве теоремы 3, $\{xyzt\}$ не есть йорданов многочлен. Теорема доказана.

Теорема 6. *Все гомоморфные образы свободной специальной йордановой алгебры* $\mathrm{SJ}[x, y]$ *от двух порождающих специальны.*

Доказательство. Пусть $I$ — произвольный идеал алгебры SJ $[x, y]$ и $\hat{I}$ — идеал в Ass $[x, y]$, порожденный множеством $I$. В силу леммы 5 достаточно показать, что $\hat{I} \cap \mathrm{SJ}[x, y] = I$. Пусть $u \in \hat{I}$. Тогда $u = \sum v_i k_i w_i$, где $k_i \in I$, $v_i$ и $w_i$ — одночлены. Допустим, что $u \in \mathrm{SJ}[x, y]$. Для доказательства того, что $u \in I$, достаточно показать справедливость включения $vkw + w^*kv^* \in I$ для всех $k \in I$ и любых одночленов $v$, $w$. Но это включение действительно справедливо, так как по теореме 3 $vzw + w^*zv^*$ — йорданов многочлен от $x$, $y$, $z$. Теорема доказана.

Как хорошо известно *), чтобы расширить класс алгебр $\mathfrak{K}$ до многообразия, надо сначала замкнуть $\mathfrak{K}$ относительно взятия прямых произведений, затем — подалгебр и, наконец,— гомоморфных образов. Получится наименьшее многообразие Var $\mathfrak{K}$, содержащее класс алгебр $\mathfrak{K}$. Легко заметить, что класс $\mathfrak{S}$ всех специальных йордановых Ф-алгебр замкнут и относительно прямых произведений, и относительно подалгебр. Поэтому многообразие Var $\mathfrak{S}$ состоит из всевозможных гомоморфных образов специальных йордановых алгебр. Как мы покажем далее, оно отлично от многообразия всех йордановых алгебр. Очевидно, что свободные специальные йордановы алгебры являются свободными алгебрами этого многообразия.

Докажем теперь одну теорему о вложении для специальных йордановых алгебр. Доказательству ее предпошлем две леммы.

Лемма 6. *В свободной ассоциативной алгебре* Ass $[x, y]$ *элемент принадлежит подалгебре* $\langle Z \rangle$, *порожденной множеством* $Z = \{z_i = xy^ix;\ i = 1, 2, \ldots\}$, *тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией одночленов вида*

$$xy^{j_1}x^2y^{j_2}x^2 \ldots x^2y^{j_n}x, \quad j_k \geqslant 1. \tag{19}$$

*Эта подалгебра является свободной ассоциативной алгеброй с множеством* $Z$ *свободных порождающих.*

Доказательство первого утверждения леммы очевидно. Для доказательства второго рассмотрим

---

*) См., например, Мальцев А. И., Алгебраические системы, «Наука», 1970, стр. 339.

гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathrm{Ass}\,[x_1, \ldots, x_n, \ldots] \to \langle Z\rangle,$$

переводящий $x_i$ в $z_i$. Легко видеть, что $\varphi$ — изоморфизм, так как $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$ влечет $f = 0$. Будем обозначать теперь алгебру $\langle Z\rangle$ через $\mathrm{Ass}\,[Z]$.

Лемма 7. *Пусть $I$ — идеал алгебры* $\mathrm{Ass}\,[Z]$ *и $\widetilde{I}$ — идеал в* $\mathrm{Ass}\,[x, y]$, *порожденный множеством $I$. Тогда*

$$\widetilde{I} \cap \mathrm{Ass}\,[Z] = I.$$

Доказательство. Всякий элемент $u$ из $\widetilde{I}$ представляется в виде

$$u = \sum_i v_i k_i w_i, \tag{20}$$

где $k_i \in I$, $v_i$, $w_i$ — одночлены. Если $u \in \mathrm{Ass}\,[Z]$, то $u$ есть линейная комбинация одночленов вида (19). Аналогично представляются и элементы $k_i$. Заметим, что если $k$ и $vkw$ — одночлены указанного вида, то и одночлены $v$, $w$ имеют тот же вид. Поэтому, если $u \in \mathrm{Ass}\,[Z]$, то в правой части равенства (20) все слагаемые $v_i k_i w_i$, у которых либо $v_i$, либо $w_i$ не лежит в $\mathrm{Ass}\,[Z]$, должны взаимно сократиться. Но в этом случае $u \in I$. Лемма доказана.

Теорема 7 (Ширшов). *Всякая специальная йорданова алгебра, имеющая не более счетного числа порождающих, вложима в специальную йорданову алгебру с двумя порождающими.*

Доказательство. Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра, имеющая не более счетного числа порождающих. Тогда $J$ изоморфна некоторой фактор-алгебре $\mathrm{SJ}\,[Z]/I$ алгебры $\mathrm{SJ}\,[Z]$. Отметим, что в силу леммы 5 для идеала $\hat{I}$ алгебры $\mathrm{Ass}\,[Z]$, порожденного множеством $I$, верно соотношение

$$\hat{I} \cap \mathrm{SJ}\,[Z] = I.$$

Рассмотрим теперь идеал $\widetilde{\hat{I}}$ алгебры $\mathrm{Ass}\,[x, y]$, порожденный множеством $\hat{I}$. Ввиду леммы 7

$$\widetilde{\hat{I}} \cap \mathrm{Ass}\,[Z] = \hat{I},$$

откуда $\mathrm{SJ}\,[Z] \cap \widetilde{\hat{I}} = \mathrm{SJ}\,[Z] \cap (\mathrm{Ass}\,[Z] \cap \widetilde{\hat{I}}) = \mathrm{SJ}\,[Z] \cap \hat{I} = I$. Образ алгебры $\mathrm{SJ}\,[Z]$ в фактор-алгебре $\overline{A} = \mathrm{Ass}\,[x, y]/\widetilde{\hat{I}}$ —

это подалгебра $SJ[Z]/SJ[Z] \cap \tilde{\tilde{I}} = SJ[Z]/I$, изоморфная $J$. Так как $xy^ix = 2(y \odot x) \odot x - y \odot x^2$, эта подалгебра лежит в подалгебре алгебры $\overline{A}^{(+)}$, порожденной элементами $\overline{x} = x + \tilde{\tilde{I}}$ и $\overline{y} = y + \tilde{\tilde{I}}$.

Теорема доказана.

**Упражнения**

1 (Кон). Доказать, что $H[X]$ — подалгебра алгебры $\mathrm{Ass}[X]^{(+)}$, порожденная множеством $X$ и четверками вида $\{x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta\}$.

2 (Кон). Доказать, что фактор-алгебра $SJ[x, y, z]/I$, где $I$ — идеал, порожденный элементом $x \odot y$, исключительна.

3. Доказать, что фактор-алгебра $\mathrm{Ass}[x, y, z]^{(+)}/I$, где $I$ — идеал, порожденный элементом $x^2 - y^2$, исключительна.

4 (Ширшов). Всякая специальная йорданова алгебра изоморфно вложима в специальную йорданову алгебру, каждое счетное подмножество которой лежит в подалгебре с двумя порождающими.

## § 3. Теорема Ширшова

В предыдущих параграфах мы установили, что аналог теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта для йордановых алгебр несправедлив и не каждая йорданова алгебра имеет ассоциативную обертывающую алгебру. Мы видели, что исключительными могут быть даже йордановы алгебры, порожденные тремя элементами. Для 2-порожденных йордановых алгебр ситуация в корне отлична: в 1956 г. Ширшов доказал, что всякая йорданова алгебра от двух порождающих специальна.

Этот результат оказал заметное влияние на дальнейшее развитие теории. Из него, например, следует, что все тождества от двух переменных, справедливые во всех специальных йордановых алгебрах, верны и во всех йордановых алгебрах. Ввиду того, что вопрос о справедливости тождества во всех специальных йордановых алгебрах не вызывает затруднений — надо только проверить, верно ли оно в свободной специальной йордановой алгебре,— эта теорема дает алгоритм для распознавания тождеств от двух переменных в многообразии йордановых алгебр.

В 1960 г. Макдональд сходными методами доказал, что все тождества от трех переменных, линейные хотя бы по одному из них, верные во всех специальных йордановых алгебрах, верны и для всех йордановых алгебр. Глени

показал, что результаты Ширшова и Макдональда усилить нельзя. Он нашел тождества степени 8 и 9, выполняющиеся в специальных йордановых алгебрах и не выполняющиеся в простой исключительной йордановой алгебре $H(C_3)$. Эти тождества зависят от трех переменных и имеют степень $\geqslant 2$ по любому из них.

Вопрос об описании тождеств, верных во всех специальных, но не во всех йордановых алгебрах, пока остается открытым.

Цель настоящего параграфа — доказать теорему Ширшова и ряд следствий из нее. Хотя результат Макдональда и не является формальным следствием этой теоремы, он следует из ее доказательства.

Мы начнем с некоторых предварительных результатов.

Пусть $A$ — произвольная Ф-алгебра. Для всякого элемента $a \in A$ определим два отображения алгебры $A$ в себя: $R_a$: $x \mapsto xa$ и $L_a$: $x \mapsto ax$. Эти отображения являются эндоморфизмами Ф-модуля $A$. Первый эндоморфизм называется *оператором правого умножения на элемент* $a$, а второй — *оператором левого умножения на элемент* $a$. Подалгебра алгебры эндоморфизмов Ф-модуля $A$, порожденная всевозможными операторами $R_a$ и $L_a$, где $a \in A$, называется *алгеброй умножений алгебры* $A$ и обозначается $M(A)$. Подалгебра алгебры $M(A)$, порожденная всеми операторами правых (левых) умножений, называется *алгеброй правых* (*левых*) *умножений алгебры* $A$ и обозначается $R(A)$ (соответственно $L(A)$). Если алгебра $A$ коммутативна или антикоммутативна, то все эти алгебры совпадают: $M(A) = R(A) = L(A)$.

Пусть $A$ — подалгебра алгебры $B$. Подалгебру, порожденную в $R(B)$ операторами $R_a$, где $a \in A$, будем обозначать $R^B(A)$. Аналогично определяются алгебры $M^B(A)$, $L^B(A)$.

Рассмотрим алгебры умножений йордановых алгебр. Тождества, которым удовлетворяют йордановы алгебры, влекут ряд соотношений для операторов умножений. Так, основное йорданово тождество в силу коммутативности эквивалентно тождеству $(yx)x^2 = (yx^2)x$, которое в свою очередь эквивалентно операторному соотношению

$$[R_x, R_{x^2}] = 0. \qquad (21)$$

Проведем полную линеаризацию тождества $(x^2y)x = x^2(yx)$. Переобозначив неизвестные и воспользовавшись коммутативностью, получим тождество

$$[(xy)z]t + [(xt)z]y + x[(yt)z] = (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz). \quad (22)$$

Заметим теперь, что в правую часть этого равенства все переменные входят симметрично, поэтому левая часть не должна измениться от перемены $x$ и $z$ местами. Учитывая это обстоятельство, мы получаем еще тождества

$$[(xy)z]t + [(xt)z]y + x[(yt)z] = [x(yz)]t + [x(yt)]z + [x(zt)]y, \quad (23)$$

$$[x(yz)]t + [x(yt)]z + [x(zt)]y = (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz). \quad (24)$$

Тождества (22) — (24) эквивалентны следующим операторным соотношениям:

$$R_yR_zR_t + R_tR_zR_y + R_{(yt)z} = R_yR_{zt} + R_zR_{yt} + R_tR_{yz}, \quad (25)$$

$$R_yR_zR_t + R_tR_zR_y + R_{(yt)z} = R_{yz}R_t + R_{yt}R_z + R_{zt}R_y, \quad (26)$$

$$[R_{yz}, R_t] + [R_{yt}, R_z] + [R_{zt}, R_y] = 0. \quad (27)$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Если подалгебра $A$ йордановой алгебры $B$ порождается множеством $A_0$, то алгебра $R^B(A)$ порождается множеством операторов $\{R_a, R_{ab} \mid a, b \in A_0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что алгебра $R^B(A)$ порождается операторами вида $R_{\bar v}$, где $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый неассоциативный одночлен и $\bar v = v(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in A_0$. Достаточно показать, что для любого одночлена $v$ оператор $R_{\bar v}$ лежит в подалгебре $A_0^*$, порожденной множеством $\{R_a, R_{ab} \mid a, b \in A_0\}$. Проведем индукцию по степени одночлена $v$. Если $d(v) \leqslant 2$, то, очевидно, $R_{\bar v} \in A_0^*$. Если же $d(v) \geqslant 3$, то $v = (v_1v_2)v_3$, где $v_i$ — одночлены меньшей длины. В силу (25)

$$R_{\bar v} = -R_{\bar v_1}R_{\bar v_3}R_{\bar v_2} - R_{\bar v_2}R_{\bar v_3}R_{\bar v_1} + R_{\bar v_1}R_{\bar v_2\bar v_3} + R_{\bar v_2}R_{\bar v_1\bar v_3} + R_{\bar v_3}R_{\bar v_1\bar v_2}.$$

По предположению индукции $R_{\bar v_i}$, $R_{\bar v_i\bar v_j} \in A_0^*$, поэтому и $R_{\bar v} \in A_0^*$. Предложение доказано.

Подалгебра $A$ йордановой алгебры $B$ называется *сильно ассоциативной*, если для любых элементов $a$, $a' \in A$, $b \in B$ имеет место равенство $(a, b, a') = 0$. В силу соотношения $(a, b, a') = b[R_a, R_{a'}]$ условие сильной ассоциативности подалгебры $A$ в алгебре $B$ эквивалентно коммутативности алгебры $R^B(A)$.

Теорема 8. *Всякая однопорожденная подалгебра йордановой алгебры является сильно ассоциативной.*

Доказательство. Пусть подалгебра $A$ йордановой алгебры $B$ порождена элементом $a$. Тогда алгебра $R^B(A)$ порождается элементами $R_a$ и $R_{a^2}$, которые коммутируют в силу (21). Следовательно, алгебра $R^B(A)$ коммутативна. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая йорданова алгебра является алгеброй с ассоциативными степенями.*

Из теоремы 8 следует также, что во всякой йордановой алгебре справедливо тождество

$$(x^n y) x^m = x^n (y x^m). \tag{28}$$

Наряду с обычным умножением определим во всякой йордановой алгебре *тройное йорданово произведение*:

$$\{xyz\} = (xy)z + (zy)x - (xz)y.$$

Если йорданова алгебра $A$ специальна и вложена в алгебру $P^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры $P$, то, как нетрудно проверить, для любых $a, b, c \in A$,

$$\{abc\} = \frac{1}{2}(abc + cba),$$

где через $xy$ обозначено ассоциативное произведение элементов $x$ и $y$. В частности, тройное йорданово произведение $\{aba\}$ в $P^{(+)}$ равно ассоциативному произведению $aba$.

Определим теперь для любых элементов $a$, $b$ йордановой алгебры $A$ отображение $U_{a,b}$: $x \mapsto \{axb\}$ и положим $U_a = U_{a,a}$. Ясно, что $U_{a,b}$ и $U_a$ являются элементами алгебры $R(A)$ правых умножений:

$$U_{a,b} = R_a R_b + R_b R_a - R_{ab}, \tag{29}$$

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}. \tag{30}$$

Иногда мы будем писать также $U(a, b)$ и $U(a)$.

Лемма 8. *Пусть $A$ — сильно ассоциативная подалгебра йордановой алгебры $B$. Тогда для любых $a$, $a' \in A$*

*и* $b \in B$ *справедливы соотношения*

$$U_a U_{a',b} = 2R_a U_{aa',b} - U_{a^2a',b}, \qquad (31)$$

$$U_{a',b} U_a = 2U_{aa',b} R_a - U_{a^2a',b}. \qquad (31')$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любых $x, y \in B$

$$U_{x^2,y} = 2U_{x,y}R_x - R_y U_x = 2R_x U_{x,y} - U_x R_y. \qquad (32)$$

Для доказательства этого соотношения надо расписать операторы $U_x$, $U_{x,y}$, $U_{x^2,y}$ по формулам (29), (30) и воспользоваться тождествами (25) — (27).

Линеаризуя равенства (32) по $x$, получаем

$$U_{xz,y} = U_{x,y}R_z + U_{z,y}R_x - R_y U_{x,z} = R_z U_{x,y} + R_x U_{z,y} - U_{x,z}R_y. \qquad (33)$$

Заменим теперь во втором из равенств (33) $x$ на $x^2$. Получим соотношение

$$U_{x^2z,y} = R_z U_{x^2,y} + R_{x^2} U_{z,y} - U_{x^2,z} R_y.$$

В силу (32) и по определению оператора $U_x$ это соотношение можно преобразовать следующим образом:

$$U_{x^2z,y} = 2R_z R_x U_{x,y} - R_z U_x R_y + (2R_x^2 - U_x) U_{z,y} - 2U_{x,z}R_x R_y + R_z U_x R_y = 2[R_z, R_x] U_{x,y} + 2R_x R_z U_{x,y} + 2R_x^2 U_{z,y} - U_x U_{z,y} + 2[R_x, U_{x,z}] R_y - 2R_x U_{x,z} R_y.$$

Следовательно, по (33)

$$U_{x^2z,y} = 2[R_z, R_x] U_{x,y} + 2R_x U_{xz,y} + 2[R_x, U_{x,z}] R_y - U_x U_{z,y}.$$

Полагая здесь $x = a$, $z = a'$, $y = b$, мы получим соотношение (31). Аналогично доказывается (31'). Лемма доказана.

Следствие. *Во всякой йордановой алгебре справедливы тождества*

$$\{x^k \{x^n y x^n\} z\} = 2\{x^{n+k} (yx^n) z\} - \{x^{2n+k} yz\}, \qquad (34)$$

$$\{xty\} z + \{zty\} x = \{(xz) ty\} + \{x (ty) z\}, \qquad (35)$$

$$\{xtz\} y + \{(xz) ty\} = \{x (tz) y\} + \{z (tx) y\}, \qquad (36)$$

$$\{x^n y x^n\} x^k = \{x^n y x^{n+k}\}. \qquad (37)$$

Доказательство. Справедливость тождества (34) следует из (31) в силу теоремы 8. Далее, операторные соотношения (33) дают нам тождества (35) и (36). Для доказательства тождества (37) положим в (34) $z = 1$, предварительно формально присоединив, если необходимо, к йордановой алгебре единицу 1. Получим в силу (28)

$$\{x^n y x^n\} x^k = 2x^{n+k}(yx^n) - x^{2n+k}y = \{x^n y x^{n+k}\}.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим свободную ассоциативную Ф-алгебру $A = \mathrm{Ass}\,[x, y, z]$ от порождающих $x, y, z$. Алгебра $A$ является свободным модулем над Ф, базис которого составляет множество $S$ всех ассоциативных слов от $x, y, z$. Для ассоциативного слова $\alpha \in S$ через $d(\alpha)$ будем обозначать длину слова $\alpha$, а через $h(\alpha)$ — его высоту, которая была определена при доказательстве теоремы 3. Напомним также, что в алгебре $A$ определена инволюция $*$; если $\alpha = x_1 x_2 \ldots x_n$, где $x_i \in \{x, y, z\}$, то $\alpha^* = x_n x_{n-1} \ldots x_1$.

Пусть $S_1$ — множество слов из $S$, степень которых по $z$ не более 1. Индукцией по высоте слова $\alpha \in S_1$ определим отображение $\alpha \mapsto \alpha'$ множества $S_1$ в свободную йорданову алгебру $J = \mathrm{J}\,[x, y, z]$, полагая

1) $\alpha' = \alpha$, если $h(\alpha) = 1$;

2) $(\alpha\beta)' = \alpha' \cdot \beta'$, если $h(\alpha\beta) = 2$, $h(\alpha) = h(\beta) = 1$;

3) $(x^k \beta x^n)' = x^k \cdot (\beta x^n)' + (x^k \beta)' \cdot x^n - x^{k+n} \cdot \beta'$, где $h(x^k \beta x^n) = h(\beta) + 2$;

4) $(y^k \beta x^n)' = 2\{y^k \beta' x^n\} - (x^n \beta y^k)'$, где $\beta \neq z$, $h(y^k \beta x^n) = h(\beta) + 2$ (заметим, что в этом случае $h(x^n \beta y^k) < h(y^k \beta x^n)$, так что можно считать, что $(x^n \beta y^k)'$ определено);

5) $(y^m z x^k)' = \{y^m z x^k\}$;

6) $(x^k \beta z)' = (z \beta^* x^k)' = 2x_k \cdot (\beta z)' - (\beta z x^k)'$, где $h(x^k \beta z) = h(\beta) + 2$. (Заметим, что $(\beta z x^k)'$ уже определено в силу 3), 4), 5).)

Меняя ролями $x$ и $y$, получим еще четыре правила индуктивного определения 3′) — 6′).

Через $A_1$ обозначим Ф-подмодуль в $A$, порожденный множеством $S_1$. Ясно, что отображение $\alpha \mapsto \alpha'$ продолжается до гомоморфизма $A_1$ в $J$, как Ф-модулей.

Далее, для любых элементов $a,\ b \in A$ определим операции

$$[a] = \frac{1}{2}(a + a^*), \tag{38}$$

$$a \circ b = a \odot [b] = \frac{1}{4}(ab + ab^* + ba + b^*a), \tag{39}$$

где через $\odot$ обозначается, как обычно, умножение в алгебре $A^{(+)}$. Отметим, что операция $\circ$, вообще говоря, некоммутативна. В силу теоремы 3 отображение $a \mapsto [a]$ является эпиморфизмом алгебры $A$ на свободную специальную йорданову алгебру SJ $[x, y, z]$; при этом если $a \in$ SJ $[x, y, z]$, то $[a] = a$.

Л е м м а 9. *Для любых $a,\ b \in A$ справедливо равенство*

$$[a \circ b] = [a] \odot [b].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (38) и (39) $[a \circ b] = \frac{1}{2}\{a \odot [b] + (a \odot [b])^*\} = \frac{1}{2}(a \odot [b] + a^* \odot [b]) = [a] \odot [b]$. Лемма доказана.

Т е о р е м а Ш и р ш о в а. *Всякая йорданова алгебра от двух порождающих специальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 6 достаточно доказать, что алгебры J $[x, y]$ и SJ $[x, y]$ изоморфны. Обозначим через $\varphi$ ограничение отображения $a \mapsto a'$ на множестве SJ $[x, y]$. Ясно, что $\varphi$ отображает SJ $[x, y]$ в $[x, y]$ и является гомоморфизмом Ф-модулей. Покажем, что $\varphi$ — изоморфизм SJ $[x, y]$ на J $[x, y]$.

В силу определения отображения $'$ индукцией по высоте слова $\alpha \in S_1$ легко показать, что $(\alpha^*)' = \alpha'$. Поэтому для любого $a \in A_1$

$$(a^*)' = a' \tag{40}$$

и, следовательно,

$$[a]' = a'. \tag{41}$$

Теперь для любых $a,\ b \in$ SJ $[x, y]$ в силу (41) и леммы 9 имеем $\varphi(a \odot b) = (a \odot b)' = ([a] \odot [b])' = [a \circ b]' = (a \circ b)'$. С другой стороны, $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = a' \cdot b'$. Значит, для того чтобы отображение $\varphi$ было гомоморфизмом, необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$(a \circ b)' = a' \cdot b'$$

для любых $a, b \in SJ[x, y]$. Это соотношение мы докажем позднее в основной лемме, а сейчас завершим доказательство теоремы. Мы имеем гомоморфизм $\varphi\colon SJ[x, y] \to J[x, y]$ такой, что $\varphi(x) = x$, $\varphi(y) = y$. Заметим, что если элементы $m, n \in J[x, y]$ имеют прообразы, т. е. $m = p'$, $n = q'$ для некоторых $p, q \in SJ[x, y]$, то и элемент $m \cdot n$ имеет прообраз — элемент $p \odot q$, так как

$$\varphi(p \odot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = p' \cdot q' = m \cdot n.$$

Отсюда вытекает, что $\varphi$ — сюръективный гомоморфизм. Однако имеется канонический гомоморфизм $\pi\colon J[x, y] \to SJ[x, y]$, при котором $\pi(x) = x$, $\pi(y) = y$. Отображения $\pi\varphi$ и $\varphi\pi$ тождественны на $SJ[x, y]$ и $J[x, y]$. Следовательно, $\pi$ и $\varphi$ — изоморфизмы, что и требовалось доказать.

Лемма 10. *Пусть $\pi\colon J[x, y, z] \to SJ[x, y, z]$ — канонический гомоморфизм. Тогда для любого $a \in A_1$ справедливо равенство*

$$\pi(a') = [a].$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать утверждение леммы в случае, когда $a = \alpha$ — слово от $x, y, z$. Если $h(\alpha) = 1$, то все ясно. Предположим теперь, что лемма верна для всех слов меньшей высоты, и рассмотрим возможные случаи:

1) $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $h(\alpha) = 2$, $h(\alpha_1) = h(\alpha_2) = 1$. Тогда

$$\pi(\alpha') = \pi(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \alpha_1 \odot \alpha_2 = [\alpha_1\alpha_2] = [\alpha];$$

2) $\alpha = x^k \beta x^n$. В этом случае по определению отображения $\alpha \mapsto \alpha'$ и предположению индукции

$$\pi(\alpha') = \pi(x^k \cdot (\beta x^n)' + (x^k\beta)' \cdot x^n - x^{k+n} \cdot \beta') =$$
$$= x^k \odot [\beta x^n] + [x^k\beta] \odot x^n - x^{k+n} \odot [\beta] =$$
$$= \frac{1}{2}(x^k\beta x^n + x^n\beta^* x^k) = [x^k\beta x^n] = [\alpha].$$

3) $\alpha = y^k\beta x^n$. Тогда имеем

$$\pi(\alpha') = 2\{y^k[\beta]x^n\} - [x^n\beta y^k] =$$
$$= y^k[\beta]x^n + x^n[\beta]y^k - [x^n\beta y^k] =$$
$$= \frac{1}{2}(y^k\beta x^n + x^n\beta^* y^k) = [y^k\beta x^n] = [\alpha].$$

4) $\alpha = x^k \beta z$. В силу уже рассмотренного случая имеем

$$\pi(\alpha') = 2x^k \odot [\beta z] - [\beta z x^k] = \frac{1}{2}(x^k \beta z + z\beta^* x^k) = [x^k \beta z] = [\alpha].$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $a$, $b$, $ab \in A_1$, причем $a' \cdot b' = c'$ для некоторого $c \in A_1$. Тогда $a' \cdot b' = (a \circ b)'$.*

Доказательство. Применяя гомоморфизм $\pi$ к равенству $a' \cdot b' = c'$, получим $[a] \odot [b] = [c]$. Теперь в силу леммы 9 и равенства (41) получаем

$$a' \cdot b' = c' = [c]' = ([a] \odot [b])' = [a \circ b]' = (a \circ b)'.$$

Следствие доказано.

Основная лемма (Ширшов). *Для любых $a$, $b \in A_1$ таких, что $ab \in A_1$, справедливо соотношение*

$$(a \circ b)' = a' \cdot b'.$$

Доказательство. Пусть $f$, $g \in \mathrm{J}[x, y, z]$. Будем писать $f \equiv g$, если $f - g = h'$ для некоторого $h \in A_1$. В силу следствия леммы 10 нам достаточно показать, что для любых $a$, $b \in A_1$ таких, что $ab \in A_1$, справедливо соотношение $a' \cdot b' \equiv 0$. Ясно также, что это соотношение достаточно доказать в случае, когда $a$ и $b$ — ассоциативные слова из $S_1$. Мы будем говорить, что слово $\alpha$ больше слова $\beta$, если $\alpha$ содержит $z$, а $\beta$ его не содержит, либо если $\alpha$ и $\beta$ не содержат $z$ и $h(\alpha) > h(\beta)$.

Итак, пусть $a = \alpha$, $b = \beta$ — ассоциативные слова, удовлетворяющие условиям основной леммы. Сформулируем три индуктивных предположения:

1) лемма справедлива для слов $\alpha_1$ и $\beta_1$, если $h(\alpha_1) + h(\beta_1) < h(\alpha) + h(\beta)$;

2) лемма справедлива для слов $\alpha_1$ и $\beta_1$, если $h(\alpha_1) + h(\beta_1) = h(\alpha) + h(\beta)$, $d(\alpha_1) + d(\beta_1) < d(\alpha) + d(\beta)$.

Основанием первого индуктивного предположения является очевидная справедливость леммы для суммы высот, равной 2. Основанием второго индуктивного предположения служит первое индуктивное предположение, так как уменьшение суммы степеней приведет в конечном итоге к уменьшению суммы высот.

3) лемма справедлива для слов $\alpha_1$ и $\beta_1$, если $h(\alpha_1) + h(\beta_1) = h(\alpha) + h(\beta)$, $d(\alpha_1) + d(\beta_1) = d(\alpha) + d(\beta)$ и

высота меньшего из слов $\alpha_1$, $\beta_1$ меньше высоты меньшего из слов $\alpha$, $\beta$.

Последнее индуктивное предположение будет обосновано ниже, где будет показано, что лемма справедлива, если высота меньшего из слов $\alpha$, $\beta$ меньше 3. А сейчас завершим доказательство основной леммы.

Пусть $\beta$ меньше $\alpha$ и $h(\beta) > 2$. Тогда, как легко видеть из определения отображения $'$,

$$\beta' = \sum_i \sigma_i (c_i' \cdot d_i') \cdot e_i' + \sum_j \sigma_j x^{k_j} \cdot y^{s_j},$$

где $\sigma_k \in \Phi$, $c_i, d_i, e_i \in S$, $h(c_i) + h(d_i) + h(e_i) \leqslant h(\beta)$. В силу линейности всех операций достаточно доказать справедливость леммы, рассматривая вместо $\beta'$ элементы $\beta_1 = (c' \cdot d') \cdot e'$ или $\beta_2 = x^k \cdot y^s$.

Основание третьего индуктивного предположения дает нам

$$\alpha' \cdot \beta_2 = \alpha' \cdot (x^k y^s)' \equiv 0.$$

Далее, ввиду тождества (22) и предположения индукции 3)

$$\begin{aligned}\alpha' \cdot \beta_1 = \alpha' \cdot ((c' \cdot d') \cdot e') = -((\alpha' \cdot c') \cdot e') \cdot d' - \\ - ((\alpha' \cdot d') \cdot e') \cdot c' + (\alpha' \cdot c') \cdot (d' \cdot e') + \\ + (\alpha' \cdot d') \cdot (c' \cdot e') + (\alpha' \cdot e') \cdot (c' \cdot d') = \\ = -\{((\alpha \circ c) \circ e) \circ d - ((\alpha \circ d) \circ e) \circ c + (\alpha \circ c) \circ (d \circ e) + \\ + (\alpha \circ d) \circ (c \circ e) + (\alpha \circ e) \circ (c \circ d)\}' \equiv 0.\end{aligned}$$

Таким образом, по модулю индуктивного предположения 3) лемма доказана.

Прежде чем приступить к обоснованию индуктивного предположения 3), установим одно полезное соотношение. Пусть $a, c \in \mathrm{SJ}[x, y, z]$, $b \in \mathrm{Ass}[x, y, z]$; тогда имеет место равенство

$$\{abc\} = (b \circ a) \circ c + (b \circ c) \circ a - b \circ (c \circ a).$$

Действительно, по определению операции $\circ$ имеем равенство $x \circ y = x \odot [y]$, откуда, ввиду того что $[a] = a$, $[c] = c$ и $[a \circ c] = a \odot c$, получаем

$$\begin{aligned}\{abc\} = (b \odot a) \odot c + (b \odot c) \odot a - b \odot (c \odot a) = \\ = (b \circ a) \circ c + (b \circ c) \circ a - b \circ (c \circ a).\end{aligned}$$

Если пары элементов $(b \circ a,\ c)$, $(b \circ c,\ a)$ и $(b,\ c \circ a)$ находятся в условиях индуктивных предположений, то из полученного соотношения следует равенство

$$\{abc\}' = \{a'b'c'\}. \tag{42}$$

Действительно, в этом случае имеем

$$\{abc\}' = ((b \circ a) \circ c + (b \circ c) \circ a - b \circ (a \circ c))' =$$
$$= (b' \cdot a') \cdot c' + (b' \cdot c') \cdot a' - b' \cdot (a' \cdot c') = \{a'b'c'\}.$$

Доказательство основания индуктивного предположения 3) разбивается на ряд случаев. Ниже всюду $h(\alpha) = h(\gamma) + 2$.

1-й случай. $\alpha = x^s \gamma x^m$, $\beta = x^t$.

Будем считать, что $s \geqslant m$. Это не ограничивает общности, так как в противном случае, ввиду (40), вместо $\alpha$ можно рассмотреть $\alpha^*$. Проведем индукцию по $s + m$. Если $s + m = 1$, то одно из чисел $s$, $m$ равно 0, и мы попадаем в условия индуктивного предположения 1). Таким образом, основание для индукции есть; совершим теперь индуктивный переход. Используя индуктивные предположения 1) и 2) и формулу (42), а также тождества (37) и (28), получаем

$$\alpha' \cdot \beta' = (x^s \gamma x^m)' \cdot x^t = \{x^m (x^{s-m}\gamma)\, x^m\}' \cdot x^t =$$
$$= \{x^m (x^{s-m}\gamma)'\, x^m\} \cdot x^t = \{x^m (x^{s-m}\gamma)'\, x^{m+t}\} =$$
$$= ((x^{s-m}\gamma)' \cdot x^m) \cdot x^{m+t} + ((x^{s-m}\gamma)' \cdot x^{m+t}) \cdot x^m - (x^{s-m}\gamma)' \cdot x^{2m+t} \equiv$$
$$\equiv 2\, ((x^{s-m}\gamma)' \cdot x^m) \cdot x^{m+t} = 2\, ((x^{s-m}\gamma) \circ x^m)' \cdot x^{m+t} =$$
$$= (x^{s-m}\gamma x^m + x^s\gamma)' \cdot x^{m+t} \equiv (x^{s-m}\gamma x^m)') \cdot x^{m+t},$$

откуда по предположению индукции $\alpha' \cdot \beta' \equiv 0$.

2-й случай. $\alpha = x^m \gamma y^n$, $\beta = x^t$.

а) $\gamma = z$. В этом случае по определению операции $\circ$ и отображения $'$ и в силу (35) и (28) получаем

$$\alpha' \cdot \beta' - (\alpha \circ \beta)' =$$
$$= (x^m z y^n)' \cdot x^t - \frac{1}{2} (x^{m+t} z y^n)' - \frac{1}{2} (x^m z y^n x^t)' =$$
$$= \{x^m z y^n\} \cdot x^t - \frac{1}{2} \{x^{m+t} z y^n\} -$$
$$- \frac{1}{2} x^m \cdot (z y^n x^t)' - \frac{1}{2} \{x^m z y^n\} \cdot x^t + \frac{1}{2} x^{m+t} \cdot (z \cdot y^n) =$$

$$=\frac{1}{2}\{x^m zy^n\}\cdot x^t-\frac{1}{2}\{x^{m+t}zy^n\}+\frac{1}{2}\{x^t zy^n\}\cdot x^m-$$

$$-x^m\cdot(x^t\cdot(z\cdot y^n))+\frac{1}{2}x^{m+t}\cdot(z\cdot y^n)=$$

$$=\frac{1}{2}\{x^m(z\cdot y^n)x^t\}-x^m\cdot(x^t\cdot(z\cdot y^n))+\frac{1}{2}x^{m+t}\cdot(z\cdot y^n)=0.$$

В случае, когда слово $\gamma$ отсутствует, рассуждаем аналогично; при этом доказательство только упрощается.

б) $\gamma\neq z$, $\gamma$ — непустое слово. В этом случае $h(y^n\gamma x^m)<h(x^m\gamma y^n)$, поэтому по индуктивному предположению 1)

$$\alpha'\cdot\beta'=(x^m\gamma y^n)'\cdot x^t=$$
$$=2\{x^m\gamma' y^n\}\cdot x^t-(y^n\gamma x^m)'\cdot x^t\equiv 2\{x^m\gamma' y^n\}\cdot x^t. \quad (43)$$

С другой стороны, если $h(x^m\delta x^n)=h(\delta)+2=h(\alpha)+h(\beta)$, то по определению отображения $'$ и индуктивному предположению 1) имеем

$$(x^m\delta)'\cdot x^n=(x^m\delta x^n)'-x^m\cdot(\delta x^n)'+x^{m+n}\cdot\delta'\equiv -x^m\cdot(\delta x^n)'. \quad (44)$$

Следовательно, $\alpha'\cdot\beta'=(x^m\gamma y^n)'\cdot x^t\equiv -x^m\cdot(\gamma y^n x^t)'$, откуда по определению опе̇рации $\circ$ и индуктивному предположению 1) получаем

$$\alpha'\cdot\beta'\equiv -2x^m\cdot((\gamma y^n)\circ x^t)'+x^m\cdot(x^t\gamma y^n)'=$$
$$=-2x^m\cdot(x^t\cdot(\gamma y^n)')+2x^m\cdot\{x^t\gamma' y^n\}-x^m\cdot(y^n\gamma x^t)'\equiv$$
$$\equiv -2x^m\cdot(x^t\cdot(\gamma y^n)')+2x^m\cdot\{x^t\gamma' y^n\}.$$

Складывая полученное соотношение с (43), получим в силу (35) и (28)

$$\alpha'\cdot\beta'\equiv\{x^m\gamma' y^n\}\cdot x^t+\{x^t\gamma' y^n\}\cdot x^m-x^m\cdot(x^t\cdot(\gamma y^n)')=$$
$$=\{x^{m+t}\gamma' y^n\}+\{x^m(\gamma'\cdot y^n)x^t\}-x^m\cdot(x^t\cdot(\gamma y^n)')\equiv$$
$$\equiv\{x^m(\gamma\circ y^n)'x^t\}-x^m\cdot(x^t\cdot(\gamma y^n)')=$$
$$=\frac{1}{2}\{x^m(y^n\gamma)'x^t\}-\frac{1}{2}x^{m+t}\cdot(\gamma y^n)'\equiv x^m\cdot(x^t\cdot(y^n\gamma)')=$$
$$=x^m\cdot(y^n\gamma)\circ x^t)'=\frac{1}{2}x^m\cdot(x^t y^n\gamma+y^n\gamma x^t)'\equiv\frac{1}{2}x^m\cdot(x^t y^n\gamma)'.$$

Так как $h(\alpha)=h(\gamma)+2$, то либо $\gamma=y^k\gamma_1$, либо $\gamma=\gamma_2 x^k$. Таким образом, либо по 1-му индуктивному

предположению, либо по случаю 1) имеем $\alpha'\cdot\beta' \equiv \equiv \frac{1}{2}x^m\cdot(x^ty^n\gamma)' \equiv 0$.

3-й случай. $\alpha = x^m\gamma z$, $\beta = x^n$.

Если $\gamma$ — пустое слово, то согласно (28) имеем

$$\alpha'\cdot\beta' - (\alpha\circ\beta)' = (x^m\cdot z)\cdot x^n - \frac{1}{2}(x^mzx^n + x^{m+n}z)' =$$
$$= (x^m\cdot z)\cdot x^n - \frac{1}{2}(x^m\cdot z)\cdot x^n - \frac{1}{2}x^m\cdot(z\cdot x^n) +$$
$$+ \frac{1}{2}x^{m+n}\cdot z - \frac{1}{2}x^{m+n}\cdot z = 0.$$

Если же $\gamma$ — не пустое слово, то получаем в силу (44) и первых двух случаев

$$\alpha'\cdot\beta' = (x^m\gamma z)'\cdot x^n \equiv -x^m\cdot(\gamma z x^n)' \equiv 0.$$

4-й случай. $\alpha = x^m\gamma x^n$, $\beta = y^t$.

Заметим вначале, что если слово $\delta \in A_1$ и $h(x^k\delta y^n) = h(\delta) + 2$, то по определению отображения $'$

$$2\{x^k\delta' y^n\} = (x^k\delta y^n)' + (y^n\delta x^k)' \equiv 0. \tag{45}$$

Далее, в силу (40) мы без ограничения общности можем считать, что $m \geqslant n$. Теперь в силу индуктивного предположения 2) и соотношений (42), (36) и (45) получаем

$$\alpha'\cdot\beta' = (x^m\gamma x^n)'\cdot y^t = \{x^n(x^{m-n}\gamma)x^n\}'\cdot y^t = \{x^n(x^{m-n}\gamma)'x^n\}\cdot y^t =$$
$$= -\{x^{2n}(x^{m-n}\gamma)'y^t\} + 2\{x^n(x^n\cdot(x^{m-n}\gamma)')y^t\} =$$
$$= -\{y^t(x^{m-n}\gamma)'x^{2n}\} + 2\{x^n((x^{m-n}\gamma)\circ x^n)'y^t\} =$$
$$= -\{y^t(x^{m-n}\gamma)'x^{2n}\} + \{y^t(x^m\gamma)'x^n\} +$$
$$+ \{y^t(x^{m-n}\gamma x^n)'x^n\} \equiv \{y^t(x^{m-n}\gamma x^n)'x^n\}.$$

Обозначим для удобства $m - n$ через $k$. Для завершения доказательства достаточно теперь доказать соотношение

$$\{y^t(x^k\gamma x^n)'x^m\} \equiv 0. \tag{46}$$

Проведем индукцию по $k + n$. Если $k + n = 1$, то либо $k = 0$, либо $n = 0$, и (46) следует из (45). Предположим теперь, что (46) верно при $k' + n' < k + n$. Можно считать, что $k \geqslant n$. В силу индуктивного предположения 2)

и соотношений (42), (34) и (45) получаем

$$\{y^t (x^k\gamma x^n)' x^m\} = \{y^t \{x^n (x^{k-n}\gamma) x^n\}' x^m\} =$$
$$= \{y^t \{x^n (x^{k-n}\gamma)' x^n\} x^m\} = 2\{x^{n+m} (x^n \cdot (x^{k-n}\gamma)') y^t\} -$$
$$- \{x^{2n+m} (x^{k-n}\gamma)' y^t\} = 2\{y^t ((x^{k-n}\gamma) \circ x^n)' x^{n+m}\} -$$
$$- \{y^t (x^{k-n}\gamma)' x^{2n+m}\} \equiv \{y^t (x^k\gamma)' x^{n+m}\} +$$
$$+ \{y^t (x^{k-n}\gamma x^n)' x^{n+m}\} \equiv \{y^t (x^{k-n}\gamma x^n)' x^{n+m}\},$$

откуда по предположению индукции (46) справедливо. Таким образом, и в 4-м случае лемма верна.

5-й случай. $\alpha = x^k\gamma z$, $\beta = y^n$.

В этом случае по определению отображения $'$ имеем

$$2\alpha' \cdot \beta' = 2(x^k\gamma z)' \cdot y^n = (y^n x^k \gamma z)' + (x^k\gamma z y^n)' \equiv 0,$$

и все доказано.

6-й случай. $\alpha = x^k\gamma x^n$, $\beta = y^t x^m$.

Применяя уже рассмотренные случаи, получаем, ввиду (46),

$$\alpha' \cdot \beta' = (x^k\gamma x^n)' \cdot (y^t x^m)' = (x^k\gamma x^n)' \cdot (y^t \cdot x^m) =$$
$$= -\{y^t (x^k\gamma x^n)' x^m\} + ((x^k\gamma x^n)' \cdot y^t) \cdot x^m +$$
$$+ ((x^k\gamma x^n)' \cdot x^m) \cdot y^t \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

7-й случай. $\alpha = x^k\gamma y^n$, $\beta = y^t x^m$.

Применяя вновь ранее рассмотренные случаи, получаем в силу (45)

$$\alpha' \cdot \beta' = (x^k\gamma y^n)' \cdot (y^t \cdot x^m) = -\{y^t (x^k\gamma y^n)' x^m\} +$$
$$+ ((x^k\gamma y^n)' \cdot x^m) \cdot y^t + ((x^k\gamma y^n)' \cdot y^t) \cdot x^m \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha = x^k\gamma z$, $\beta = y^t x^m$.

Рассмотренные случаи вместе с получающимися из них при помощи перемены ролей порождающих $x$ и $y$ или же замены слова $\alpha$ словом $\alpha^*$ оправдывают индуктивное предположение 3). Этим завершается доказательство основной леммы.

Следствие 1. *Пусть* $J_1$ — *подмодуль алгебры* $\mathrm{J}[x, y, z]$, *состоящий из элементов степени* $\leqslant 1$ *по* $z$, *и*

$$\pi\colon \mathrm{J}[x, y, z] \to \mathrm{SJ}[x, y, z]$$

— *канонический гомоморфизм. Тогда* $\mathrm{Ker}\,\pi \cap J_1 = (0)$.

Доказательство. Пусть $SJ_1 = A_1 \cap \mathrm{SJ}[x, y, z]$, тогда как легко видеть, $\pi(J_1) = SJ_1$. Обозначим через $\varphi$ ограничение отображения $a \mapsto a'$ на множестве $SJ_1$. Для любого $\alpha \in SJ_1$ по лемме 10 имеем $\pi(\varphi(a)) = \pi(a') = [a] = a$. Отсюда следует, что для доказательства следствия остается показать, что $\varphi$ отображает $SJ_1$ на $J_1$. Это устанавливается так же, как и в доказательстве теоремы Ширшова.

Следствие 2 (Ширшов — Макдональд). *Если неассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ степени $\leqslant 1$ по $x_3$ является тождеством во всякой специальной йордановой алгебре, то он является тождеством для всех йордановых алгебр.*

Доказательство. Достаточно показать, что $f(x, y, z) = 0$ в свободной йордановой алгебре $\mathrm{J}[x, y, z]$. По условию $f(x, y, z) \in \operatorname{Ker} \pi \cap J_1$. Поэтому в силу следствия 1 $f(x, y, z) = 0$. Следствие доказано.

Утверждение этого следствия, когда степень многочлена $f$ по $x_3$ равна нулю, принадлежит Ширшову; когда она равна единице,— Макдональду. Для степени 2 по $x_3$ утверждение следствия неверно. Это показал Глени (см. упражнения).

Результат Макдональда можно переформулировать в следующей форме.

Следствие 3. *Пусть* $J_2 = \mathrm{J}[x, y]$, $J_3 = \mathrm{J}[x, y, z]$, $SJ_2 = \mathrm{SJ}[x, y]$, $SJ_3 = \mathrm{SJ}[x, y, z]$. *Тогда отображение* $R_u \mapsto R_{u^\pi}$ *продолжается до изоморфизма*

$$\Pi\colon R^{J_3}(J_2) \to R^{SJ_3}(SJ_2).$$

Доказательство. Определим отображение $\Pi$ следующим образом:

$$\Pi\Big(\sum_i R_{u_{i1}} R_{u_{i2}} \ldots R_{u_{ik_i}}\Big) = \sum_i R_{u^\pi_{i1}} R_{u^\pi_{i2}} \ldots R_{u^\pi_{ik_i}}.$$

Условие гомоморфности для $\Pi$ очевидно; в проверке нуждается только корректность определения. Пусть

$$\sum_i R_{u_{i1}} R_{u_{i2}} \ldots R_{u_{ik_i}} \in \operatorname{Ker} \pi.$$

Но тогда $0 = z^\pi \sum_i R_{u^\pi_{i1}} R_{u^\pi_{i2}} \ldots R_{u^\pi_{ik_i}} = \big(z \sum_i R_{u_{i1}} R_{u_{i2}} \ldots R_{u_{ik_i}}\big)^\pi$ и по следствию 1 $z \sum_i R_{u_{i1}} R_{u_{i2}} \ldots R_{u_{ik_i}} = 0$. В силу свободы

алгебры J $[x, y, z]$ окончательно имеем

$$\sum_i R_{u_{i1}} R_{u_{i2}} \ldots R_{u_{ik_i}} = 0,$$

что доказывает изоморфность отображения П. Следствие доказано.

Интересный результат в данном направлении получен Маккриммоном. Он доказал, что если неассоциативный многочлен $f(x, x^{-1}, y, y^{-1}, z)$ степени $\leqslant 1$ по $z$ обращается в нуль во всякой специальной йордановой алгебре при подстановке вместо $x$ и $y$ обратимых элементов, вместо $x^{-1}$ и $y^{-1}$ их обратных *), а вместо $z$ — любого элемента этой специальной алгебры, то этим же свойством многочлен $f(x, x^{-1}, y, y^{-1}, z)$ обладает в классе всех йордановых алгебр.

Отметим два полезных тождества, которые в силу следствия 2 справедливы во всех йордановых алгебрах:

$$\{xyx\}^2 = \{x\,\{yx^2y\}\,x\}, \tag{47}$$

$$zU(xU_y) = zU_yU_xU_y. \tag{48}$$

Последнее тождество носит название *тождества Макдональда*.

Обозначим через $\mathfrak{Z}_n$ ядро канонического гомоморфизма свободной йордановой алгебры J $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ на свободную специальную йорданову алгебру SJ $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Теорема Ширшова утверждает, что $\mathfrak{Z}_2 = (0)$. Однако $\mathfrak{Z}_3$ уже оказывается отличным от нуля; это впервые установили Алберт и Пейдж, показав, что алгебра $H(C_3)$ порождается тремя элементами и не является гомоморфным образом никакой специальной йордановой алгебры. Всякий ненулевой элемент из $\mathfrak{Z}_n$ называется *s-тождеством*. Такое название объясняется тем, что если $f \in \mathfrak{Z}_n$, то $f$ есть тождество, выполняющееся во всех специальных, но не во всех йордановых алгебрах. Из теоремы Алберта — Пейджа следует существование $s$-тождеств от трех переменных $x, y, z$. Однако их доказательство не позволяло указать ни одного конкретного $s$-тождества. Глени, анализируя доказательство Алберта и Пейджа, указал ряд $s$-тождеств от трех переменных восьмой и девятой степени.

---

*) Определение обратимости элементов для йордановых алгебр несколько отлично от обычного. Оно будет дано позднее, в главе 14.

Он же показал, что не существует $s$-тождеств степени $\leqslant 5$ ни от какого числа переменных. Позднее, с помощью ЭВМ Глени установил, что в случае поля характеристики 0 $s$-тождеств степени $\leqslant 7$ также не существует.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что следующие два элемента алгебры $\mathrm{J}[x, y, z]$ являются $s$-тождествами:

$$2\{\{y\{xzx\}y\}z(xy)\} - \{y\{x\{z(xy)z\}x\}y\} - \\ - 2\{(xy)z\{x\{yzy\}x\}\} + \{x\{y\{z(xy)z\}y\}x\},$$

$$2\{xzx\}\cdot\{y\{zy^2z\}x\} - 2\{yzy\}\cdot\{x\{zx^2z\}y\} - \\ - \{x\{z\{x\{yzy\}y\}z\}x\} + \{y\{z\{y\{xzx\}x\}z\}y\}.$$

Указание. Первое тождество опровергнуть на следующих элементах алгебры $H(C_3)$: $X = e_{11} + e_{33}$, $Y = e_{12} + e_{23}$, $Z = u_{12} + v_{13} + w_{23}$, где $(u, v, w) \neq 0$; второе на элементах $X = e_{12}$, $Y = e_{23}$, $Z = u_{12} + v_{13} + w_{23}$, где $(u, v, w) \neq 0$.

**2** (Алберт—Пейдж). Алгебра $H_t(C_3)$ не является гомоморфным образом специальной йордановой алгебры и не лежит в многообразии Var $\mathfrak{S}$.

**3.** Свободная йорданова алгебра $\mathrm{J}[X]$, где card $(X) > 2$, является исключительной.

ЛИТЕРАТУРА

Алберт и Пейдж [9], Глени [35, 36], Джекобсон [47], Джекобсон и Маккриммон [49], Кон [101], Макдональд [113], Маккриммон [121, 123, 125, 126], Ширшов [274, 275, 279].

*ГЛАВА 4*

# РАЗРЕШИМОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Ассоциативная алгебра называется *нильпотентной*, если для некоторого натурального числа $n$ произведение любых $n$ элементов этой алгебры равно нулю. Говоря о произведении $n$ элементов неассоциативной алгебры, мы должны указать также порядок выполнения операций или, что то же самое, расстановку скобок. Может оказаться, что произведения любых $n$ элементов алгебры равны нулю при одной расстановке скобок и отличны от нуля при другой. Таким образом, для неассоциативных алгебр и, в частности, для йордановых алгебр возникают различные варианты понятия нильпотентности. Взаимосвязь между ними изучается в данной главе.

## § 1. Определения и примеры

Неассоциативная алгебра $A$ называется *нильпотентной*, если существует такое натуральное число $n$, что произведение любых $n$ элементов алгебры $A$ с любой расстановкой скобок равно нулю. Наименьшее такое число называется *индексом нильпотентности* алгебры $A$. Алгебра $A$ называется *правонильпотентной*, если существует натуральное число $n$ такое, что $a_1R_{a_2}R_{a_3}\ldots R_{a_n}=0$, и *левонильпотентной*, если $a_1L_{a_2}L_{a_3}\ldots L_{a_n}=0$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$. Минимальное такое число $n$ называется *индексом правонильпотентности* или соответственно *левонильпотентности алгебры* $A$.

Определим индуктивно в алгебре $A$ ряд подмножеств: положим $A^1=A^{\langle 1\rangle}=A$ и $A^n=A^{n-1}A+A^{n-2}A^2+\ldots+AA^{n-1}$, $A^{\langle n\rangle}=A^{\langle n-1\rangle}A$. Подмножество $A^n$ назы-

вается *n-й степенью* алгебры $A$. Цепочка подмножеств

$$A^1 \supseteq A^2 \supseteq \ldots \supseteq A^n \supseteq \ldots$$

есть цепочка идеалов алгебры $A$. Легко видеть также, что цепочка

$$A^{\langle 1 \rangle} \supseteq A^{\langle 2 \rangle} \supseteq \ldots \supseteq A^{\langle n \rangle} \supseteq \ldots$$

есть цепочка правых идеалов этой алгебры, а если $A$ коммутативна или антикоммутативна, то эта цепочка состоит из идеалов. Алгебра $A$ нильпотентна, если $A^n = (0)$ для некоторого $n$, и правонильпотентна, если $A^{\langle n \rangle} = (0)$.

Предложение 1. *Пусть $A$ — коммутативная (антикоммутативная) алгебра. Тогда $A^{2^n} \subseteq A^{\langle n \rangle}$ для любого $n \geqslant 1$. Другими словами, если алгебра $A$ правонильпотентна индекса $n$, то она нильпотентна индекса не выше $2^n$.*

Доказательство. В силу коммутативности (антикоммутативности) алгебры $A$

$$A^{2^n} = \sum_{\substack{i+j=2^n \\ i \geqslant j}} A^i A^j \subseteq A^{2^{n-1}} A.$$

Тривиальная индукция дает $A^{2^n} \subseteq A^{\langle n \rangle}$, что и доказывает предложение.

Определим еще одну цепочку подмножеств в алгебре $A$, полагая $A^{(1)} = A^2$ и $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$. Назовем алгебру $A$ *разрешимой*, если $A^{(n)} = (0)$ для некоторого $n$. Минимальное такое $n$ называется *индексом разрешимости* алгебры $A$. Члены цепочки

$$A \supseteq A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq A^{(n)} \supseteq \ldots,$$

начиная с $A^{(2)}$, не являются, вообще говоря, идеалами в $A$.

Говорят, что алгебра локально обладает некоторым свойством, если этим свойством обладают все ее конечно-порожденные подалгебры. Таким образом, вводятся понятия *локальной нильпотентности*, *локальной разрешимости* и т. д.

Основным результатом данной главы является теорема Жевлакова, утверждающая, что всякая локально разрешимая йорданова алгебра является локально нильпотентной. Эта теорема будет доказана в третьем параграфе.

В заключение этого параграфа мы приведем два примера, показывающих, что разрешимые йордановы алгебры могут быть ненильпотентными.

Пример 1 (Жевлаков). Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — счетное множество символов. Рассмотрим множество слов в алфавите $X$ и назовем слово $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ *правильным*, если $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Множество правильных слов линейно упорядочим лексикографически, полагая $x_i > x_j$, если $i < j$, и если $u = vv_1$, то считаем $u > v$.

Рассмотрим поле $F$ характеристики $\neq 2,3$ и алгебру $A$ над $F$ с базисом из правильных слов алфавита $X$ и умножением на базисе, определенным правилом: если $u$, $v$ — правильные слова, то

1) $u*v = v*u$;
2) $u*v = 0$, если $\min(d(u), d(v)) > 1$;
3) $u*x_i = 0$, если $x_i$ входит в запись $u$;
4) $u*x_i = 0$, если $d(u) > 1$ и $x_i > u$;
5) $x_i*x_j = x_ix_j$, если $i < j$;
6) $u*x_i = (-1)^\sigma \langle ux_i\rangle$, если не применимы 1)—5).

Здесь $\langle ux_i\rangle$ — правильное слово, образованное всеми буквами слова $u$ и буквой $x_i$, и если $u = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_n}$, то $\sigma$ — число инверсий в перестановке $(j_1, j_2, \ldots, j_n, i)$.

В алгебре $A$ справедливо тождество Якоби:

$$(a*b)*c + (b*c)*a + (c*a)*b = 0 \tag{1}$$

для любых $a, b, c \in A$. Докажем это. Ясно, что если из трех слов $a$, $b$, $c$ два имеют длину $>1$ или имеют общий символ из $X$, то (1) справедливо. Аналогично, если $d(a) > 1$ и $d(b) = d(c) = 1$, но либо $b > a$, либо $c > a$, то (1) также верно. Оставшиеся два случая:

а) $a = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, $b = x_j$, $c = x_k$ и $a > b > c$;

б) $a = x_i$, $b = x_j$, $c = x_k$ и $a > b > c$

проверяются непосредственными вычислениями.

Докажем теперь, что $A$ — специальная йорданова алгебра. Ввиду (1), в алгебре умножений $R(A)$ для любых $a, b \in A$ справедливо соотношение

$$R_{a*b} = -R_aR_b - R_bR_a.$$

Определим теперь на векторном пространстве алгебры $R(A)$ другое умножение: $w_1 \cdot w_2 = -2w_1w_2$. Легко видеть,

что полученная таким образом новая алгебра $\overline{R(A)}$ также ассоциативна. Кроме того, для любых $a, b \in A$ в $\overline{R(A)}$ справедливо соотношение

$$R_{a*b} = \frac{1}{2}(R_a \cdot R_b + R_b \cdot R_a),$$

которое показывает, что отображение $\varphi\colon A \to \overline{R(A)}$, переводящее $a \in A$ в $R_a \in \overline{R(A)}$, является гомоморфизмом алгебры $A$ в $\overline{R(A)}^{(+)}$. Легко видеть, что ядро $\varphi$ равно нулю, т. е. $\varphi$ — изоморфизм. Это доказывает специальность и йордановость алгебры $A$.

Как видно из таблицы умножения, алгебра $A$ разрешима индекса 2: $A^{(2)} = (0)$ и, кроме того, в $A$ справедливо тождество $x^3 = 0$, однако $A$ не является нильпотентной, так как произведение

$$(\ldots((x_1 * x_2) * x_3) \ldots) * x_n$$

не равно нулю ни для какого $n$.

Пример 2 (Шестаков). Пусть $M$ — векторное пространство над полем $F$ с базисом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $\bigwedge(M)$ — его внешняя алгебра и $\bigwedge^0(M)$ — подалгебра алгебры $\bigwedge(M)$, порожденная множеством $M$. Рассмотрим пространство $A = \bigwedge^0(M) \oplus M$ и определим умножение на $A$ правилом

$$(u + x)(v + y) = v \wedge x + u \wedge y,$$

где $u, v \in \bigwedge^0(M)$, $x, y \in M$. Легко видеть, что алгебра $A$ йорданова, разрешима индекса 2, удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$, но не является нильпотентной.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что всякая правонильпотентная (левонильпотентная) алгебра является разрешимой.

**2.** Пусть $A$ — йорданова алгебра. Доказать, что

$$A^{2(n-1)} \subseteq A^{\langle n \rangle}.$$

**3.** Пусть $A$ — алгебра. Положим $A^{(1)n} = A^n$ и $A^{(i+1)n} = (A^{(i)n})^n$. Назовем алгебру *n-разрешимой*, если $A^{(i)n} = (0)$ для некоторого $i$. Доказать, что если $2^k > n$, то

$$A^{(ki)} \subseteq A^{(i)n} \subseteq A^{(i)}.$$

Вывести отсюда эквивалентность всех понятий $n$-разрешимости между собой.

4 (Ж е в л а к о в). Пусть $A$ — алгебра над произвольным полем $F$ с базисом $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и умножением на базисе

$$x_i x_j = \begin{cases} x_{i-j}, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leqslant j. \end{cases}$$

Доказать, что алгебра $A$ проста и локально правонильпотентна.

## § 2. Нормальная форма элементов алгебры умножений

Пусть $J = \mathrm{J}[X]$ — свободная йорданова Ф-алгебра от счетного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ свободных порождающих. Как мы видели в § 1.3, многообразие йордановых Ф-алгебр (при наличии элемента $^1/_2$ в Ф) является однородным и для элементов алгебры $J$ корректно определены понятия однородности и степени. Степень одночлена $u \in J$ будем обозначать через $d(u)$.

Всякое выражение вида

$$w = R_{a_1} R_{a_2} \ldots R_{a_n},$$

где все $a_i$ являются одночленами алгебры $J$, будем называть *словом* в алгебре правых умножений $R(J)$. Число $n$ назовем *длиной слова* $w$, а число $\sum_{i=1}^{n} d(a_i)$ — его *степенью*. Последовательность $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$, где $l_i$ — суммарная степень одночленов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по $x_i$, назовем *составом* слова $w$.

Допустим теперь, что множество всех одночленов алгебры $J$ произвольным образом линейно упорядочено. В этом случае слова вида

$$R_{b_1} R_{c_1} R_{b_2} R_{c_2} \ldots R_{b_n} \hat{R}_{c_n}$$

($R_{c_n}$ может как присутствовать, так и нет), где $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ и $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$, назовем *нормальными*.

Л е м м а 1 (л е м м а Ж е в л а к о в а о н о р м а л ь н о й ф о р м е). *Всякое слово $w \in R(J)$ представимо в виде линейной комбинации нормальных слов того же состава, что и $w$, с коэффициентами вида $\frac{k}{2^m}$, где $k, m \in \mathbf{Z}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Слова длины 1 и 2 являются нормальными; проведем индукцию по длине слова $w$. Пусть длина $w$ равна $n$. Введем на словах длины $n$ из

$R(J)$ лексикографическую упорядоченность, полагая

$$R_{u_1}R_{u_2}\ldots R_{u_n} > R_{v_1}R_{v_2}\ldots R_{v_n},$$

если для некоторого $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем $u_i = v_i$ для $i < l$ и $u_l > v_l$.

Допустим, что слово $w = R_{a_1}R_{a_2}\ldots R_{a_n}$ не является нормальным. Тогда оно содержит либо подслово вида $R_aR_bR_a$, либо подслово вида $R_aR_bR_c$, где $a > c$. В первом случае в силу соотношения (3.26) слово $w$ выражается через слова меньшей длины того же состава

$$w = w'R_aR_bR_aw'' = \frac{1}{2}w'R_{a^2}R_bw'' + w'R_{ab}R_aw'' - \frac{1}{2}w'R_{a^2b}w''$$

и потому представимо в нужном виде по индуктивному предположению.

Во втором случае то же соотношение позволяет представить слово $w$ следующим образом:

$$w = w'R_aR_bR_cw'' = -w'R_cR_bR_aw'' + \\ + w'(R_{ab}R_c + R_{ac}R_b + R_{bc}R_a - R_{(ac)b})w''.$$

Слово $w$ представлено в виде линейной комбинации слов того же состава, находящихся в условиях индуктивного предположения, и слова $w'R_cR_bR_aw''$, которое лексикографически меньше слова $w$. Ввиду того, что слов фиксированного состава в $R(J)$ конечное число, описанный процесс ликвидации беспорядков конечен. Это означает, что через конечное число шагов слово $w$ представится в виде линейной комбинации нормальных слов.

Лемма доказана.

Пусть $J_n = \mathrm{J}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — свободная йорданова алгебра от порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она естественным образом вкладывается в $J$, и впредь мы будем считать ее подалгеброй алгебры $J$.

Лемма 2 (Жевлаков). *Для всякого натурального числа $k \geqslant 1$ существует такое число $h(n, k)$, что любое слово $w \in R^J(J_n)$ степени $h(n, k)$ представляется в виде линейной комбинации слов того же состава, каждое из которых содержит оператор правого умножения на одночлен степени $\geqslant k$.*

Доказательство. Положим по определению

$$h(n, k) = 1 + 2\sum_{j=1}^{k-1} jP_{n,j},$$

где $P_{n,j}$ — число различных одночленов из $J_n$ степени $j$. Докажем, что число $h(n, k)$ удовлетворяет условиям леммы. Пусть $w \in R^J(J_n)$ имеет степень $h(n, k)$. Упорядочим одночлены из $J$ так, чтобы одночлены большей степени были больше, и представим $w$ в виде линейной комбинации нормальных слов:

$$w = \sum \alpha_l w_l.$$

Покажем, что всякое нормальное слово $w_l$ в этом разложении содержит оператор умножения на одночлен степени $\geqslant k$. Предположим противное: пусть

$$w_l = R_{b_1} R_{c_1} R_{b_2} R_{c_2} \ldots R_{b_m} \hat{R}_{c_m}$$

и степени всех одночленов $b_i$ и $c_i$ строго меньше $k$. Ввиду того, что $b_1 < b_2 < \ldots < b_m$, все одночлены $b_i$ различны. Поэтому

$$m \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} P_{n,j},$$

и суммарная степень одночленов $b_i$ не превосходит числа

$$\sum_{j=1}^{k-1} jP_{n,j}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для одночленов $c_i$. Следовательно, степень слова $w_l$ не превосходит

$$2 \sum_{j=1}^{k-1} jP_{n,j}.$$

Но это число строго меньше $h(n, k)$. Противоречие доказывает лемму.

Теорема 1 (Жевлаков). *Пусть $B$ — йорданова алгебра и $A$ — ее локально нильпотентная подалгебра. Тогда алгебра $R^B(A)$ локально нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ — произвольное конечное подмножество в $R^B(A)$. В запись $w_1, w_2, \ldots, w_k$ входит лишь конечное число операторов $R_{a_1}, R_{a_2}, \ldots R_{a_n}$, $a_i \in A$. Достаточно показать, что эти операторы порождают нильпотентную подалгебру. Рассмотрим подалгебру $A_0 \subseteq A$, порожденную элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Она нильпотентна некоторого индекса $N$. Покажем, что любое произведение $h = h(n, N)$ операто-

ров множества $\{R_{a_1}, R_{a_2}, \ldots, R_{a_n}\}$ равно нулю. Пусть $R_{a_{i_1}} R_{a_{i_2}} \ldots R_{a_{i_h}}$ — такое произведение. Рассмотрим слово $w = R_{x_{i_1}} R_{x_{i_2}} \ldots R_{x_{i_h}}$ из $R^J(J_n)$. В силу леммы 2 слово $w$ представляется в виде линейной комбинации слов, каждое из которых содержит оператор правого умножения на одночлен степени $\geqslant N$:

$$w = \sum \alpha_j w_j' R_{u_j(x_1, \ldots x_n)} w_j'', \; d(u_j) \geqslant N.$$

В частности, действие правой и левой части равенства на элемент $x_{n+1}$ одинаково:

$$x_{n+1} w = x_{n+1} \sum \alpha_j w_j' R_{u_j(x_1, \ldots x_n)} w_j''.$$

Это равенство выполняется в свободной йордановой алгебре $J$. Оно сохранится, если вместо порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставить элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а вместо $x_{n+1}$ — произвольный элемент $b \in B$. Ввиду нильпотентности алгебры $A_0$, получим

$$b R_{a_{i_1}} R_{a_{i_2}} \ldots R_{a_{i_h}} = 0,$$

т.е. $R_{a_{i_1}} R_{a_{i_2}} \ldots R_{a_{i_h}} = 0$ в $R(B)$. Теорема доказана.

**Упражнения**

Во всех упражнениях $A$ и $B$ — йордановы алгебры, причем $A$ — подалгебра алгебры $B$.

**1.** Доказать, что из конечной порожденности алгебры $A$ следует конечная порожденность алгебры $R^B(A)$.

**2.** Доказать, что алгебра $A$ локально нильпотентна тогда и только тогда, когда ее алгебра правых умножений $R(A)$ локально нильпотентна.

**3.** Доказать, что если $A$ конечномерна, то и $R^B(A)$ конечномерна.

**4.** Доказать, что все алгебры семейства $\{R^C(A)\}$, где $A$ фиксирована, а $C$ пробегает класс всех ее йордановых надалгебр, являются гомоморфными образами некоторой алгебры $R^*(A)$ этого семейства. Какова алгебра $R^*(A)$, если $A$ — алгебра с нулевым умножением?

Указание. Для доказательства существования алгебры $R^*(A)$ воспользоваться конструкцией свободных произведений алгебр (см., например, Мальцев А. И., Алгебраические системы, «Наука», 1970, стр. 306).

## § 3. Теорема Жевлакова

Для многих целей в йордановой алгебре $A$ вместо цепочки подмножеств $A^{(i)}$ удобно рассматривать цепочку

$$A \supseteq A^{[1]} \supseteq A^{[2]} \supseteq \ldots \supseteq A^{[n]} \supseteq \ldots,$$

где $A^{[1]} = A^3$ и $A^{[i+1]} = (A^{[i]})^3$. Эта цепочка является в йордановой алгебре $A$ цепочкой идеалов, так как справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $B$ и $C$ — идеалы йордановой алгебры $A$. Тогда $(BC)\,C + BC^2$ — также идеал в $A$. В частности, если $I$ — идеал в $A$, то $I^3$ — также идеал.*

Доказательство. Пусть $b \in B$, $c, d \in C$, $a \in A$. Тогда по тождеству (3.22)

$$[(bc)\,d]\,a = -[(ba)\,d]\,c - b\,[(ac)\,d] + (bc)\,(ad) + (bd)\,(ac) + (ba)\,(cd) \in (BC)\,C + BC^2,$$

и, далее, в силу (3.24)

$$[b\,(cd)]\,a = -[b\,(ac)]\,d - [b\,(ad)]\,c + (bc)\,(ad) + (bd)\,(ac) + (ba)\,(cd) \in (BC)\,C + BC^2.$$

Мы видим, что $(BC)\,C + BC^2$ — идеал в $A$, и лемма доказана.

Лемма 4. *В произвольной алгебре $A$ справедливы включения*

$$A^{(2i)} \subseteq A^{[i]} \subseteq A^{(i)},$$

*так что «кубическая разрешимость» эквивалентна обычной разрешимости. В йордановой алгебре $A$ всякий ненулевой разрешимый идеал $I$ содержит ненулевой нильпотентный идеал алгебры $A$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается очевидной индукцией. Допустим теперь, что в йордановой алгебре $A$ имеется разрешимый идеал $I$. Если $n$ — индекс его разрешимости, то в силу первого утверждения леммы $I^{[n]} = (0)$. Однако в цепочке

$$I \supseteq I^{[1]} \supseteq \ldots \supseteq I^{[n]} = (0)$$

все члены являются идеалами и для некоторого члена $Q$ этой цепочки $Q^3 = (0)$, но $Q \neq (0)$. Лемма доказана.

Лемма 5 (Жевлаков). *Для любых двух натуральных чисел $m$ и $n$ существует число $f\,(n, m)$ такое,*

*что для всякой йордановой алгебры $A$ с $n$ порождающими*

$$A^{f(n,\, m)} \subseteq A^{[m]}.$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму в случае, когда $A = J_n$ — свободная йорданова алгебра с $n$ порождающими; это же число $f(n, m)$ будет годиться и в общем случае. Ввиду того, что $A^3 = A^{[1]}$, имеем $f(n, 1) = 3$, что дает нам основание для индукции по $m$.

Допустим, что число $f(n, m-1)$ найдено. Пусть

$$M = \sum_{j=1}^{f(n,\, m-1)} P_j$$

есть число различных одночленов степени $\leqslant f(n, m-1)$ в $J_n$ и $h$ — функция из леммы 2. Докажем, что в качестве $f(n, m)$ можно взять число $2^N$, где

$$N = f(n, m-1) + (M+2)\, h(n, f(n, m-1)).$$

В силу предложения 1 нам достаточно доказать, что

$$A^{\langle N \rangle} \subseteq A^{[m]}.$$

Рассмотрим произвольный элемент из $A^{\langle N \rangle}$; он является суммой одночленов вида $aw$, где $a \in A$ и $w$ — слово из $R(A)$ длины $N-1$. Разобьем слово $w$ на подслова:

$$w = w_0 w_1 w_2 \ldots w_{M+2}$$

так, чтобы длина слова $w_0$ была равна $f(n, m-1) - 1$, а длины остальных равнялись числу $h(n, f(n, m-1))$. Применяя к словам $w_1, w_2, \ldots, w_{M+2}$ лемму 2, можем считать, что слово $w_1 w_2 \ldots w_{M+2}$ содержит $M+2$ оператора $R_{u_1}, R_{u_2}, \ldots, R_{u_{M+2}}$, где $d(u_i) \geqslant f(n, m-1)$ и, следовательно, $u_i \in A^{[m-1]}$. Заметим также, что $u_0 = aw_0 \in A^{[m-1]}$, так как $d(aw_0) = f(n, m-1)$. Нам предстоит теперь доказать, что всякий одночлен вида

$$b = u_0 w'_0 R_{u_1} w'_1 R_{u_2} \ldots w'_{M+1} R_{u_{M+2}} w'_{M+2}$$

лежит в $A^{[m]}$, где $w'_s = R_{a_{s1}} R_{a_{s2}} \ldots R_{a_{sk_s}}$, $a_{ij} \in A$, причем без ограничения общности можем считать, что $a_{ij} \notin A^{[m-1]}$ и, в частности, $d(a_{ij}) < f(n, m-1)$.

Покажем, что все $w'_s$, где $s = 1, 2, \ldots, M+1$, можно считать либо пустыми, либо состоящими из одного оператора. Действительно, если $w'_1 = w''_1 R_{a_1} R_{a_2}$, то согласно

(3.26) подслово $R_{a_1}R_{a_2}R_{u_2}$ можно заменить на сумму

$$-R_{u_2}R_{a_2}R_{a_1}-R_{(a_1u_2)a_2}+R_{a_1a_2}R_{u_2}+R_{a_1u_2}R_{a_2}+R_{a_2u_2}R_{a_1},$$

в результате чего слово $w'_0R_{u_1}w'_1R_{u_2}\ \ldots\ R_{u_{M+2}}w'_{M+2}$ представится в виде линейной комбинации слов такого же вида, но с меньшей длиной подслова, стоящего между первым и вторым операторами вида $R_u$, где $u\in A^{[m-1]}$. Последовательное применение таких преобразований позволяет сократить длину этого подслова до нужной величины. Те же операции проделаем со словами $w'_2, \ldots$ $\ldots, w'_{M+1}$.

Рассмотрим случай, когда одно слово из $w'_1, w'_2, \ldots$ $\ldots, w'_{M+1}$ является пустым, например, $w'_s$. Тогда, так как $A^{[m-1]}$ и $A^{[m]}$ — идеалы в $A$, имеем

$$b=u_0w'_0R_{u_1}w'_1\ldots w'_{s-1}R_{u_s}R_{u_{s+1}}\ldots\in(A^{[m-1]})^3=A^{[m]}.$$

Осталось рассмотреть случай, когда слова $w'_1, w'_2, \ldots$ $\ldots, w'_{M+1}$ состоят из одного оператора: $w'_i=R_{a_i}$, $i=$ $=1, 2, \ldots, M+1$, и $d(a_i)<f(n, m-1)$. Имеем

$$b=u_0w'_0R_{u_1}R_{a_1}\ldots R_{u_{M+1}}R_{a_{M+1}}R_{u_{M+2}}w'_{M+2}.$$

Преобразуем $b$ по тождеству (3.25). Тогда в силу доказанного выше получим

$$b=u_0w'_0\ldots R_{u_i}R_{a_i}R_{u_{i+1}}R_{a_{i+1}}R_{u_{i+2}}\ldots w'_{M+2}=$$
$$=-u_0w'_0\ldots R_{u_i}R_{a_{i+1}}R_{u_{i+1}}R_{a_i}R_{u_{i+2}}\ldots w'_{M+2}+b',$$

где $b'\in A^{[m]}$. Значит, перемена мест операторов $R_{a_i}$ и $R_{a_{i+1}}$ с точностью до слагаемых из $A^{[m]}$ меняет знак элемента $b$. Заметим теперь, что среди одночленов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_{M+1}$ найдутся два одинаковых. Действительно, $d(a_i)<f(n, m-1)$, а $M$ — число различных одночленов из $J_n$ степени $<f(n, m-1)$. Наличие двух одинаковых одночленов влечет теперь, что $2b\in A^{[m]}$, откуда следует, что $b\in A^{[m]}$. На этом доказательство леммы заканчивается.

Теорема 2 (Жевлаков). *Всякая разрешимая конечнопорожденная йорданова алгебра нильпотентна.*

Доказательство. Пусть йорданова алгебра $A$ разрешима индекса $m$ и имеет $n$ порождающих. В силу леммы 4 имеем $A^{[m]}=(0)$, а в силу леммы 5 отсюда вытекает, что $A^{f(n, m)}=(0)$. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая локально разрешимая йорданова алгебра локально нильпотентна.*

Другой способ доказательства теоремы 2, предложенный Шестаковым, приводится в упражнениях к этому параграфу.

**Упражнения**

1. Пусть $A$ — алгебра, $I$ — идеал в $A$. Доказать, что если идеал $I$ нильпотентен, то и алгебра $R^A(I)$ нильпотентна.

2. Пусть $A$ — йорданова алгебра, $I$ — идеал алгебры $A$ такой, что $A^2 \subseteq I$ и $A = I + \Phi \cdot v$, где $v \in A$. Доказать, что

$$[R(A)]^3 \subseteq R^A(I) + R^A(I) \cdot R(A).$$

3. Доказать, что в условиях упражнения 2 нильпотентность идеала $I$ влечет нильпотентность алгебры $A$.

4. Пусть $A$ — конечнопорожденная йорданова алгебра. Доказать, что нильпотентность $A^2$ влечет нильпотентность всей алгебры $A$.

5. Доказать, что если йорданова алгебра $A$ конечнопорождена, то и алгебра $A^2$ является конечнопорожденной.

Указание. Сначала доказать это утверждение для свободной йордановой алгебры $J$ с тем же числом порождающих, для чего установить существование числа $N$ такого, что $J^N \subseteq (J^2)^3$, и воспользоваться однородностью многообразия йордановых алгебр.

6. Доказать теорему Жевлакова, используя упражнения 4 и 5.

## § 4. Йордановы ниль-алгебры

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 3 (Алберт — Жевлаков). *Пусть $A$ — йорданова ниль-алгебра над кольцом $\Phi$, содержащим элемент $1/2$. Тогда если $A$ удовлетворяет условию максимальности для $\Phi$-подалгебр, то она нильпотентна.*

Доказательство. Все однопорожденные подалгебры в $A$ нильпотентны, поэтому в силу условия максимальности в $A$ найдется максимальная нильпотентная подалгебра $B$. Во всякой алгебре с условием максимальности для подалгебр все подалгебры конечнопорождены, следовательно, $B$ конечнопорождена. Более того, так как $B$ нильпотентна, она является конечнопорожденным $\Phi$-модулем: $B = \Phi \cdot e_1 + \ldots + \Phi \cdot e_n$. Отсюда следует, что в алгебре $R(A)$ правых умножений алгебры $A$ подалгебра

$R^A(B)$ порождается операторами $R_{e_1}, \ldots, R_{e_n}$ и по теореме 1 является нильпотентной некоторого индекса $m$.

Допустим, что $B \neq A$. Найдем тогда элемент $a \in A \setminus B$ такой, что $aB \subseteq B$. Возьмем произвольный элемент $a_0 \in A \setminus B$. Если он не является искомым, то существует элемент $b_1 \in B$ такой, что $a_1 = a_0 b_1 \notin B$. Если и $a_1$ не является искомым, то существует $b_2 \in B$ такой, что $a_2 = a_1 b_2 \notin B$, и т. д. Ввиду того, что для любых $b_1, \ldots, b_m \in B$ элемент $a_0 R_{b_1} \ldots R_{b_m}$ равен нулю и, следовательно, принадлежит $B$, среди элементов $a_1, \ldots, a_{m-1}$ обязательно должен найтись искомый элемент $a$.

Возможны два случая:

1. $a^2 B \subseteq B$. В силу предложения 3.2 оператор $R_{a^t}$ для любого $t \geqslant 1$ лежит в подалгебре, порожденной операторами $R_a$ и $R_{a^2}$, поэтому в этом случае $a^t B \subseteq B$ для любого $t \geqslant 1$. Ввиду нильпотентности элемента $a$, найдется такое $p \geqslant 1$, что $a^p \notin B$, но $(a^p)^2 \in B$. Обозначим элемент $a^p$ через $s$. Элемент $s$ обладает следующими свойствами:

$$s \notin B, \quad s^2 \in B, \quad sB \subseteq B. \tag{2}$$

2. Существует элемент $c \in B$ такой, что $a^2 c \notin B$. В этом случае мы покажем, что элемент $a^2 c$ удовлетворяет свойствам (2) и его можно взять в качестве $s$. В силу тождества (3.23) для любого $b \in B$

$$(a^2 c)\, b = -2\,[(ab)\, c]\, a + [a\,(ac)]\, b + {} \\ + [a\,(ab)]\, c + [a\,(bc)]\, a \in B. \tag{3}$$

Кроме того, (3.23) дает

$$(a^2 c)^2 = -2\{[a\,(a^2 c)]\, c\}\, a + [a\,(ac)]\,(a^2 c) + {} \\ + \{a\,[(a^2 c)\, a]\}\, c + \{a\,[(a^2 c)\, c]\}\, a.$$

Второе и четвертое слагаемые правой части этого равенства лежат в $B$ согласно (3). Рассмотрим первое. В силу (3)

$$\{[a\,(a^2 c)]\, c\}\, a = \{[(a^2 c)\, a]\, c\}\, a = \{[a^2\,(ca)]\, c\}\, a \in B.$$

Аналогично имеем

$$\{a\,[(a^2 c)\, a]\}\, c = \{a\,[a^2\,(ca)]\}\, c = \{a^2\,[(ca)\, a]\}\, c \in B.$$

Итак, $(a^2 c)^2 \in B$ и элемент $a^2 c$ удовлетворяет условиям (2). Обозначим его через $s$.

Рассмотрим множество $B_1 = B + \Phi \cdot s$. В силу свойств элемента $s$ $B_1$ — подалгебра алгебры $A$, строго содержащая $B$. Ввиду того, что $B_1^2 \subseteq B$, она является разрешимой конечнопорожденной алгеброй. По теореме Жевлакова $B_1$ нильпотентна, что противоречит максимальности $B$. Теорема доказана.

Следствие (Алберт). *Всякая конечномерная йорданова ниль-алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$ нильпотентна.*

Результат Алберта можно усилить. Как показал Шестаков, всякая йорданова Ф-алгебра, порожденная как Ф-модуль конечным множеством нильпотентных элементов, является нильпотентной.

## § 5. Локально нильпотентный радикал

*Локально нильпотентным радикалом* алгебры $A$ называется такой локально нильпотентный идеал $\mathcal{L}(A)$, что фактор-алгебра $A/\mathcal{L}(A)$ не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов. Так как гомоморфный образ локально нильпотентной алгебры есть локально нильпотентная алгебра, идеал $\mathcal{L}(A)$ содержит любой другой локально нильпотентный идеал алгебры $A$.

В этом параграфе мы покажем, что во всякой йордановой алгебре локально нильпотентный радикал существует, и докажем важную теорему Скосырского о связи локально нильпотентного радикала специальной йордановой алгебры с локально нильпотентным радикалом ее ассоциативной обертывающей алгебры.

Лемма 6. *Пусть $J$ — конечнопорожденная йорданова алгебра. Тогда ее идеалы $J^{[k]}$ также являются конечнопорожденными алгебрами.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $J^3$ — конечно порожденная алгебра. Кроме того, очевидно, можно считать, что $J$ — свободная йорданова алгебра. Пусть, для определенности, $J$ имеет $n$ порождающих. Тогда по лемме 5 $J^{f(n,2)} \subseteq J^{[2]}$, т. е. всякий одночлен $u$ степени $\geqslant f(n, 2)$ представляется в виде

$$u = \sum_i (v_i w_i)\, t_i,$$

где $v_i$, $w_i$, $t_i$ — одночлены из $J^3$. В силу однородности многообразия йордановых алгебр можно считать, что $d(v_i) + d(w_i) + d(t_i) = d(u)$ для любого $i$. Это значит, что в качестве порождающих алгебры $J^3$ можно взять все одночлены $v$ алгебры $J$, для которых $3 \leqslant d(v) \leqslant f(n, 2)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если идеал $I$ йордановой алгебры $J$ и фактор-алгебра $J/I$ локально нильпотентны, то и алгебра $J$ локально нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $J_0$ — конечнопорожденная подалгебра в $J$. В силу локальной нильпотентности фактор-алгебры $J/I$ мы имеем $J_0^{[k]} \subseteq I$ для некоторого $k$. Так как $I$ локально нильпотентен, а подалгебра $J_0^{[k]}$ конечнопорождена, существует такое число $m$, что $(0) = (J_0^{[k]})^{[m]} = J_0^{[k+m]}$. Подалгебра $J_0$ является, таким образом, разрешимой. По теореме Жевлакова она нильпотентна. Лемма доказана.

Теорема 4 (Жевлаков). *Всякая йорданова алгебра имеет локально нильпотентный радикал.*

Доказательство. Рассмотрим в йордановой алгебре $J$ сумму $\mathscr{L}(J)$ всех локально нильпотентных идеалов. Если $L_1$ и $L_2$ — два таких идеала, то по второй теореме о гомоморфизмах

$$L_1 + L_2/L_1 \cong L_2/L_2 \cap L_1,$$

откуда в силу леммы 7 следует, что $L_1 + L_2$ — также локально нильпотентный идеал. Легко теперь видеть, что сумма конечного числа локально нильпотентных идеалов есть локально нильпотентный идеал. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — конечное число элементов из $\mathscr{L}(J)$. Все эти элементы лежат в сумме конечного числа локально нильпотентных идеалов и потому порождают нильпотентную подалгебру. Следовательно, идеал $\mathscr{L}(J)$ локально нильпотентен. Фактор-алгебра $J/\mathscr{L}(J)$ не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов ввиду леммы 7. Значит, $\mathscr{L}(J)$ — локально нильпотентный радикал алгебры $J$. Теорема доказана.

Перейдем к изучению связи локально нильпотентного радикала специальной йордановой алгебры с локально нильпотентным радикалом ее ассоциативной обертывающей. Заметим, что во всякой ассоциативной алгебре

справедливо соотношение

$$x (y \odot z) = (x \odot y) z + (x \odot z) y - \{yxz\}. \qquad (4)$$

Лемма 8. *В свободной ассоциативной алгебре* Ass $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *для любого однородного йорданова многочлена* $j(x_1, \ldots, x_n)$ *существуют однородные линейные по* $x_0$ *йордановы многочлены* $j_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *такие, что*

$$x_0 j(x_1, \ldots, x_n) = \\ = j_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} j_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) x_i, \qquad (5)$$

*причем* $d(j_0) - 1 = d(j_i) = d(j)$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $j$ — йорданов одночлен. Проведем индукцию по степени $d(j)$ этого одночлена. Если $d(j) = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $d(j) = m \geqslant 2$. Тогда $j = j_1 \odot j_2$, где $d(j_k) < m$, $k=1, 2$. В силу соотношения (4)

$$x_0 j = x_0 (j_1 \odot j_2) = (x_0 \odot j_1) j_2 + (x_0 \odot j_2) j_1 - \{j_1 x_0 j_2\}. \quad (6$$

По предположению индукции для многочлена $x_0 j_2$ представление вида (5) существует. Подставляя в него вместо $x_0$ многочлен $x_0 \odot j_1$, получим аналогичное представление для $(x_0 \odot j_1) j_2$. Таким же образом наличие искомого представления для $x_0 j_1$ влечет наличие такого же представления для $(x_0 \odot j_2) j_1$. В силу (6) понятно теперь, что и $x_0 j$ представляется в требуемом виде. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $j'(x)$, $j''(x)$ — *однородные йордановы многочлены в* Ass $[x_1, \ldots, x_n]$. *Тогда существуют однородные йордановы многочлены* $j_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *такие, что*

$$j'(x) j''(x) = j_0(x) + \sum_{i=1}^{n} j_i(x) x_i, \qquad (7)$$

*причем* $d(j_0) = d(j_i) + 1 = d(j') + d(j'')$.

Доказательство. По лемме 8

$$x_0 j''(x_1, \ldots, x_n) = \\ = j''_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} j''_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) x_i.$$

Подставляя в это выражение $j'(x)$ вместо $x_0$, мы получим соотношение (7). Следствие доказано.

Лемма 9. *Для любого линейного по $x_0$ однородного йорданова многочлена $j(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и любого одночлена $v(x_1, \ldots, x_n)$ найдутся линейные по $x_0$ однородные йордановы многочлены $j_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и полилинейные одночлены $v_i(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что*

$$j(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, v(x_1, \ldots, x_n) = \\ = j_0(x_0, x_1, \ldots, x_n) + \sum_i j_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, v_i(x_1, \ldots, x_n),$$

*причем $d(j) + d(v) = d(j_0) = d(j_i) + d(v_i)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $d(v)$. Если $d(v) = 1$, то все очевидно. Пусть $d(v) = m > 1$ и для одночленов меньшей длины все доказано. Введем следующее обозначение: будем писать $p \equiv q$, если разность $p - q$ удовлетворяет условиям индуктивного предположения. В силу соотношений (5) и (7) ясно, что

$$j(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, x_{i_1} \ldots (x_{i_s} \odot x_{i_{s+1}}) \ldots x_{i_m} \equiv 0.$$

Поэтому

$$j(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, x_{i_1} \ldots x_{i_s} x_{i_{s+1}} \ldots x_{i_m} \equiv \\ \equiv - j(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, x_{i_1} \ldots x_{i_{s+1}} x_{i_s} \ldots x_{i_m}.$$

Очевидно теперь, что если в одночлене $v(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ есть две одинаковые переменные, то

$$j(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, v(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Для всякого одночлена $v(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры $\mathrm{Ass}[x_1, \ldots, x_n]$ существуют однородные йордановы многочлены $j_i(x_1, \ldots, x_n)$ и полилинейные одночлены $v_i(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что*

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \\ = j_0(x_1, \ldots, x_n) + \sum_i j_i(x_1, \ldots, x_n)\, v_i(x_1, \ldots, x_n),$$

*где $d(v) = d(j_0) = d(j_i) + d(v_i)$.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 9 для $j(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0$, а потом специализировать $x_0$ в единицу 1 алгебры $\mathrm{Ass}[x_1, \ldots, x_n]^{\#}$.

Предложение 2. *Если специальная йорданова алгебра $J$ от $n$ порождающих нильпотентна индекса $m$, то ее ассоциативная обертывающая алгебра $A$ также нильпотентна и индекс ее нильпотентности не превосходит $m + n$.*

Доказательство. Если $a_1, \ldots, a_n$ — порождающие алгебры $J$, то они порождают и алгебру $A$. По следствию леммы 9, если ассоциативный одночлен $v(x_1, \ldots, x_n)$ имеет степень, не меньшую чем $m + n$, то $v(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Следовательно, $A^{m+n} = (0)$. Предложение доказано.

Следствие. *Если $J$ — специальная локально нильпотентная йорданова алгебра, то всякая ее ассоциативная обертывающая алгебра локально нильпотентна.*

Теорема 5 (Скосырский). *Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра и $A$ — ее ассоциативная обертывающая. Тогда для их локально нильпотентных радикалов справедливо соотношение*

$$\mathcal{L}(J) = J \cap \mathcal{L}(A).$$

Доказательство. Включение $J \cap \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(J)$ очевидно. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что множество $I = \mathcal{L}(J) A^{\#}$ является в $A$ локально нильпотентным идеалом. Понятно, что $I$ — правый идеал. Для доказательства того, что $I$ — левый идеал, достаточно заметить, что для любых элементов $x \in J$, $l \in \mathcal{L}(J)$

$$xl = -lx + 2l \odot x. \qquad (8)$$

Так как $2l \odot x \in \mathcal{L}(J)$ и алгебра $A$ порождается множеством $J$, имеем $A\mathcal{L}(J) \subseteq \mathcal{L}(J) A^{\#}$, откуда следует, что $I$ — левый идеал в $A$, а следовательно и идеал.

Покажем, что этот идеал локально нильпотентен. Зафиксируем некоторое множество $\{a_\alpha\}$ порождающих алгебры $J$, а следовательно и алгебры $A$. Достаточно доказать, что любое конечное множество $M$ элементов вида $lv(a_1, \ldots, a_k)$, где $l$ пробегает конечное множество $L_0 \subseteq \mathcal{L}(J)$, а $v$ — некоторое множество слов (быть может, пустых), порождает в $A$ нильпотентную подалгебру. Отметим, что в силу леммы 9 все слова $v$ можно считать полилинейными.

Для каждого натурального числа $p$ рассмотрим множество $L_p$ элементов вида $j(l, a_1, \ldots, a_k)$, где $l \in L_0$, а $j(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ — линейный по $x_0$ йорданов одночлен степени $p+1$ с коэффициентом, равным единице. Ясно, что $L_p \subseteq \mathscr{L}(J)$. Множества $L_p$ конечны, и потому в силу предложения 2 порождают в $A$ нильпотентные подалгебры. Пусть $t$ — индекс нильпотентности подалгебры, порожденной множеством $L_{2k}$. Покажем, что произведение любых $t$ элементов из $M$ также равно нулю. Рассмотрим некоторое такое произведение:

$$b = l_1 v_1(a_1, \ldots, a_k)\, l_2 v_2(a_1, \ldots, a_k) \ldots l_t v_t(a_1, \ldots, a_k).$$

Выражение $v_1(a_1, \ldots, a_k)\, l_2$ с помощью соотношения (8) можно преобразовать в сумму выражений вида $l'_2 v'_1(a_1, \ldots, a_k)$, где $l'_2 \in L_k$, $v'_1$ — полилинейный одночлен. Каждое произведение вида

$$l'_2 v'_1(a_1, \ldots, a_k)\, v_2(a_1, \ldots, a_k)$$

можно по лемме 9 представить в виде суммы элементов вида $l''_2 v''_1(a_1, \ldots, a_k)$, где $l''_2 \in L_{2k}$, $v''_1$ — полилинейный одночлен. Далее этот процесс повторяем, но уже с произведением $v''_1(a_1, \ldots, a_k)\, l_3$, и т. д. В конце концов, получим представление произведения $b$ в виде суммы произведений вида

$$l_1 l''_2 l''_3 \ldots l''_t v_t(a_1, \ldots, a_k),$$

где $l''_i \in L_{2k}$. Каждое из таких произведений равно нулю, так как $t$ — индекс нильпотентности подалгебры, порожденной множеством $L_{2k}$. Следовательно, и $b = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если йорданова алгебра $J$ специальна, то и фактор-алгебра $J/\mathscr{L}(J)$ также специальна.*

Доказательство. Пусть $I$ — идеал ассоциативной обертывающей алгебры $A$, порожденный множеством $\mathscr{L}(J)$. В силу теоремы Скосырского имеет место равенство $I \cap J = \mathscr{L}(J)$, и специальность фактор-алгебры $J/\mathscr{L}(J)$ вытекает из леммы 3.4. Следствие доказано.

## ЛИТЕРАТУРА

Джекобсон [47], Жевлаков [69], Жевлаков и Шестаков [80], Лю Шао-сюэ [112], Скосырский [194], Слинько [208], Цай [257], Шестаков [266, 267].

*ГЛАВА 5*

# АЛГЕБРЫ С ТОЖДЕСТВЕННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

Теория ассоциативных алгебр с тождественными соотношениями (PI-алгебр) к настоящему времени достаточно развита и содержит целый ряд различных направлений. Настоящая глава посвящена одному из них, возникшему в связи с известной проблемой Куроша: «Будет ли всякая алгебраическая алгебра локально конечной?»

Для ассоциативных PI-алгебр эта проблема была положительно решена Левицким и Капланским, которые использовали для ее решения хорошо развитую структурную теорию ассоциативных колец. В неассоциативном случае эти методы оказались недейственными, ввиду отсутствия подходящих структурных результатов.

Ширшов подошел к проблеме с комбинаторной точки зрения. Разработанные им методы позволили ему получить не только принципиально новые результаты для ассоциативных PI-алгебр, такие как теорема о высоте, но и решить положительно проблему Куроша для альтернативных и специальных йордановых PI-алгебр.

Изложению этих результатов и посвящена данная глава.

## § 1. Лемма Ширшова

Рассмотрим ассоциативные слова, образованные из элементов некоторого конечного упорядоченного множества символов

$$R = \{x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad x_i > x_j, \text{ если } i > j.$$

Слово $\alpha$ назовем *$x_k$-неразложимым*, если оно имеет вид: $\alpha = x_k x_k \ldots x_k x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}$, где $s \geqslant 1$ и $i_t \neq k$ для $t = 1, 2, \ldots, s$. Представление слова $\beta$ в виде произведе-

ния некоторого числа $x_k$-неразложимых слов назовем *$x_k$-разложением* слова $\beta$. Легко видеть, что для слова $\beta$ существует $x_k$-разложение и притом единственное тогда и только тогда, когда слово $\beta$ начинается с символа $x_k$ и оканчивается символом, отличным от $x_k$.

В множестве всех ассоциативных слов от элементов множества $R$ введем частичную упорядоченность: для слов $\alpha$ и $\beta$, имеющих равную длину, положим $\alpha > \beta$, если это отношение выполняется в лексикографическом смысле. В множестве $T$ всех $x_k$-неразложимых слов введем линейный порядок: для слов $\alpha$, $\beta \in T$ (не обязательно равной длины) положим $\alpha > \beta$, если $\alpha$ лексикографически больше $\beta$ или если $\alpha$ — начало слова $\beta$.

Ассоциативное слово $\gamma$ назовем *$n$-разбиваемым*, если оно может быть так представлено в виде произведения $n$ своих подслов, что при любой нетождественной перестановке этих подслов получаются ассоциативные слова, строго меньшие $\gamma$.

Например, слово $x_3x_1x_2x_2x_1x_1x_2x_1x_1x_1$ 3-разбиваемо и допускает несколько 3-разбиений:

$$(x_3x_1)\,(x_2x_2x_1x_1)\,(x_2x_1x_1x_1),\quad (x_3x_1x_2)\,(x_2x_1x_1)\,(x_2x_1x_1x_1),$$
$$(x_3)\,(x_1x_2x_2x_1x_1x_2)\,(x_1x_1x_1),$$

и т. д., слово $x_1x_2x_1x_3x_2x_1x_2x_3x_2$ не является 2-разбиваемым.

Слова, допускающие $x_k$-разложение, можно рассматривать как слова, образованные элементами множества $T$. В этом случае мы будем называть их *$T$-словами* (в отличие от *$R$-слов*); аналогично мы будем употреблять термины *$T$-длина* и *$R$-длина*, подчеркивая, какое множество символов рассматривается в качестве множества образующих. На множестве всех ассоциативных $T$-слов введем частичную упорядоченность $\prec$: для $T$-слов $\alpha$ и $\beta$, имеющих равную $T$-длину, $\alpha \prec \beta$, если $\alpha$ меньше $\beta$ в лексикографическом смысле как $T$-слово. Теперь имеет смысл говорить и об $n$-разбиваемых $T$-словах. Поэтому в дальнейшем там, где это может вызвать недоразумения, мы будем употреблять термины *$n_R$-разбиваемость* и *$n_T$-разбиваемость*.

Лемма 1. *Пусть $\alpha$ — ассоциативное $T$-слово. Тогда из его $n_T$-разбиваемости следует $n_T$-разбиваемость.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ есть $n_T$-разбиение слова $\alpha$; тогда $\alpha$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$ — слова, допускающие $x_k$-разложение. Из определения $n$-разбивае-

мости следует, что $\alpha \underset{T}{>} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_n}$ для любой нетождественной перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Легко видеть, что и для $R$-слов $\alpha$ и $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_n}$ мы имеем $\alpha > > \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_n}$. Поэтому данное $n_T$-разбиение будет являться и $n_R$-разбиением. Лемма доказана.

Лемма 2. *$(n-1)_T$-разбиваемость слова $\alpha$ влечет $n_R$-разбиваемость слова $\alpha x_k$.*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает существование следующего $(n-1)_R$-разбиения слова $\alpha$:

$$\alpha = (x_k x_{i_1} \ldots x'_{i_1})(x_k x_{i_2} \ldots x'_{i_2}) \ldots (x_k x_{i_{n-1}} \ldots x'_{i_{n-1}}),$$

где $x_i, x'_i \in R$, $x'_{i_t} \neq x_k$, $t = 1, 2, \ldots, n-1$.

Покажем, что для слова $\alpha x_k$ имеет место следующее $n_R$-разбиение:

$$\alpha x_k = (x_k)(x_{i_1} \ldots x'_{i_1} x_k)(x_{i_2} \ldots x'_{i_2} x_k) \ldots (x_{i_{n-1}} \ldots x'_{i_{n-1}} x_k).$$

В самом деле, любая перестановка подслов слова $\alpha x_k$, сохраняющая на первом месте $(x_k)$, преобразует слово $\alpha x_k$ в слово $\alpha' x_k$, где слово $\alpha'$ получается с помощью некоторой перестановки подслов в данном $(n-1)_R$-разбиении слова $\alpha$. Поэтому $\alpha > \alpha'$ и $\alpha x_k > \alpha' x_k$. Если же рассматривать перестановки, смещающие символ $x_k$ с первого места, то очевидно, что получающиеся при этом слова будут начинаться строго меньшим числом символов $x_k$ по сравнению со словом $\alpha x_k$. Поэтому они будут строго меньше слова $\alpha x_k$. Лемма доказана.

Лемма 3 (Ширшов). *Для любых трех натуральных чисел $k$, $s$, $n$ найдется такое натуральное число $N(k, s, n)$, что в любом ассоциативном слове длины $N(k, s, n)$ от $k$ упорядоченных символов либо встретится $s$ последовательных равных подслов, либо найдется $n$-разбиваемое подслово.*

Доказательство. Будем рассматривать ассоциативные слова от элементов множества $R = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Легко видеть, что число $N(k, s, 1)$ существует для любых $k$ и $s$. Это дает нам основание для индукции по $n$. Допустим, что число $N(k, s, n-1)$ существует, каковы бы ни были $k$ и $s$. Заметим, что число $N(1, s, n)$ также существует; это дает нам основание для дальнейшей индукции по $k$. Итак, пусть число $N(k-1, s, n)$ существует — докажем, что существует число $N(k, s, n)$.

Рассмотрим произвольное ассоциативное слово $\alpha$ длины

$$[s+N(k-1, s, n)][N(k^{N(k-1, s, n)+s}, s, n-1)+1].$$

Если в начале слова $\alpha$ стоит некоторое количество символов $x_i$, отличных от символов $x_k$, и их число не меньше числа $N(k-1, s, n)$, то выполняется предположение индукции по отношению к подслову $\alpha'$, стоящему в начале слова $\alpha'$ и зависящему лишь от $k-1$ порождающего. Поэтому мы можем предположить, что длина такого подслова $\alpha_1$ меньше $N(k-1, s, n)$. В конце слова $\alpha$ может находиться подслово $\alpha'' = x_k x_k \ldots x_k$. Мы можем предполагать, что длина слова $\alpha''$ меньше $s$, так как в противном случае заключение леммы было бы выполнено. Отбросив слова $\alpha'$ и $\alpha''$, если они существуют, мы получим подслово $\alpha_1$, длина которого больше числа

$$[s+N(k-1, s, n)]\cdot N(k^{N(k-1, s, n)+s}, s, n-1).$$

Для слова $\alpha_1$ существует $x_k$-разложение $\alpha_1 = \alpha_{11} \ldots \alpha_{1m}$. Мы можем, очевидно, предположить, что длина каждого $x_k$-неразложимого слова $\alpha_{1i}$ меньше числа $s + N(k-1, s, n)$, так как в противном случае в таком слове нашлось бы или $s$ последовательных символов $x_k$, или же подслово длины $N(k-1, s, n)$, не содержащее символа $x_k$. Легко видеть, что существует не более $k^{N(k-1, s, n)+s}$ различных $x_k$-неразложимых слов при указанном ограничении на длину. Будем рассматривать слово $\alpha_1$ как $T$-слово. Так как его $T$-длина строго больше $N(k^{N(k-1, s, n)+s}, s, n-1)$, то в слове $\alpha_1$ найдется или $s$ последовательных равных подслов, или же $(n-1)_T$-разбиваемое подслово $\beta$.

Если выполняется второе предположение, то в силу строгого неравенства для $T$-длины $T$-слова $\alpha_1$ мы можем считать, что за подсловом $\beta$ следует символ $x_k$. По лемме 2 подслово $\beta x_k$ является $n_R$-разбиваемым. Итак, в любом случае заключение леммы выполнено. Поэтому полагаем

$$N(k, s, n) = [N(k-1, s, n)+s][N(k^{N(k-1, s, n)+s}, s, n-1)+1].$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Пусть $\alpha$ — ассоциативное слово длины $m$, не представимое в виде $\beta^t$, где $\beta$ — собственное подслово*

*слова* $\alpha$. *Тогда для любого натурального* $n \leqslant m$ *слово* $\alpha^{2n}$ *содержит* $n$-*разбиваемое подслово.*

Доказательство. Из слова $\alpha$ при помощи циклических перестановок порождающих можно получить $m$ слов: $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Так как слово $\alpha$ не представимо в виде степени своего подслова, то, как легко видеть, все полученные слова $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ различны. Предположим, что в лексикографическом смысле $\alpha_{i_0} > \alpha_{i_1} > \ldots > \alpha_{i_{m-1}}$. Очевидно, что каждое из слов $\alpha_i$ можно представить в виде $\alpha_i = u_i v_i$, где $v_i u_i = \alpha$. Рассмотрим теперь слово

$$\alpha^{2n} = v_{i_0} u_{i_0} v_{i_0} u_{i_0} v_{i_1} u_{i_1} v_{i_1} u_{i_1} \ldots v_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}}.$$

Положим $\alpha'_{i_k} = u_{i_k} v_{i_k} u_{i_k} v_{i_{k+1}}$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ и $\alpha'_{i_{n-1}} = u_{i_{n-1}} v_{i_{n-1}} u_{i_{n-1}}$, $\gamma = v_{i_0}$; тогда слово $\alpha^{2n}$ представится в виде $\alpha^{2n} = \gamma \alpha'_{i_0} \alpha'_{i_1} \ldots \alpha'_{i_{n-1}}$. Так как начало каждого из слов $\alpha'_j$ совпадает со словом $\alpha_j$ и $\alpha_{i_0} > \alpha_{i_1} > \ldots > \alpha_{i_{n-1}}$, то, как легко видеть, слово $\alpha'_{i_0} \alpha'_{i_1} \ldots \alpha'_{i_{n-1}}$ будет $n$-разбиваемо. Лемма доказана.

## § 2. Ассоциативные PI-алгебры

Начнем теперь изучение алгебр, удовлетворяющих полиномиальным тождествам. Пусть $\Phi$ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1. Рассмотрим свободную ассоциативную $\Phi$-алгебру Ass $[X]$ от множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Элементами алгебры Ass $[X]$ являются ассоциативные многочлены от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots$ с коэффициентами из $\Phi$. Элемент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ Ass $[X]$ назовем *допустимым*, если хотя бы один из коэффициентов при членах высшей степени многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равен единице. Пусть теперь $A$ — ассоциативная $\Phi$-алгебра и $M$ — некоторый $\Phi$-подмодуль алгебры $A$. Будем говорить, что $M$ удовлетворяет *допустимому полиномиальному тождеству*, если существует такой допустимый элемент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ Ass $[X]$, что

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0$$

для всех $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$.

Если алгебра $A$ удовлетворяет допустимому полиномиальному тождеству $f$, то алгебру $A$ для краткости будем называть PI-*алгеброй.*

Заметим, что если подмодуль $M$ алгебры $A$ удовлетворяет допустимому полиномиальному тождеству $f$, то $M$ удовлетворяет и допустимому полилинейному тождеству той же степени. Действительно, по теореме 1.7 полная линеаризация однородной компоненты элемента $f$, содержащей выделенный член высшей степени (с коэффициентом 1), будет являться тождеством на $M$. Это тождество и будет искомым допустимым полилинейным тождеством. Ясно, что всякое допустимое полилинейное тождество можно записать в виде

$$x_1x_2 \ldots x_n - \sum_{(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n)} \alpha_{i_1i_2\ldots i_n} x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_n}, \tag{1}$$

где $\alpha_{i_1i_2\ldots i_n} \in \Phi$ и суммирование справа распространено на все перестановки символов $1, 2, \ldots, n$, отличные от перестановки $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Рассмотрим некоторые простейшие примеры ассоциативных PI-алгебр:

1) любая коммутативная алгебра $A$ является PI-алгеброй, так как удовлетворяет тождеству $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$;

2) алгебра $\Phi_2$ матриц порядка $2 \times 2$ с элементами из $\Phi$ удовлетворяет тождеству Холла

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 - x_2x_1)^2 x_3 - x_3 (x_1x_2 - x_2x_1)^2;$$

3) ниль-алгебра, у которой индексы нильпотентности всех элементов ограничены в совокупности некоторым числом $n$, удовлетворяет тождеству $f(x) = x^n$. Будем называть такую алгебру *ниль-алгеброй ограниченного индекса.*

Познакомимся теперь с более общими примерами PI-алгебр.

*Стандартным многочленом* степени $n$ в алгебре Ass $[X]$ называется многочлен

$$[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

где $\sigma$ пробегает симметрическую группу $S_n$, а число $(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}$ равно 1 или $-1$ в зависимости от того, четна

подстановка $\sigma$ или нечетна. Заметим, что стандартным многочленом степени 2 будет просто коммутатор $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$; в этом смысле класс алгебр, удовлетворяющих стандартному многочлену, является обобщением класса коммутативных алгебр.

Следующая лемма показывает, что всякая конечномерная алгебра является PI-алгеброй.

Лемма 5. *Если алгебра $A$ является $n$-порожденным $\Phi$-модулем, то $A$ удовлетворяет тождеству* $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.

Доказательство. Из определения стандартного многочлена видно, что он линеен по всем своим переменным и обращается в нуль, если какие-либо два аргумента равны. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — порождающие $\Phi$-модуля $A$ и $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — произвольные элементы алгебры $A$. Каждый из элементов $a_i$ мы можем представить в виде линейной комбинации элементов $u_1, \ldots, u_n$ с коэффициентами из $\Phi$. В силу полилинейности многочлена $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ выражение $[a_1, \ldots, a_{n+1}]$ будет линейной комбинацией членов вида $[u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}}]$, где $u_{i_k}$ — элементы из множества $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Но тогда какие-либо два аргумента в выражении $[u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}}]$ обязательно совпадут, поэтому оно должно быть равно нулю. Отсюда $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}] = 0$. Лемма доказана.

Если алгебра $A$ над полем $F$ имеет размерность $n$, то каждый элемент из $A$ удовлетворяет многочлену степени $n + 1$ над $F$. Это свойство положено в основу определения алгебраической алгебры. Элемент $a$ $\Phi$-алгебры $A$ называется *алгебраическим* над $\Phi$, если существует такое натуральное число $n$, что $a^n = \sum_{i<n} \alpha_i a^i$, где $\alpha_i \in \Phi$. Наименьшее такое число $n$ называется *степенью алгебраичности* элемента $a$. Алгебра $A$ называется *алгебраической* над $\Phi$, если каждый элемент алгебры $A$ алгебраичен над $\Phi$; если при этом степени алгебраичности элементов алгебры $A$ ограничены в совокупности, то $A$ называется *алгебраической алгеброй ограниченной степени* над $\Phi$.

Лемма 6. *Пусть всякий элемент $\Phi$-подмодуля $M$ алгебры $A$ является алгебраическим над $\Phi$, причем степени алгебраичности всех элементов из $M$ ограничены в совокупности. Тогда $M$ удовлетворяет допустимому полиномиальному тождеству.*

Доказательство. Пусть $n$ — граница степеней алгебраичности элементов из $M$. Тогда для любых $a, b \in M$ элемент $[a^n, b]$ является линейной комбинацией элементов $[a^{n-1}, b], \ldots, [a, b]$ с коэффициентами из $\Phi$, поэтому элементы $[a^n, b], [a^{n-1}, b], \ldots, [a, b]$ обращают в нуль стандартный многочлен $[x_1, \ldots, x_n]$. Следовательно, подмодуль $M$ удовлетворяет тождеству

$$[[x^n, y], [x^{n-1}, y], \ldots, [x, y]],$$

которое, как легко видеть, является допустимым. Лемма доказана.

Следствие. *Всякая алгебраическая алгебра ограниченной степени над* $\Phi$ *является* PI-*алгеброй.*

Пусть теперь $A$ — ассоциативная алгебра, порожденная конечным множеством $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Для всякого многочлена $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ свободной ассоциативной алгебры Ass $[x_1, \ldots, x_k]$ через $\overline{f} = f(a_1, \ldots, a_k)$ будем обозначать образ элемента $f$ при гомоморфизме алгебры Ass $[x_1, \ldots, x_k]$ на $A$, переводящем $x_i$ в $a_i$.

Пусть $Y = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}$ — некоторое конечное множество однородных многочленов из Ass $[x_1, \ldots, x_k]$, $\overline{Y} = \{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_l}\}$ и $v$ — одночлен из Ass $[x_1, \ldots, x_k]$. Допустим, что существует такое натуральное число $q$ и такие ассоциативные одночлены $u_i(x_1, \ldots, x_l)$ с максимумом высот, равным $q$, что в алгебре $A$

$$\overline{v} = \sum_i u_i(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_l}),$$

причем каждый элемент $u_i(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ имеет тот же тип, что и $v$. Наименьшее число $q$ с этим свойством назовем *высотой одночлена* $\overline{v}$ относительно множества $\overline{Y}$.

В случае, когда высоты всех одночленов алгебры $A$ относительно $\overline{Y}$ ограничены в совокупности некоторым натуральным числом $h$, будем говорить, что $A$ — *алгебра ограниченной высоты* (*относительно множества* $\overline{Y}$) и что $h$ — *высота алгебры* $A$.

Рассмотрим в качестве примера в свободной ассоциативной алгебре Ass $[x_1, x_2]$ одночлен $x_1x_1x_2x_1x_1x_2x_1x_1x_2$. Этот одночлен имеет высоту 6 относительно множества $\{x_1, x_2\}$ и высоту 1 относительно одноэлементного множества $\{x_1x_1x_2\}$.

Очевидным примером алгебр ограниченной высоты служат конечнопорожденные коммутативные алгебры. Действительно, если $A$ — коммутативная алгебра, порожденная элементами $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то для любого одночлена $v$ типа $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$

$$\bar{v} = \alpha a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_k^{i_k}, \quad \alpha \in \Phi,$$

т. е. высота всякого одночлена алгебры $A$ относительно множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$ не превосходит $k$.

Как оказалось, всякая конечнопорожденная PI-алгебра является алгеброй ограниченной высоты. Этот факт носит название теоремы о высоте.

Теорема о высоте (Ширшов). *Пусть в ассоциативной* Ф*-алгебре* $A$ *от множества порождающих* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *выполнено допустимое полиномиальное тождество степени* $n$. *Тогда алгебра* $A$ *имеет ограниченную высоту относительно множества* $\bar{Y}$, *где* $Y$ *— множество всех ассоциативных слов из* Ass $[x_1, \ldots, x_k]$ *длины, меньшей* $n$.

Доказательство. Как уже было замечено, мы можем считать, что $A$ удовлетворяет тождеству вида (1). Для доказательства теоремы достаточно доказать существование такого числа $M = M(n, k)$, что всякое ассоциативное слово $s$ от элементов $x_1, \ldots, x_k$ высоты $\geqslant M$ относительно $Y$ содержит $n$-разбиваемое подслово. Действительно, тогда в алгебре $A$ мы имеем $\bar{s} = \sum_i \alpha_i \bar{s}_i$, где $\alpha_i \in \Phi$, $s_i$ — слова от $x_1, \ldots, x_k$ того же состава, что и $s$, строго меньшие $s$. Если какое-то из слов $s_i$ имеет высоту $\geqslant M$, то продолжаем процесс. Ввиду его строгой монотонности, в конце концов мы получим, что $\bar{s} = \sum_i \alpha_i \bar{s}_i$, где каждое из слов $s_i$ имеет высоту меньше $M$ относительно $Y$.

Согласно лемме 3 существует такое число $N = N(k, 2n, n)$, что всякое ассоциативное слово $s$ длины $N$ от $x_1, \ldots, x_k$, не содержащее $n$-разбиваемых подслов, содержит подслово вида $v^{2n}$. Можно считать при этом, что слово $v$ не представимо в виде $v_1^k$, $k > 1$; тогда по лемме 4 длина $d(v)$ слова $v$ меньше $n$. Из приведенных рассуждений легко следует, что всякое слово от $x_1, \ldots, x_k$ высоты $\geqslant N + 2$ относительно $Y$, не содержащее $n$-разби-

ваемых подслов, содержит подслово $v_1$ вида $v_1 = v^n v'$, где $n > d(v) \geqslant d(v')$, и слово $v'$ не является началом слова $v$. Ввиду конечности множества подслов указанного вида, для достаточно большого натурального числа $M$ всякое слово высоты $\geqslant M$ относительно $Y$, не содержащее $n$-разбиваемых подслов, содержит $n$ равных подслов вида $v_1 = v^n v'$ (не обязательно последовательных). Однако у каждого такого слова существует подслово, $n$-разбиваемое одним из следующих способов:

$$(v^n v' u_1 v)(v^{n-1} v' u_2 v^2) \ldots (v v' u_n),$$

$$(v' u_1 v^{n-1})(v v' u_2 v^{n-2}) \ldots (v^{n-1} v' u_n),$$

в зависимости от того, какое из слов $v$, $v'$ лексикографически больше. Следовательно, всякое слово, высота которого относительно $Y$ больше $M$, содержит $n$-разбиваемое подслово.

Теорема доказана.

Следствие 1 (Капланский). *Конечнопорожденная ассоциативная алгебраическая* PI-*алгебра* $A$ *над полем* $F$ *конечномерна.*

Доказательство. Обозначим через $V$ множество всех произведений менее чем по $n$ порождающих алгебры $A$, где $n$ — степень тождества. Пусть $m$ — максимум степеней алгебраичности элементов множества $V$ и $h$— высота алгебры $A$ относительно $V$. Тогда алгебра $A$ как линейное пространство над $F$ порождается конечным множеством всех произведений менее чем по $(m-1) \cdot n \cdot h$ порождающих.

Аналогично, из теоремы о высоте выводится

Следствие 2 (Левицкий). *Конечнопорожденная ассоциативная* PI-*алгебра над кольцом* Φ, *каждый элемент которой нильпотентен, является нильпотентной.*

В частности, всякая ассоциативная ниль-алгебра ограниченного индекса локально нильпотентна.

Будем говорить, что алгебра $A$ имеет *локально ограниченную высоту*, если каждая ее конечнопорожденная подалгебра есть алгебра ограниченной высоты.

Следствие 3. *Всякая ассоциативная* PI-*алгебра имеет локально ограниченную высоту.*

## § 3. Алгебраичность и локальная конечность

В предыдущем параграфе мы видели, что теоремы Капланского и Левицкого, полученные авторами совершенно разными методами, оказались следствиями одного результата. Идейная общность этих теорем становится еще более наглядной после рассмотрения следующих понятий.

Зафиксируем для дальнейшего некоторый идеал $Z$ кольца $\Phi$.

Элемент $a$ $\Phi$-алгебры $A$ с ассоциативными степенями назовем *алгебраическим над* $Z$, если существуют такие элементы $z_i \in Z$ и натуральное число $m$, что $a^m = \sum_{i=1}^{m-1} z_i a^i$.

Конечнопорожденную $\Phi$-алгебру $A$ назовем *конечной над* $Z$, если в $A$ существуют такие элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что для некоторого натурального числа $m$ всякий элемент $c \in A^m$ допускает представление в виде $c = \sum_{i=1}^{k} z_i a_i$, где $z_i \in Z$. Если в $\Phi$-алгебре $B$ каждая конечнопорожденная $\Phi$-подалгебра $A$ является конечной над $Z$, то алгебру $B$ назовем *локально конечной над* $Z$.

В частности, когда $Z = (0)$, алгебраические над $Z$ элементы — это просто нильпотентные элементы, а локальная конечность над $Z$ в этом случае превращается в локальную нильпотентность; когда же $Z = \Phi$ и $\Phi$ — поле, алгебраичность и локальная конечность над $Z$ превращаются в обычную алгебраичность и локальную конечномерность над $\Phi$.

Немедленным следствием теоремы о высоте является

Теорема 1 (Ширшов). *Если в конечнопорожденной ассоциативной $\Phi$-алгебре $A$ с допустимым тождественным соотношением степени $n$ все произведения менее чем по $n$ порождающих алгебраичны над $Z$, то алгебра $A$ конечна над $Z$.*

Эта теорема содержит теоремы Капланского и Левицкого в качестве частных случаев. Принципиальное отличие ее от последних состоит в том, что условие алгебраичности накладывается в ней не на все элементы, а лишь на конечное их число.

Для дальнейшего изучения понятия локальной конечности понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть алгебра $A$ конечнопорождена как $\Phi$-модуль. Тогда всякая конечнопорожденная подалгебра $B$ алгебры $A$ также является конечнопорожденным $\Phi$-модулем.*

Доказательство. Пусть $R=\{b_1, \ldots, b_k\}$ — множество порождающих алгебры $B$. По условию существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, что $A = \Phi a_1 + \ldots + \Phi a_n$. В частности,

$$b_i=\sum_{l=1}^{n} \varphi_i^l a_l, \qquad i=1, 2, \ldots, k,$$

$$a_i a_j=\sum_{l=1}^{n} \varphi_{ij}^l a_l, \quad i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $\Phi_0$ — подкольцо кольца $\Phi$, порожденное множеством $\{1, \varphi_i^l, \varphi_{ij}^l\}$. По теореме Гильберта (Ленг С., Алгебра, «Мир», 1968, стр. 169) $\Phi_0$ — нётерово кольцо. Рассмотрим $\Phi_0$-модуль $A_0$:

$$A_0 = \Phi_0 a_1 + \Phi_0 a_2 + \ldots + \Phi_0 a_n.$$

Легко видеть, что $A_0$ является $\Phi_0$-алгеброй, причем $R \subseteq A_0$. Рассмотрим $\Phi_0$-подалгебру $B_0 \subseteq A_0$, порожденную множеством $R$. Так как $\Phi_0$-модуль $A_0$ нётеров (как конечнопорожденный модуль над нётеровым кольцом $\Phi_0$), то $B_0$ является конечнопорожденным модулем над $\Phi_0$. Для завершения доказательства остается заметить, что $B = \Phi B_0$. Лемма доказана.

Лемма 7 является частным случаем следующего утверждения.

Лемма 8. *Пусть алгебра $A$ конечна над $Z$. Тогда $A$ локально конечна над $Z$.*

Доказательство. По условию существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$ и натуральное число $m$, что $A^m \subseteq Za_1 + \ldots + Za_n$. Пусть $B$ — произвольная конечнопорожденная подалгебра алгебры $A$. Для доказательства конечности $B$ над $Z$ достаточно, очевидно, показать, что $B$ конечнопорождена как $\Phi$-модуль и алгебра $\bar{B} = B/ZB$ нильпотентна. Ясно, что $A$ является конечнопорожденным $\Phi$-модулем. По лемме 7 $B$ также

является конечнопорожденным модулем над Ф. Таким образом, остается доказать нильпотентность алгебры $\overline{B} = B/ZB$. Обозначим алгебру двусторонних умножений $M^A(B)$ через $B^*$. Достаточно, очевидно, показать, что алгебра $\overline{B}^* = B^*/ZB^*$ нильпотентна. (Действительно, если $(\overline{B}^*)^k = (0)$, то, как легко видеть, $(\overline{B})^{2^k} = (0)$.) Пусть $W$ — произвольный элемент из $B^*$. Рассмотрим элементы $a_iW^m \in A^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Имеем $a_iW^m = s_{i1}a_1 + \ldots + s_{in}a_n$, где $s_{ij} \in Z$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $S$ матрицу порядка $n \times n$, составленную из элементов $s_{ij}$. Далее, если элемент $c \in A^m$ представим в виде $c = z_1a_1 + \ldots + z_na_n$, где $z_i \in Z$, то сопоставим ему строку $[c] = (z_1, \ldots, z_n)$. Наконец, через $\hat{a}$ обозначим столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$. Как легко видеть, в этих обозначениях $cW^m = [c]\cdot S\cdot\hat{a}$, где в правой части стоит обычное произведение матриц, и $cW^{km} = [c]\cdot S^k\cdot\hat{a}$ для всякого натурального числа $k$. По теореме Гамильтона — Кэли (Ленг С., Алгебра, «Мир», 1968, стр. 446) матрица $S$ является корнем своего характеристического многочлена, т. е. $S^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sigma_kS^k$, где $\sigma_k \in Z$. Пусть теперь $x$ — произвольный элемент алгебры $A$. Рассмотрим

$$xW^{m(n+1)} = (xW^m)W^{mn} = [xW^m]\cdot S^n\cdot\hat{a} = \sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k[xW^m]\cdot S^k\cdot\hat{a} = \sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k(xW^m)W^{mk} = x\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_kW^{m(k+1)}\Big),$$

откуда, ввиду произвольности элемента $x$, получаем

$$W^{m(n+1)} = \sum_{k=0}^{n-1}\sigma_kW^{m(k+1)}, \quad \sigma_k \in Z.$$

Итак, $W^{m(n+1)} \in ZB^*$ для любого элемента $W \in B^*$, т. е. алгебра $\overline{B}^*$ удовлетворяет допустимому тождественному соотношению $x^{m(n+1)} = 0$. Алгебра $\overline{B}^*$ ассоциативна и, ввиду конечной порожденности $B$ над Ф, имеет конечное

число порождающих. По следствию 2 теоремы о высоте алгебра $\overline{B}^*$ нильпотентна. Тем самым лемма доказана.

Ввиду леммы 8 из теоремы 1 легко вытекает

Теорема 2. *Если в ассоциативной алгебре $A$ с допустимым тождественным соотношением степени $n$ все произведения порождающих, содержащие менее $n$ множителей, алгебраичны над $Z$, то алгебра $A$ локально конечна над $Z$.*

**Упражнения**

Ниже всюду $\Phi$ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1, $Z$ — некоторый идеал кольца $\Phi$.

1. Пусть $A$ — ассоциативная $\Phi$-алгебра, $I$ — идеал в $A$. Доказать, что если идеал $I$ и фактор-алгебра $\overline{A} = A/I$ локально конечны над $Z$, то и $A$ локально конечна над $Z$.

2. Доказать, что сумма двух двусторонних локально конечных над $Z$ идеалов ассоциативной $\Phi$-алгебры $A$ есть снова локально конечный над $Z$ идеал.

3. Доказать, что во всякой ассоциативной алгебре $A$ существует единственный двусторонний локально конечный над $Z$ идеал $\mathscr{L}_Z(A)$, содержащий все двусторонние локально конечные над $Z$ идеалы алгебры $A$ и такой, что в фактор-алгебре $\overline{A} = A/\mathscr{L}_Z(A)$ нет ненулевых двусторонних локально конечных над $Z$ идеалов.

Идеал $\mathscr{L}_Z(A)$ мы будем называть *локально конечным над $Z$ радикалом* алгебры $A$.

4. Доказать, что локально конечный над $Z$ радикал $\mathscr{L}_Z(A)$ ассоциативной алгебры $A$ содержит все односторонние локально конечные над $Z$ идеалы алгебры $A$.

## § 4. Специальные йордановы PI-алгебры

Рассмотрим вновь свободную ассоциативную $\Phi$-алгебру Ass $[X]$ от множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Элемент $h$ алгебры Ass $[X]$ назовем *j-многочленом*, если $h$ выражается через элементы множества $X$ с помощью операций сложения, умножения на элементы из $\Phi$, возведения в квадрат и «квадратичного умножения» $xU_y = yxy$.

Множество всех $j$-многочленов обозначим через $j\,[X]$. Как легко видеть, множество $j\,[X]$ замкнуто относительно йорданова умножения $a \circ b = ab + ba$. Кроме того, если $a, b, c \in j\,[X]$, то $a^2$, $abc + cba \in j\,[X]$.

Заметим, что если в $\Phi$ есть элемент $^1/_2$, то наше определение $j$-многочлена совпадает с определением, приведен-

ным в главе 3. При этом $j\,[X]$ как множество совпадает со свободной специальной йордановой алгеброй SJ $[X]$.

Вернемся вновь к нашему множеству $R=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, где $x_i < x_j$ при $i < j$. Напомним, что через $T$ обозначено множество всех $x_k$-неразложимых слов. Ассоциативное слово $\alpha$ от элементов множества $R$ назовем *особым*, если существует однородный по каждому $x_i$ $j$-многочлен $h_\alpha$, старшим словом которого является слово $\alpha$.

Лемма 9. *Всякое $T$-слово $\alpha$ является особым (относительно множества $R$).*

Доказательство. Если $T$-длина слова $\alpha$ равна 1, т. е.

$$\alpha=\underbrace{x_k x_k \ldots x_k}_{n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad i_r \neq k; \quad r=1, 2, \ldots, m,$$

то можно положить

$$h_\alpha=[\ldots(x_k^n \circ x_{i_1}) \circ x_{i_2} \ldots] \circ x_{i_m}.$$

Пусть утверждение леммы доказано для $T$-слов, $T$-длины которых меньше $n$, и $T$-длина $T$-слова $\alpha$ равна $n$. Тогда

$$\alpha=\beta \underbrace{x_k x_k \ldots x_k}_{r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad i_s \neq k; \quad s=1, 2, \ldots, m,$$

где $\beta$ — $T$-слово, находящееся в условиях предположения индукции. Пусть $h_\beta$ — $j$-многочлен, соответствующий слову $\beta$. Тогда в качестве $h_\alpha$ можно взять $j$-многочлен

$$\{\ldots[(h_\beta x_k^2 x_{i_1} + x_{i_1} x_k^2 h_\beta) \circ x_{i_2}] \circ \ldots\} \circ x_{i_m}.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $A$ — произвольная ассоциативная Ф-алгебра, $M=\{m_i\}$ — подмножество алгебры $A$. Через $j\,[M]$ мы обозначим множество элементов вида $h\,(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_i \in M$, $h\,(x_1, \ldots, x_k) \in j\,[X]$. Элементы множества $j\,[M]$ будем называть *$j$-многочленами* от элементов множества $M$.

Теорема 3 (Ширшов). *Пусть в ассоциативной Ф-алгебре $A$ множество $j\,[\{a_i\}]$ $j$-многочленов от множества порождающих $\{a_i\}$ удовлетворяет некоторому допустимому тождественному соотношению. Тогда, если всякий элемент множества $j\,[\{a_i\}]$ является алгебраическим над $Z$, то алгебра $A$ локально конечна над $Z$*

Доказательство. В силу леммы 8 достаточно доказать, что всякое конечное подмножество $\overline{R} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ множества порождающих алгебры $A$ порождает конечную над $Z$ подалгебру. Докажем это утверждение с помощью индукции по числу порождающих, предположив его справедливость в случае, если число элементов в $\overline{R}$ равно $k - 1$. Рассмотрим наряду с множеством $\overline{R}$ множество $R = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и свободную ассоциативную алгебру Ass $[R]$. Если $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ — ассоциативное слово от $x_1, \ldots, x_k$ или некоторый многочлен из Ass $[R]$, то мы, как и раньше, через $\overline{f}$ обозначим соответствующий образ $f(a_1, \ldots, a_k)$ этого элемента в алгебре $A$. Ввиду предположения индукции и алгебраичности над $Z$ элемента $a_k$ существует такое натуральное число $m$, что для всякого $x_k$-неразложимого слова $\alpha$ длины $m$ в алгебре $A$ имеем $\overline{\alpha} = \sum\limits_i z_i\overline{\alpha}_i$, где $z_i \in Z$, $\alpha_i$ — слова от $x_1, \ldots, x_k$ меньшей длины. Обозначим через $T_0$ множество всех $x_k$-неразложимых слов длины, меньшей $m$, и через $V$ — множество всех $T_0$-слов $T$-длины, меньшей $n$, где $n$ — степень допустимого полиномиального тождества. (Заметим, что тождество можно считать имеющим вид (1).) Ввиду леммы 9 всякий элемент множества $V$ является особым словом (относительно множества $R$), т. е. для всякого элемента $v \in V$ существует однородный $j$-многочлен от порождающих $x_i$, старшим членом которого является слово $v$. Зафиксируем для каждого элемента $v \in V$ по одному соответствующему $j$-многочлену $h_v$. Ввиду конечности множества $V$, множество $H(V) = \{h_v \mid v \in V\}$ также конечно, причем по условию леммы для каждого элемента $h_v$ множества $H(V)$ элемент $\overline{h}_v$ является алгебраическим над $Z$. Рассмотрим теперь $R$-слово $\alpha$ $R$-длины $mN(K, s, n) + 2m$, где $K$ — число элементов в множестве $T_0$, $s$ — максимум степеней алгебраичности над $Z$ элементов $\overline{h}_v$, где $h_v \in H(V)$. (Без ограничения общности можно считать, что $s \geqslant 2n$.)

Все будет доказано, если мы установим, что элемент $\overline{\alpha}$ представим в алгебре $A$ в виде $Z$-линейной комбинации элементов $\overline{\alpha}_i$, где $\alpha_i$ — $R$-слова, имеющие $R$-длину, меньшую чем $\alpha$.

Пусть $\alpha = \alpha'\beta\alpha''$, где $\alpha'$ не содержит $x_k$, $\beta = x_k\beta' x_i$, $i \neq k$, $\alpha'' = x_k x_k \ldots x_k$. Можно считать, что $R$-длины слов $\alpha'$ и $\alpha''$ меньше $m$, так как иначе все было бы доказано. Тогда $R$-длина слова $\beta$ больше $mN(K, s, n)$. Можно предположить, далее, что образ каждого из $x_k$-неразложимых слов, входящих в слово $\beta$, не может быть представлен в алгебре $A$ в виде $Z$-линейной комбинации образов $R$-слов меньшей $R$-длины. Каждое такое слово имеет $R$-длину, меньшую $m$. Следовательно, $\beta$ является $T_0$-словом и $T$-длина слова $\beta$ больше числа $N(K, s, n)$. В силу лемм 3 и 4 мы, как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что в слове $\beta$ найдется либо $n_T$-разбиваемое подслово $\gamma$, либо подслово вида $(\gamma')^s$, где $\gamma'$ — $T_0$-слово, $T$-длина которого меньше $n$. Рассмотрим отдельно обе возможности.

1. $\beta = \beta_1(\gamma')^s\beta_2$, где $T$-длина слова $\gamma'$ меньше $n$. В этом случае $\gamma' \in V$, поэтому существует $j$-многочлен $h_{\gamma'} \in H(V)$, имеющий $\gamma'$ своим старшим членом. Вследствие выбора числа $s$ существуют такие элементы $z_i \in Z$, что $\overline{h}^s_{\gamma'} = \sum\limits_{i<s} z_i \overline{h}^i_{\gamma'}$. Отсюда следует, что в алгебре $A$ образ $(\overline{\gamma'})^s$ слова $(\gamma')^s$ (а, значит, и образ $\overline{\alpha}$ слова $\alpha$) представляется в виде Ф-линейной комбинации образов меньших (в лексикографическом смысле) слов той же $R$-длины и $Z$-линейной комбинации образов слов, имеющих меньшую $R$-длину.

2. $\beta = \beta_1\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n > \gamma_{i_1}\gamma_{i_2} \ldots \gamma_{i_n}$, если $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \neq (1, 2, \ldots, n)$. Пусть $\gamma_i$ — старшие члены $j$-многочленов $h_{\gamma_i}$. Так как множество $j$-многочленов от $\{a_i\}$ удовлетворяет соотношению вида (1), произведение $\overline{h}_{\gamma_1}\overline{h}_{\gamma_2} \ldots \overline{h}_{\gamma_n}$ выражается в виде линейной комбинации произведений, получающихся из данного с помощью перестановки сомножителей. Далее, так как старший член произведения есть произведение старших членов сомножителей, отсюда следует, что в алгебре $A$ образ слова $\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$ представляется в виде линейной комбинации образов меньших слов той же $R$-длины. Следовательно, и элемент $\overline{\alpha}$ может быть выражен аналогичным образом.

Итак, мы пришли к заключению, что в алгебре $A$ образ $\overline{\alpha}$ слова $\alpha$ представи́м в виде Ф-линейной комбинации образов слов, имеющих ту же $R$-длину, но меньших $\alpha$, и $Z$-линейной комбинации образов слов меньшей

$R$-длины. Так как убывающая последовательность слов равной длины обрывается, то на некотором шаге мы получим представление элемента $\bar{\alpha}$ в виде $Z$-линейной комбинации образов слов меньшей $R$-длины. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть в ассоциативной Ф-алгебре $A$ всякий j-многочлен от порождающих является алгебраическим над $Z$, причем степени алгебраичности j-многочленов ограничены в совокупности. Тогда алгебра $A$ локально конечна над $Z$.*

Доказательство вытекает из леммы 6.

Пусть теперь в Ф есть элемент $^1/_2$. Рассмотрим свободную йорданову Ф-алгебру J $[X]$ от множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Элемент $f \in$ J $[X]$ назовем *существенным*, если при естественном гомоморфизме алгебры J $[X]$ на свободную специальную йорданову алгебру SJ $[X]$ образ $\bar{f}$ элемента $f$, рассматриваемый как элемент свободной ассоциативной алгебры Ass $[X]$, является допустимым элементом. Пусть теперь $J$ — некоторая йорданова Ф-алгебра. Будем говорить, что $J$ удовлетворяет *существенному полиномиальному тождеству*, если существует такой существенный элемент $f(x_1, \ldots, x_n) \in$ J $[X]$, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in J$. Если йорданова алгебра $J$ удовлетворяет существенному полиномиальному тождеству $f$, то алгебру $J$ для краткости будем называть *йордановой* PI-*алгеброй* и говорить, что $J$ удовлетворяет многочлену $f$. Вот некоторые примеры йордановых PI-алгебр:

1) любая ассоциативно-коммутативная алгебра является йордановой PI-алгеброй, так как удовлетворяет существенному многочлену $f(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1, x_2, x_3)$. Действительно, имеем $\overline{f(x_1, x_2, x_3)} = 4[(x_1 \odot x_2) \odot x_3 - x_1 \odot (x_2 \odot x_3)] = [x_2, [x_1, x_3]]$ — допустимый элемент;

2) йорданова алгебра $\Phi_2^{(+)}$ матриц порядка $2 \times 2$ с элементами из Ф удовлетворяет существенному многочлену $f(x, y, z, r, s) = 128((x, y, z)^2, r, s)$;

3) йорданова ниль-алгебра индекса $n$ удовлетворяет существенному многочлену $f(x) = x^n$.

Пусть теперь $J$ — некоторая специальная йорданова алгебра и $A$ — ассоциативная обертывающая алгебра алгебры $J$. Ясно, что если $J$ — йорданова PI-алгебра, то $J$ как подмодуль алгебры $A$ удовлетворяет некоторому

ассоциативному допустимому полиномиальному тождеству. Покажем, что справедливо и обратное утверждение.

Лемма 10. *Пусть специальная йорданова алгебра $J$, рассматриваемая как подмодуль ассоциативной алгебры $A$, удовлетворяет ассоциативному допустимому полиномиальному тождеству. Тогда $J$ удовлетворяет и некоторому йорданову существенному полиномиальному тождеству, т. е. $J$ является йордановой* PI-*алгеброй.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ — ассоциативное допустимое тождественное соотношение, выполняющееся на подмодуле $J$. Тогда $J$ удовлетворяет и многочлену $\varphi(x, y) = f(xyx, xy^2x, \ldots, xy^nx)$. Если $\varphi^*(x, y)$ — многочлен, получающийся применением к многочлену $\varphi$ инволюции $*$, то $J$ удовлетворяет и многочлену $\psi(x, y) = \varphi(x, y)\cdot\varphi^*(x, y)$. Многочлен $\psi(x, y)$ является допустимым и симметричен относительно инволюции $*$; следовательно, по теореме 3.3 $\psi(x, y) \in \mathrm{SJ}[x, y]$. Пусть теперь $\psi_0(x, y) \in \mathrm{J}[x, y]$ — некоторый прообраз элемента $\psi(x, y)$ при каноническом гомоморфизме $\mathrm{J}[x, y]$ на $\mathrm{SJ}[x, y]$. Тогда ясно, что $\psi_0(x, y)$ — существенный элемент и что $J$ как йорданова алгебра удовлетворяет тождеству $\psi_0(x, y) = 0$. Лемма доказана.

Заметим, что множество порождающих $\{a_\alpha\}$ специальной йордановой алгебры $J$ порождает и ассоциативную обертывающую алгебру $A$; при этом $J$ как подмножество алгебры $A$ совпадает с множеством $j[\{a_\alpha\}]$ всех $j$-многочленов от $\{a_\alpha\}$.

Мы можем теперь переформулировать теорему 3 и следствие из нее следующим образом:

Теорема 3′ (Ширшов). *Пусть всякий элемент специальной йордановой* PI-*алгебры $J$ над кольцом $\Phi$ является алгебраическим над $Z$. Тогда ассоциативная обертывающая алгебра $A$ алгебры $J$ локально конечна над $Z$.*

Следствие 1. *Пусть всякий элемент специальной йордановой алгебры $J$ алгебраичен над $Z$, причем степени алгебраичности элементов ограничены в совокупности. Тогда ее ассоциативная обертывающая алгебра $A$ локально конечна над $Z$.*

Полагая $Z = (0)$, мы получаем также

Следствие 2. *Пусть всякий элемент специальной йордановой* PI-*алгебры $J$ является нильпотентным. Тогда*

*ее ассоциативная обертывающая алгебра $A$ локально нильпотентна.*

Из теоремы 3′ легко следует

Т е о р е м а 4. *Пусть $J$ — специальная йорданова PI-алгебра над кольцом $\Phi$, каждый элемент которой алгебраичен над $Z$. Тогда $J$ локально конечна над $Z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I$ — некоторая подалгебра алгебры $J$, порожденная конечным множеством элементов $R = \{b_1, \ldots, b_k\}$. По теореме 3 в ассоциативной обертывающей алгебре $A$ алгебры $J$ множество $R$ порождает конечную над $Z$ алгебру $B$. Рассмотрим йорданову алгебру $B^{(+)}$. В силу конечности над $Z$ алгебра $B$ (а следовательно, и $B^{(+)}$) является конечнопорожденным модулем над $\Phi$. Отсюда следует, что $B^{(+)}$ конечнопорождена как $\Phi$-алгебра. Ясно теперь, что $B^{(+)}$ конечна над $Z$. По лемме 8 подалгебра $I \subseteq B^{(+)}$ также конечна над $Z$. В силу произвольности подалгебры $I$ это означает, что алгебра $J$ локально конечна над $Z$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 для алгебры $J$ легко выводятся утверждения, аналогичные следствиям 1 и 2 теоремы 3′. Мы приведем здесь лишь один очень важный частный случай этих утверждений.

С л е д с т в и е. *Специальная йорданова ниль-алгебра ограниченного индекса локально нильпотентна.*

Заметим, что из соответствующего результата Голода для ассоциативных алгебр следует, что ограниченность индекса в формулировке следствия существенна (см. упражнение 5).

Вопрос о локальной нильпотентности произвольной йордановой ниль-алгебры ограниченного индекса остается открытым до сих пор.

**Упражнения**

**1.** Пусть $J = \Phi \cdot 1 + M$ — йорданова алгебра симметрической билинейной формы $f$ на векторном пространстве $M$, не обязательно конечномерном. Доказать, что $J$ является PI-алгеброй.

**2.** Доказать, что исключительная простая йорданова алгебра $H(C_3)$ является PI-алгеброй.

**3.** Пусть всякий элемент йордановой $\Phi$-алгебры $J$ алгебраичен над $\Phi$, причем степени алгебраичности ограничены в совокупности. Доказать, что $J$ является PI-алгеброй.

**4.** Пусть $A$ — коммутативная алгебра с тождеством $x^3 = 0$. Доказать, что $A$ — йорданова алгебра, причем $A$ локально нильпотентна.

Указание. Применить следствие 2 теоремы 3′ к алгебре правых умножений $R(A)$ и доказать, что она локально нильпотентна.

5. Пусть $A$ — ассоциативная Ф-алгебра ($^1/_2 \in \Phi$), $\mathcal{N}(A)$ — ее верхний ниль-радикал, $\mathcal{L}(A)$ — ее локально нильпотентный радикал. Доказать, что

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^{(+)}), \quad \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A^{(+)}).$$

Вывести отсюда существование специальной йордановой ниль-алгебры, не являющейся локально нильпотентной.

Указание. Воспользуйтесь упражнением 3.1.5.

## § 5. Альтернативные PI-алгебры

Прежде чем рассматривать PI-алгебры, мы установим некоторые необходимые нам факты о произвольных альтернативных алгебрах.

Предложение 1. *Пусть $I$, $J$ — идеалы альтернативной алгебры $A$. Тогда произведение $IJ$ также является идеалом алгебры $A$.*

Доказательство. Пусть $i \in I$, $j \in J$. Тогда для любого $a \in A$

$$(ij)\,a = i\,(ja) + (i,\ j,\ a) = i\,(ja) - (i,\ a,\ j) \in IJ,$$

$$a\,(ij) = (ai)\,j - (a,\ i,\ j) = (ai)\,j + (i,\ a,\ j) \in IJ,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $S$ и $T$ — какие-то подмножества альтернативной алгебры $A$. Обозначим через $\{STS\}$ подмодуль Ф-модуля $A$, порожденный всевозможными элементами вида $sts$, где $s \in S$, $t \in T$.

Предложение 2. *Для любых идеалов $I$, $J$ альтернативной алгебры $A$ множество $\{IJI\}$ также является идеалом в $A$.*

Доказательство. Положим $\{xyz\} = (xy)\,z + (zy)\,x = x\,(yz) + z\,(yx)$. Тогда для любых $i$, $i' \in I$, $j \in J$ мы имеем

$$\{iji'\} = (i + i')\,j\,(i + i') - iji - i'ji' \in \{IJI\},$$

откуда по тождествам Муфанг для любого $a \in A$

$$(iji)\,a = i\,[j\,(ia)] = i\,[j\,(ia)] + (ia)\,(ji) - (ia)\,(ji) =$$
$$= \{ij\,(ia)\} - i\,(aj)\,i \in \{IJI\},$$

и аналогично $a\,(iji) \in \{IJI\}$. Лемма доказана.

Напомним, что для произвольной алгебры $A$ через $A^{\#}$ обозначается алгебра, полученная формальным присоединением единицы к алгебре $A$. По следствию 2 предложения 1.7, если алгебра $A$ альтернативна, то и алгебра $A^{\#}$ альтернативна.

Следствие. *Для любого идеала $I$ альтернативной алгебры $A$ множества $P(I) = \{IA^{\#}I\}$ и $T(I) = \{III\}$ являются идеалами алгебры $A$, при этом $P(I) \supseteq T(I) \supseteq (P(I))^2$.*

Доказательство. Заметим, что $I$ является идеалом и в алгебре $A^{\#}$, поэтому по предложению 2 множество $P(I)$ есть идеал алгебры $A^{\#}$. Но $P(I) \subseteq A$, поэтому $P(I)$ — идеал алгебры $A$. Непосредственно из предложения 2 следует также, что $T(I)$ — идеал алгебры $A$. Далее, включение $P(I) \supseteq T(I)$ очевидно. Остается доказать включение $[P(I)]^2 \subseteq T(I)$. Будем писать $x \equiv y$, если $x - y \in T(I)$. Пусть $i, j \in I$, $a, b \in A^{\#}$. Тогда в силу тождеств Муфанг и их линеаризаций имеем

$$(iai)(jbj) = \{(ia)(ij)(bj)\} - (bj\cdot i)(j\cdot ia) \equiv$$
$$\equiv -(bj\cdot i)(j\cdot ia) = -b\{ji(j\cdot ia)\} + ([b(j\cdot ia)]i)j \equiv$$
$$\equiv ([b(j\cdot ia)]i)j = \{b(j\cdot ia)i\}j - ([i(j\cdot ia)]b)j =$$
$$= b[(j\cdot ia)(ij)] + i[(j\cdot ia)(bj)] -$$
$$-([(iji)a]b)j \equiv b[j(iai)j] + i[j(ia\cdot b)j] \equiv 0.$$

Следствие доказано.

Пусть $\Phi[X]$ — свободная алгебра от множества порождающих $X = \{x_\alpha\}$. Положим

$$\langle x_1\rangle = x_1,\ \langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle\cdot x_n$$

для $n > 1$. Неассоциативные слова вида $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\rangle$ мы будем называть *$r_1$-словами* от множества $\{x_\alpha\}$. Если в $r_1$-слове $v = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\rangle$ индексы упорядочены: $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, то будем называть $v$ *правильным $r_1$-словом*. Далее, *$r_2$-словами* (*правильными $r_2$-словами*) от $\{x_\alpha\}$ будем называть неассоциативные слова вида $\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, где каждое $u_i$ есть $r_1$-слово (соответственно правильное $r_1$-слово) от $\{x_\alpha\}$. Если $A$ — произвольная алгебра и $M = \{m_i\}$ — подмножество алгебры $A$, то элементы вида $\langle m_{i_1}, \ldots, m_{i_n}\rangle$ будем называть *$r_1$-словами от множества $M$*. Аналогично определим *$r_2$-слова от множества $M$*. Для полилинейного слова $v = v(x_1, \ldots, x_n)$

через $\langle v\rangle$ мы обозначим правильное $r_1$-слово того же состава, что и $v$; если же слово $v$ не полилинейно, то положим $\langle v\rangle = 0$.

Алгебра $A$ называется *антиассоциативной*, если в $A$ справедливо тождество

$$(xy)\,z + x\,(yz) = 0.$$

Лемма 11. *Пусть $A$ — антиассоциативная и антикоммутативная алгебра, $v = v\,(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное неассоциативное слово. Тогда для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ верно равенство*

$$v\,(a_1, \ldots, a_n) = \pm \langle v\,(a_1, \ldots, a_n)\rangle.$$

Доказательство. Докажем вначале, что $v\,(a_1, \ldots, a_n) = v'\,(a_1, \ldots, a_n)$, где $v' = v'\,(x_1, \ldots, x_n)$ — какое-то, не обязательно правильное, $r_1$-слово того же типа, что и слово $v$. Будем доказывать это утверждение индукцией по длине $d\,(v)$ слова $v$. Очевидно основание индукции: $d\,(v) = 1$. Пусть теперь $d\,(v) = n > 1$ и для любого неассоциативного слова $u$ длины, меньшей $n$, наше утверждение справедливо. Мы имеем $v = v_1v_2$, где $d\,(v_i) < n$. Если $d\,(v_2) = 1$, то все ясно, так как по предположению индукции элемент $\overline{v_1} = v_1\,(a_1, \ldots, a_n)$ представим в виде $r_1$-слова. Пусть теперь $d\,(v_2) > 1$, $v_2 = v_2'v_2''$; тогда для образов $\overline{v}$, $\overline{v_i}$, $\overline{v_2'}$, $\overline{v_2''}$ элементов $v$, $v_i$, $v_2'$, $v_2''$ в алгебре $A$ имеем $\overline{v} = v\,(a_1, \ldots, a_n) = \overline{v_1}\,\overline{v_2} = \overline{v_1}\,(\overline{v_2'}\,\overline{v_2''}) = -\,(\overline{v_1}\,\overline{v_2'})\,\overline{v_2''}$, и доказательство завершается индукцией по $d\,(v_2)$. Далее, пусть $v\,(a_1, \ldots, a_n) = \langle a_{i_1}, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_{i_m}\rangle$ и $i \geqslant j$. Если $j = i$, то мы имеем $v = \langle a_{i_1}, \ldots, a_i, a_i, \ldots, a_{i_m}\rangle = -\langle a_{i_1}, \ldots, a_i^2, \ldots, a_{i_m}\rangle = 0$. Если же $j < i$, то $v = -\langle a_{i_1}, \ldots, a_ia_j, \ldots, a_{i_m}\rangle = \langle a_{i_1}, \ldots, a_ja_i, \ldots, a_{i_m}\rangle = -\langle a_{i_1}, \ldots, a_j, a_i, \ldots, a_{i_m}\rangle$. Так как данный процесс монотонен (он уменьшает слово в смысле лексикографической упорядоченности) и не изменяет тип слова $v$, то через некоторое конечное число шагов мы получим нужный результат. Лемма доказана.

Предложение 3 (Жевлаков). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $v = v\,(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное неассоциативное слово. Тогда для любых элементов*

*$a_1, \ldots, a_n \in A$ элемент $v(a_1, \ldots, a_n)$ представим в виде*

$$v(a_1, \ldots, a_n) = \pm \langle v(a_1, \ldots, a_n)\rangle + \sum_i \alpha_i v_i(a_1, \ldots, a_n),$$

*где $\alpha_i \in \Phi$ и для каждого $i$ элемент $v_i = v_i(x_1, \ldots, x_n)$ есть неассоциативный однородный многочлен, имеющий тот же тип, что и $v$, и представляющийся в одном из видов:*

$$u^2,\ u \circ u',\ (uw)\,u,\ \{uwu'\}, \tag{2}$$

*где $u$, $u'$, $w$ — неассоциативные слова длины меньшей, чем $v$.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $A$ — свободная альтернативная алгебра с множеством свободных порождающих $\{a_i\}$. В силу следствия теоремы 1.5 многообразие альтернативных алгебр однородно, поэтому в $A$ имеют смысл понятия степени одночлена, однородного многочлена и т. д. Рассмотрим фактор-алгебру $\overline{A} = A/P(A)$. Для любых элементов $a, b, c \in A$ мы имеем $\{abc\} \in P(A)$, $a \circ b = \{a1b\} \in P(A)$, поэтому в фактор-алгебре $\overline{A}$ мы получаем $\overline{a}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}$ и $(\overline{a}\overline{b})\overline{c} = -(\overline{c}\overline{b})\overline{a} = \overline{a}(\overline{c}\overline{b}) = -\overline{a}(\overline{b}\overline{c})$. Таким образом, алгебра $\overline{A}$ антикоммутативна и антиассоциативна. По лемме 11 отсюда следует, что

$$v(a_1, \ldots, a_n) = \pm \langle v(a_1, \ldots, a_n)\rangle + v_0, \tag{3}$$

где $v_0 \in P(A)$. Заметим, что всякий элемент из идеала $P(A)$, в частности элемент $v_0$, есть линейная комбинация элементов вида (2) для каких-либо одночленов $u$, $u'$, $w$. Далее, так как $A$ — свободная алгебра однородного многообразия, то любая однородная компонента любого тождества, справедливого в $A$, также является тождеством в $A$. Рассмотрев теперь однородную компоненту соотношения (3), содержащую элемент $v(a_1, \ldots, a_n)$, мы получим требуемое утверждение. Предложение доказано.

Теорема 5 (Ширшов). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольное неассоциативное слово. Тогда для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ элемент $v(a_1, \ldots, a_n)$ представим в виде линейной комбинации правильных $r_2$-слов от $a_1, \ldots, a_n$ той же длины, что и $v$.*

Доказательство. Вновь можно считать, что $A$ — свободная альтернативная алгебра с множеством порождающих $\{a_i\}$. Достаточно показать, что $v(a_1, \ldots, a_n)$ можно представить в виде какой-либо линейной комбинации правильных $r_2$-слов; сохранение длины будет вытекать из того, что $A$ — свободная алгебра однородного многообразия. Пусть $u_1$ — произвольный одночлен из $A$. Докажем индукцией по степени $d(u_1)$ одночлена $u_1$, что для любого правильного $r_2$-слова $u_2$ элемент $u_2u_1$ снова представим в виде линейной комбинации правильных $r_2$-слов от $a_1, \ldots, a_n$. Очевидно основание индукции: $d(u_1) = 1$. Пусть $d(u_1) = m \geqslant 2$, и для слов меньшей длины утверждение доказано. По предложению 3 имеем $u_1 = \alpha_0 u_0 + \sum_i \alpha_i u_{1i}$, где $u_0$ — правильное $r_1$-слово, а $u_{1i}$ — элементы вида (2). Так как $u_2u_0$ есть правильное $r_2$-слово, то нам остается рассмотреть элементы $u_2u_{1i}$. Пусть, например, $u_{1i}$ имеет вид $\{uwu'\}$, где $u, u', w$ — одночлены из $A$ степени, меньшей $n$. Тогда по линеаризованному правому тождеству Муфанг имеем

$$u_2u_{1i} = u_2\{uwu'\} = [(u_2u)w]u' + [(u_2u')w]u.$$

Так как $d(u) < n$, $d(w) < n$, $d(u') < n$, то, применив последовательно (слева направо) к каждому слагаемому в правой части три раза предположение индукции, мы получим представление элемента $u_2u_{1i}$ в виде линейной комбинации правильных $r_2$-слов. Аналогично рассматриваются другие случаи. Итак, мы доказали, что для любого правильного $r_2$-слова $u_2$ и для любого одночлена $u_1$ элемент $u_2u_1$ есть линейная комбинация правильных $r_2$-слов. Заметим теперь, что элемент $v(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ представляется в виде $v(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{i_1}R_{v_1}R_{v_2}\ldots R_{v_k}$, где $a_{i_1}$ — порождающий, стоящий на самом левом месте в $v(a_1, \ldots, a_n)$, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — некоторые одночлены из $A$. Начав с правильного $r_2$-слова $a_{i_1}$ и применив $k$ раз доказанное нами утверждение, мы получим представление элемента $v(a_1, \ldots, a_n)$ в виде линейной комбинации правильных $r_2$-слов. Теорема доказана.

Следствие. *В альтернативной алгебре $A$ для любого натурального $n$ верно включение $A^{n^2} \subseteq A^{\langle n\rangle}$. В частности, если алгебра $A$ правонильпотентна индекса $n$, то $A$ нильпотентна индекса не выше $n^2$.*

Доказательство. По теореме 5 всякий элемент из $A^{n^2}$ есть линейная комбинация $r_2$-слов от порождающих алгебры $A$ длины $\geqslant n^2$. Но любое $r_2$-слово $w$ длины $\geqslant n^2$ либо содержит $r_1$-слово длины $\geqslant n$, либо само является $r_1$-словом от более чем $n$ $r_1$-слов. Так как по предложению 1 $A^{\langle n\rangle}$ — идеал в $A$, то в каждом из случаев очевидно, что $w \in A^{\langle n\rangle}$. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь свободную альтернативную Ф-алгебру $\mathrm{Alt}[X]$ от множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. По аналогии с ассоциативным случаем элемент $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ назовем *альтернативным j-многочленом*, если $f$ выражается через элементы множества $X$ с помощью операций сложения, умножения на элементы из Ф, возведения в квадрат и «квадратичного умножения» $xU_y = yxy$. Множество всех альтернативных $j$-многочленов обозначим через $j_{\mathrm{Alt}}[X]$.

Пусть $\pi$ — канонический гомоморфизм алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ на свободную ассоциативную алгебру $\mathrm{Ass}[X]$; тогда ясно, что $\pi(j_{\mathrm{Alt}}[X]) = j[X]$.

Лемма 12. *Пусть* $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$. *Тогда*

$$R_{f(x_1, \ldots, x_n)} = f^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n}).$$

Доказательство. Пусть $S$ — множество альтернативных $j$-многочленов, для которых выполнено утверждение леммы. Очевидно, что $S \supseteq X$ и $S$ замкнуто относительно Ф-линейных комбинаций. Пусть теперь $f$, $g \in S$. Тогда

$$R_{f^2(x_1, \ldots, x_n)} = R^2_{f(x_1, \ldots, x_n)} = [f^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n})]^2 = (f^2)^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n}),$$

и в силу правого тождества Муфанг

$$R_{fgf(x_1, \ldots, x_n)} = R_{f(x_1, \ldots, x_n)} R_{g(x_1, \ldots, x_n)} R_{f(x_1, \ldots, x_n)} = f^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n})\, g^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n})\, f^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n}) = (fgf)^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n}).$$

Таким образом, множество $S$ содержит порождающие и замкнуто относительно операций сложения, умножения на элементы из Ф, возведения в квадрат и «квадратичного умножения» $xU_y = yxy$. Отсюда, очевидно, следует, что $S = j_{\mathrm{Alt}}[X]$. Лемма доказана.

Как и в ассоциативном случае, если $A$ — произвольная альтернативная алгебра и $M = \{m_i\}$ — подмножество алгебры $A$, то через $j_{\mathrm{Alt}}[M]$ мы обозначим множество элементов вида $f(m_1, \ldots, m_k)$, где $f(x_1, \ldots, x_k) \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$. Элементы множества $j_{\mathrm{Alt}}[M]$ будем называть $j$-многочленами от множества $M$.

Элемент $f \in \mathrm{Alt}[X]$ назовем *существенным*, если $f^\pi$ является допустимым элементом в алгебре $\mathrm{Ass}[X]$. Если $A$ — некоторая альтернативная Ф-алгебра и $M$ — подмодуль алгебры $A$, то будем говорить, что $M$ удовлетворяет *существенному полиномиальному тождеству*, если найдется такой существенный элемент $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Alt}[X]$, что $f(m_1, \ldots, m_k) = 0$ для всех $m_1, \ldots, m_k \in M$. Альтернативную алгебру, удовлетворяющую существенному полиномиальному тождеству, будем называть для краткости *альтернативной* PI-*алгеброй*.

Зафиксируем вновь некоторый идеал $Z$ кольца Ф.

Лемма 13. *Пусть в альтернативной* Ф-*алгебре* $A$ *с множеством порождающих* $R = \{a_1, \ldots, a_k\}$ *подмодуль* $M = j_{\mathrm{Alt}}[R]$ *удовлетворяет существенному полиномиальному тождеству* $f = 0$, *где* $f \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$. *Тогда, если всякий элемент подмодуля* $M$ *алгебраичен над* $Z$, *то для некоторого натурального числа* $N$ *все* $r_1$-*слова от порождающих* $a_i$ *длины, большей или равной* $N$, *представляются в виде* $Z$-*линейной комбинации* $r_1$-*слов от порождающих* $a_i$ *длины, меньшей* $N$.

Доказательство. Как легко видеть, для доказательства леммы достаточно доказать конечность над $Z$ подалгебры $A^*$ алгебры $R(A)$, порожденной операторами правого умножения $R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}$. Пусть $d_1(x_i), \ldots, d_n(x_i)$ — произвольные альтернативные $j$-многочлены. Очевидно, что $d_t(a_1, \ldots, a_k) \in M$ для любого $t$. Поэтому в силу леммы 12

$$f^\pi(d_1^\pi(R_{a_i}), \ldots, d_n^\pi(R_{a_i})) = f^\pi(R_{d_1(a_i)}, \ldots, R_{d_n(a_i)}) = R_{f(d_1(a_i), \ldots, d_n(a_i))} = 0.$$

Так как $j[X] = \pi(j_{\mathrm{Alt}}[X])$, то множество $j$-многочленов от $\{R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}\}$ удовлетворяет допустимому тождественному соотношению $f^\pi = 0$. Ввиду алгебраичности элементов подмодуля $M$, для любого $j$-многочлена $d(x_1, \ldots, x_k) \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$ существует натуральное число $m$

и элементы $z_i \in Z$ такие, что

$$d^m(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{m-1} z_i d^i(a_1, \ldots, a_k).$$

В силу леммы 12 и того, что $d^r(x_1, \ldots, x_k) \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$, имеем

$$(d^\pi)^m (R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}) = (d^m)^\pi (R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}) = R_{d^m(a_1, \ldots, a_k)} = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} z_i R_{d^i(a_1, \ldots, a_k)} = \sum_{i=1}^{m-1} z_i (d^\pi)^i (R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}).$$

Таким образом, всякий $j$-многочлен от множества $\{R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}\}$ является алгебраическим над $Z$. По теореме 3 алгебра $A^*$ конечна над $Z$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Всякая альтернативная* PI-*алгебра удовлетворяет существенному полиномиальному тождеству $f$, где $f \in j_{\mathrm{Alt}}[X]$.*

Доказательство. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ — существенное тождественное соотношение, выполняющееся в альтернативной PI-алгебре $A$. Тогда $A$ удовлетворяет и многочлену $\varphi(x, y) = g(xy, xy^2, \ldots, xy^n) \in \mathrm{Alt}[x, y]$. По теореме Артина алгебра $\mathrm{Alt}[x, y]$ ассоциативна и потому изоморфна $\mathrm{Ass}[x, y]$. Пусть $\psi(x, y) = \varphi(x, y)\varphi^*(x, y)$. Тогда по замечанию к теореме 3.3 $\psi(x, y)$ является $j$-многочленом, т. е. $\psi(x, y) \in j[\{x, y\}] = j_{\mathrm{Alt}}[\{x, y\}]$. Ясно, что $\psi(x, y)$ — существенный элемент и что алгебра $A$ удовлетворяет тождеству $\psi(x, y)$. Лемма доказана.

Теорема 6 (Ширшов). *Пусть $A$ — альтернативная* PI-*алгебра над кольцом $\Phi$ с множеством порождающих $R = \{a_i\}$ и пусть $M$ — множество всех $r_1$-слов от элементов множества $R$. Тогда если всякий элемент подмодуля $j_{\mathrm{Alt}}[M]$ алгебраичен над $Z$, то алгебра $A$ локально конечна над $Z$.*

Доказательство. Ввиду леммы 8, достаточно показать, что любое конечное подмножество множества $R$ порождает конечную над $Z$ подалгебру алгебры $A$. Пусть $B$ — произвольная подалгебра, порожденная конечным множеством $R_0 = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$. Из лемм 14 и 13 следует существование такого натурального числа $n$, что всякое $r_1$-слово от элементов множества $R_0$ длины $\geqslant n$ представляется в виде $Z$-линейной комбинации $r_1$-слов

меньшей длины. Обозначим через $R_1$ множество всех $r_1$-слов от элементов множества $R_0$ длины, меньшей $n$. Вновь применив леммы 14 и 13, получаем натуральное число $m$, для которого всякое $r_1$-слово от множества $R_1$ $R_1$-длины $\geqslant m$ представимо в виде $Z$-линейной комбинации $r_1$-слов от множества $R_1$ меньшей $R_1$-длины. Ясно теперь, что всякое $r_2$-слово от множества $R_0$ длины $\geqslant mn$ является $Z$-линейной комбинацией $r_2$-слов от множества $R_0$ меньшей длины. Ввиду теоремы 5, это означает, что всякое произведение $mn$ или более элементов множества $R_0$ представимо в виде $Z$-линейной комбинации произведений меньшего числа сомножителей из $R_0$. Следовательно, алгебра $B$ конечна над $Z$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть в альтернативной* Φ-*алгебре* $A$ *всякий элемент является алгебраическим над* $Z$, *причем степени алгебраичности ограничены числом* $n$. *Тогда* $A$ *локально конечна над* $Z$.

Действительно, как легко видеть, алгебра $A$ удовлетворяет существенному многочлену $[[x^n, y], [x^{n-1}, y], \ldots \ldots, [x, y]] \in \mathrm{Alt}\,[x, y]$.

Следствие 2. *Пусть всякий элемент альтернативной* PI-*алгебры* $A$ *нильпотентен. Тогда* $A$ *локально нильпотентна.*

В частности, всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса локально нильпотентна.

**Упражнения**

1. Доказать, что если в Φ есть элемент 1/2, то $A^4 \subseteq P(A)$ для любой альтернативной алгебры $A$.

2. Пусть $A$ — Φ-алгебра и $1/2 \in \Phi$. Доказать, что если $A$ альтернативна, то $A^{(+)}$ является специальной йордановой алгеброй. При этом если $A$ конечнопорождена, то и $A^{(+)}$ конечнопорождена.

3 (Жевлаков). Пусть $B$ — альтернативная алгебра, $A$ — подалгебра алгебры $B$ с множеством порождающих $\{a_i\}$. Тогда в качестве порождающих алгебры $R^B(A)$, порожденной операторами правого умножения $R_a$ на элементы алгебры $A$ в алгебре $B$, можно взять операторы правого умножения $R_w$, где $w$ — правильное $r_1$-слово от $\{a_i\}$.

4. В условиях упражнения 3 доказать, что если алгебра $A$ конечнопорождена, то и алгебра $R^B(A)$ конечнопорождена.

5. Доказать, что если альтернативная алгебра $A$ локально нильпотентна, то алгебра $R^B(A)$ локально нильпотентна для любой альтернативной надалгебры $B \supseteq A$.

6. Пусть $A$ — конечнопорожденная альтернативная алгебра. Доказать, что для любого $n$ существует такое число $f(n)$, что $A^{f(n)} \subseteq A^{(n)}$.

7. Доказать, что во всякой альтернативной алгебре существует локально нильпотентный радикал.

8. Пусть $\pi$ — канонический гомоморфизм свободной альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ на свободную ассоциативную алгебру $\mathrm{Ass}[X]$. Доказать, что $j_{\mathrm{Alt}}[X] \cap \mathrm{Ker}\,\pi = (0)$. В частности, ограничение $\pi$ на множестве $j_{\mathrm{Alt}}[X]$ взаимно однозначно отображает $j_{\mathrm{Alt}}[X]$ на $j[X]$.

## ЛИТЕРАТУРА

Голод [37], Джекобсон [46], Жевлаков и Шестаков [80], Курош [104], Медведев [145], Прочези [170], Херстейн [252], Ширшов [276, 277, 279].

*ГЛАВА 6*

# РАЗРЕШИМОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

## § 1. Теорема Нагаты — Хигмана

В связи с теоремой Ширшова о локальной нильпотентности альтернативной ниль-алгебры ограниченного индекса возникает естественный вопрос: насколько существенным является в этой теореме условие локальности, т. е. не будет ли всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса нильпотентной? В этом параграфе мы покажем, что в случае ассоциативных алгебр при достаточно хорошем кольце операторов ответ на этот вопрос оказывается положительным.

Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра. Обозначим через $I_n(A)$ множество*

$$I_n(A) = \{\sum_i \alpha_i a_i^n \mid \alpha_i \in \Phi,\ a_i \in A\}.$$

*Тогда* $(n!)^2 I_n(A) A + (n!)^2 A I_n(A) \subseteq I_n(A)$.

Доказательство. Обозначим через $S_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ следующую сумму:

$$S_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} v(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}),$$

где $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — некоторое фиксированное неассоциативное слово длины $n$. По лемме 1.4 мы имеем

$$S_n(a_1, \ldots, a_n) = v(a_1 + \ldots + a_n, \ldots, a_1 + \ldots + a_n) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} v(a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + a_n, \ldots, a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + a_n) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} v(a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + \hat{a}_j + \ldots + a_n, \ldots$$

$$\ldots, a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + \hat{a}_j + \ldots + a_n) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} v(a_i, \ldots, a_i). \quad (1)$$

Ввиду того, что $A$ — алгебра с ассоциативными степенями, правая часть этого равенства не зависит от способа расстановки скобок в одночлене $v$. Следовательно, и сумма $S_n(a_1, \ldots, a_n)$ не зависит от способа расстановки скобок в одночлене $v$. Можно считать, например, расстановку скобок правонормированной. Далее, из (1) следует, что $S_n(a_1, \ldots, a_n) \in I_n(A)$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$. Пусть теперь $a$, $b$ — произвольные элементы алгебры $A$. Тогда имеем

$$S_n(ab, a, \ldots, a) = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} a^i (ab) a^{n-1-i} =$$

$$= a(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} a^i b a^{n-1-i} = aS_n(b, a, \ldots, a),$$

откуда

$$aS_n(b, a, \ldots, a) \in I_n(A). \quad (2)$$

Линеаризуя это включение по $a$, получаем, что для любых $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ справедливо включение

$$(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i S_n(b, a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n) \in I_n(A). \quad (3)$$

Полагая в (3) $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b$, получим

$$(n-1)!\, aS_n(b, b, \ldots, b) +$$
$$+ (n-1)(n-1)!\, bS_n(a, b, \ldots, b) \in I_n(A),$$

откуда в силу (2) следует

$$(n!)^2 ab^n \in I_n(A).$$

Аналогично доказывается, что для любых $a, b \in A$

$$(n!)^2 b^n a \in I_n(A).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра. Обозначим через $J_n(A)$ множество*

$$J_n(A) = \{a \in A \mid (n!)^k a \in I_n(A) \text{ для некоторого } k\}.$$

*Тогда* $J_n(A)$ — *идеал алгебры* $A$ *и фактор-алгебра* $A/J_n(A)$ *не содержит в аддитивной группе элементов порядка* $\leqslant n$.

Доказательство. Очевидно, что $J_n(A)$ является Ф-подмодулем Ф-модуля $A$. Пусть теперь $a \in J_n(A)$, $b \in A$ и пусть $(n!)^k a \in I_n(A)$. По лемме 1 $(n!)^2 b\,[(n!)^k a]$, $(n!)^2\,[(n!)^k a]\,b \in I_n(A)$, откуда $(n!)^{k+2} ba$, $(n!)^{k+2} ab \in I_n(A)$ и $ba, ab \in J_n(A)$. Тем самым доказано, что $J_n(A)$ — идеал алгебры $A$. Заметим теперь, что идеал $J_n(A)$ обладает следующим свойством: если $(n!)^k a \in J_n(A)$, то $a \in J_n(A)$. Отсюда следует, что фактор-алгебра $A/J_n(A)$ не содержит в аддитивной группе элементов порядка $\leqslant n$. Следствие доказано.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Теорема 1 (Нагата, Хигман). *Пусть* $A$ — *произвольная ассоциативная алгебра. Тогда для любого натурального числа* $n$

$$A^{2^n-1} \subseteq J_n(A).$$

Доказательство (Хиггинс). Будем доказывать теорему индукцией по $n$. Для $n=1$ утверждение очевидно; пусть оно верно для $n-1$. Ввиду того, что $S_n(b, a, \ldots, a) \in I_n(A)$, имеем для любых $a, b \in A$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i b a^{n-1-i} \in J_n(A). \tag{4}$$

Пусть теперь $a, b, c$ — произвольные элементы алгебры $A$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a^{n-1-i} c b^j a^i b^{n-1-j} = \sum_{j=1}^{n-1} \Big( \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} (cb^j)\, a^i \Big) b^{n-1-j} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n-1} a^{n-1} c b^j b^{n-1-j} + k = -(n-1)\, a^{n-1} c b^{n-1} + k,$$

где $k \in J_n(A)$ в силу (4). С другой стороны, имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a^{n-1-i} c b^j a^i b^{n-1-j} = \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-1-i} c \Big( \sum_{j=1}^{n-1} b^j a^i b^{n-1-j} \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a^{n-1-i} c a^i)\, b^{n-1} + k_1 = a^{n-1} c b^{n-1} + k_2,$$

где вновь $k_1, k_2 \in J_n(A)$. В результате получаем

$$na^{n-1}cb^{n-1} \in J_n(A).$$

Ввиду произвольности элементов $a$, $b$, $c$, отсюда следует, что

$$nI_{n-1}(A)\,AI_{n-1}(A) \subseteq J_n(A)$$

и, далее,

$$J_{n-1}(A)\,AJ_{n-1}(A) \subseteq J_n(A).$$

По предположению индукции $A^{2^{n-1}-1} \subseteq J_{n-1}(A)$, следовательно,

$$A^{2^n-1} = A^{2^{n-1}-1}AA^{2^{n-1}-1} \subseteq J_n(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $A$ — ассоциативная ниль-алгебра индекса $n$ без элементов порядка $\leqslant n$ в аддитивной группе. Тогда $A$ нильпотентна индекса $\leqslant 2^n - 1$.*

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях следствия $J_n(A) = (0)$.

Следствие 2. *Пусть $A$ — произвольная ассоциативная алгебра. Тогда для любого натурального числа $n$ существует такое натуральное число $k$, что для любого $a \in A^{2^n-1}$*

$$(n!)^k a = \sum_i \alpha_i a_i^n, \quad \textit{где} \quad \alpha_i \in \Phi, \quad a_i \in A.$$

Для доказательства рассмотрим свободную ассоциативную Ф-алгебру Ass $[X]$ от множества свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. По теореме 1 имеем

$$x_1x_2 \ldots x_{2^n-1} \in J_n(\mathrm{Ass}\,[X]),$$

следовательно, для некоторого $k$

$$(n!)^k x_1x_2 \ldots x_{2^n-1} = \sum_i \alpha_i u_i^n, \quad \text{где} \quad \alpha_i \in \Phi, \quad u_i \in \mathrm{Ass}\,[X].$$

Как легко видеть, данное число $k$ является искомым.

Заметим, что полученная в теореме Нагаты — Хигмана оценка $2^n - 1$ не является точной, так как в случае $n = 3$ известно, что $A^6 \subseteq J_3(A)$, в то время как $2^3 - 1 = 7$. Вопрос о соответствующей точной оценке $f(n)$ в случае произвольного $n$ остается открытым. Размыслов

недавно показал, что $f(n) \leqslant n^2$. С другой стороны, Кузьмин доказал, что $f(n) \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

**Упражнения**

1. Пусть $A$ — йорданова алгебра. Как и в случае альтернативных алгебр, в $A$ можно рассматривать подмножества $I_n(A)$ и $J_n(A)$. Доказать, что для любого $n$ $J_n(A)$ — идеал алгебры $A$.

2. Доказать, что для любого простого числа $p$ существует ненильпотентная ассоциативная ниль-алгебра индекса $p$ над полем характеристики $p$.

3 (Хигман). Доказать, что для всякой ассоциативной алгебры $A$ справедливо включение $A^6 \subseteq J_3(A)$.

## § 2. Пример Дорофеева

Вернемся теперь к альтернативным алгебрам. Оказывается, что, в отличие от ассоциативного случая, альтернативные ниль-алгебры ограниченного индекса могут быть ненильпотентными, т. е. теорема Нагаты — Хигмана не переносится на альтернативные алгебры. Это доказал Дорофеев, построив пример ненильпотентной разрешимой альтернативной алгебры над произвольным кольцом операторов. Мы приведем этот пример в несколько измененном виде.

Рассмотрим два множества символов: $E = \{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, $V = \{x, L_i, R_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Если $v$ — произвольное ассоциативное слово от элементов $V$, то через $d_R(v)$ мы будем обозначать число символов $R_i$, входящих в состав $v$. Слово $v$ назовем *регулярным*, если $v$ имеет один из следующих видов:

1) $d_R(v) = 0$, $v = x$ или $v = xL_i$;

2) $d_R(v) = 1$, $v = xR_j$ или $v = xL_iR_j$;

3) $d_R(v) \geqslant 2$, $v = x\hat{L}_{i_1}R_{i_2}R_{i_3} \ldots R_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ и символ $L_{i_1}$ может отсутствовать.

Множество всех регулярных слов обозначим через $T(V)$.

Пусть теперь $u$ — произвольное слово от $V$ вида

$$u = x\hat{L}_{i_1}R_{i_2}R_{i_3} \ldots R_{i_n},$$

где $d_R(u) \geqslant 2$ и символ $L_{i_1}$ может отсутствовать. Обозначим через $\bar{u}$ регулярное слово вида

$$\bar{u} = x\hat{L}_{j_1}R_{j_2}R_{j_3} \ldots R_{j_n},$$

где $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ и символ $L_{j_1}$ входит в состав $\overline{u}$ тогда и только тогда, когда символ $L_{i_1}$ входит в $u$. Через $t(u)$ обозначим число инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Если среди символов $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_n$ есть одинаковые, то полагаем $\overline{u} = 0$.

Рассмотрим свободный Ф-модуль $A$, базисом которого является множество $E \cup T(V)$. Превратим $A$ в алгебру, определив умножение на базисе по следующим правилам:

1. $x \cdot y = 0$, если $x, y \in E$ или $x, y \in T(V)$.
2. а) $x \cdot e_i = xR_i$, $xL_j \cdot e_i = xL_jR_i$;
   б) если $u \in T(V)$ и $d_R(u) \geqslant 1$, то

$$u \cdot e_i = (-1)^{t(uR_i)}\overline{uR_i}.$$

3. а) $e_i \cdot x = xL_i$, $e_i \cdot xL_j = xR_j \cdot e_i$;
   б) если $u \in T(V)$ и $d_R(u) \geqslant 1$, то $u = u'R_i$ и

$$e_j \cdot u = e_j \cdot (u'R_i) = (e_j \cdot u' + u' \cdot e_j) \cdot e_i.$$

Как легко видеть, правила 1—3 определяют произведение любых базисных элементов. Рассмотрим теперь Ф-модуль $I = \Phi(T(V))$, порожденный множеством $T(V)$. Ясно, что $I$ — идеал алгебры $A$, при этом $I^2 = (0)$ и $A^2 \subseteq$ $\subseteq I$. Следовательно, $(A^2)^2 = (0)$, $A$ разрешима и является ниль-алгеброй ограниченного индекса. Далее, алгебра $A$ ненильпотентна, так как для любого $n$ произведение $(\ldots((x \cdot e_1) \cdot e_2) \ldots) \cdot e_n = xR_1R_2 \ldots R_n$ отлично от нуля. Остается доказать, что алгебра $A$ альтернативна. Доказательство этого факта мы разобьем на несколько лемм.

Вначале отметим следующее очевидное равенство:

$$(v \cdot e_i) \cdot e_j + (v \cdot e_j) \cdot e_i = 0, \tag{5}$$

где $v \in T(V)$, $e_i, e_j \in E$.

Л е м м а 2. *Для любых $v \in T(V)$, $e_i, e_k \in E$ имеет место равенство*

$$e_i \cdot (v \cdot e_k) = (e_i \cdot v + v \cdot e_i) \cdot e_k. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать это равенство индукцией по числу $d_R(v)$, т. е. по числу символов $R_i$, входящих в $v$. Если $d_R(v) = 0$, то либо $v = x$, либо $v = xL_j$, и (6) следует сразу же из правил умножения. Пусть теперь $d_R(v) = n \geqslant 1$ и для всех слов из $T(V)$, содержащих менее $n$ символов $R_i$, равенство (6) верно. Пусть $v = v'R_n$. Если $k \geqslant n$, то (6) следует из прави-

ла 3б). Следовательно, можно считать, что $k < n$. Имеем в силу правил умножения 2б), 3б), предположения индукции и формулы (5)

$$\begin{aligned}
e_i\cdot(v\cdot e_k) &= e_i\cdot(v'R_n\cdot e_k) = (-1)^{t(vR_k)}e_i\cdot(\overline{v'R_k}R_n) = \\
&= (-1)^{t(vR_k)}(e_i\cdot\overline{v'R_k}+\overline{v'R_k}\cdot e_i)\cdot e_n = \\
&= (-1)^{t(vR_k)}\cdot(-1)^{t(v'R_k)}(e_i\cdot(v'.e_k)+(v'\cdot e_k)\cdot e_i)\cdot e_n = \\
&= -[(e_i\cdot v'+v'\cdot e_i)\cdot e_k]\cdot e_n+[(v'\cdot e_i)\cdot e_k]\cdot e_n = \\
&= [(e_i\cdot v'+v'\cdot e_i)\cdot e_n]\cdot e_k-[(v'\cdot e_i)\cdot e_n]\cdot e_k = \\
&= [e_i\cdot(v'\cdot e_n)]\cdot e_k+[(v'\cdot e_n)\cdot e_i]\cdot e_k = \\
&= (e_i\cdot v'R_n+v'R_n\cdot e_i)\cdot e_k = (e_i\cdot v+v\cdot e_i)\cdot e_k.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $v \in T(V)$, $e_i$, $e_j$, $e_k \in E$ справедливы равенства*

$$[(e_i\cdot v)\cdot e_j + (e_j\cdot v)\cdot e_i]\cdot e_k = 0, \tag{7}$$

$$e_i\cdot (e_j\cdot v) = (v\cdot e_j)\cdot e_i. \tag{8}$$

Доказательство. Докажем вначале равенство (7). Если $v = x$ или $v = xL_n$, то (7) справедливо. Пусть теперь $v = v'R_n$ и для слов с меньшим числом символов $R_i$ равенство (7) верно. Тогда имеем в силу (6), (5) и по предположению индукции

$$\begin{aligned}
(e_i\circ v'R_n)\cdot e_j &= [(e_i\cdot v' + v'\cdot e_i)\cdot e_n]\cdot e_j = \\
&= -[(e_n\cdot v' + v'\cdot e_n)\cdot e_i]\cdot e_j = [(e_n\cdot v' + v'\cdot e_n)\cdot e_j]\cdot e_i = \\
&= -[(e_j\cdot v' + v'\cdot e_j)\cdot e_n]\cdot e_i = -[e_j\cdot(v'\cdot e_n)]\cdot e_i = \\
&= -(e_j\cdot v)\cdot e_i.
\end{aligned}$$

Итак, если $d_R(v) > 0$, то справедливо даже более сильное равенство, чем (7): $(e_i\cdot v)\cdot e_j + (e_j\cdot v)\cdot e_i = 0$. Докажем теперь (8). Если $d_R(v) = 0$, то (8) справедливо. Пусть теперь $v = v'R_n$. Имеем в силу (5), (6), (7) и по предположению индукции

$$\begin{aligned}
e_i\cdot(e_j\cdot v'R_n) &= e_i\cdot [(e_j\cdot v' + v'\cdot e_j)\cdot e_n] = \\
&= [e_i\cdot(e_j\cdot v'+v'\cdot e_j)+(e_j\cdot v'+v'\cdot e_j)\cdot e_i]\cdot e_n = \\
&= [(v'\cdot e_j)\cdot e_i + (e_i\cdot v' + v'\cdot e_i)\cdot e_j + (e_j\cdot v')\cdot e_i + \\
&+ (v'\cdot e_j)\cdot e_i]\cdot e_n = [(e_i\cdot v')\cdot e_j + (e_j\cdot v')\cdot e_i]\cdot e_n + \\
&+ [(v'\cdot e_n)\cdot e_j]\cdot e_i = (v\cdot e_j)\cdot e_i.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Алгебра $A$ альтернативна.*

Доказательство. Из таблицы умножения видно, что ненулевыми являются лишь ассоциаторы, содержащие один элемент из $T$ ($V$) и два элемента из $E$. В силу равенства (5) имеем

$$(v,\ e_i,\ e_j) + (v,\ e_j,\ e_i) = 0.$$

Далее, из (8) и (5) имеем также

$$(e_i,\ e_j,\ v) + (e_j,\ e_i,\ v) = 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned}(e_i,\ v,\ e_j) + (e_i,\ e_j,\ v) &= \\ &= (e_i\cdot v)\cdot e_j - e_i\cdot(v\cdot e_j) - e_i\cdot(e_j\cdot v) = \\ &= (e_i\cdot v)\cdot e_j - (e_i\cdot v)\cdot e_j - (v\cdot e_i)\cdot e_j - (v\cdot e_j)\cdot e_i = 0\end{aligned}$$

в силу (6), (8) и (5). Далее, вновь в силу (6) получаем

$$\begin{aligned}(v,\ e_i,\ e_j) + (e_i,\ v,\ e_j) &= (v\cdot e_i)\cdot e_j + (e_i\cdot v)\cdot e_j - e_i\cdot(v\cdot e_j) = \\ &= (v\cdot e_i)\cdot e_j + (e_i\cdot v)\cdot e_j - (e_i\cdot v)\cdot e_j - (v\cdot e_i)\cdot e_j = 0.\end{aligned}$$

Наконец, легко видеть, что

$$(v,\ e_i,\ e_i) = (e_i,\ v,\ e_i) = (e_i,\ e_i,\ v) = 0.$$

Лемма доказана.

### Упражнения

**1.** Пусть $A$ — построенная в § 2 разрешимая ненильпотентная алгебра. Доказать, что ее аннулятор $\operatorname{Ann} A = \{a \in A \mid aA = Aa = (0)\}$ порождается как Ф-модуль элементами вида $xL_iR_i$, $xL_iR_j + xL_jR_i$ и что фактор-алгебра $\overline{A} = A/\operatorname{Ann} A$ является ненильпотентной разрешимой ниль-алгеброй индекса 3 и $\operatorname{Ann} \overline{A} = (\overline{0})$.

**2.** Доказать, что алгебра $\overline{A}$, определенная в предыдущем упражнении, имеет нулевой ассоциативный центр.

**3.** Пусть $T_k$ — идеал тождеств свободной алгебры от $k$ порождающих в многообразии альтернативных алгебр, разрешимых индекса 2. Доказать, что цепочка $T$-идеалов

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$$

не стабилизируется ни на каком конечном шаге.

## § 3. Теорема Жевлакова

В предыдущем параграфе мы установили, что теорема Нагаты — Хигмана не переносится дословно на альтернативные алгебры. Мы доказали даже более сильное утверждение, а именно: из разрешимости альтернативной алгебры $A$, вообще говоря, не следует ее нильпотентность. (Напомним, что аналогичный факт имеет место и в теории йордановых алгебр.) В связи со всем этим возникает естественный вопрос: не будет ли всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса разрешимой? Как доказал Жевлаков, при достаточно хорошем кольце операторов ответ на этот вопрос оказывается положительным.

Для доказательства теоремы Жевлакова нам понадобится ряд лемм.

Ниже всюду $A$ — произвольная альтернативная алгебра.

Лемма 5. *В алгебре $A$ справедливо тождество*

$$(zx \circ xz,\ y,\ z) = (xzx,\ y,\ z^2). \tag{9}$$

Доказательство. Применяя тождества Муфанг и их линеаризации, получаем

$$\begin{aligned}(zx \circ xz,\ y,\ z) &= (zx)\circ(xz,\ y,\ z) + (xz)\circ(zx,\ y,\ z) = \\ &= (zx)\circ(x,\ yz,\ z) + (xz)\circ(x,\ zy,\ z) = \\ &= (zx\circ x,\ yz,\ z) - x\circ(zx,\ yz,\ z) + (xz\circ x,\ zy,\ z) - \\ &- x\circ(xz,\ zy,\ z) = (zx^2,\ yz,\ z) + (x^2z,\ zy,\ z) + \\ &+ (xzx,\ y\circ z,\ z) - 2x\circ(x,\ zyz,\ z) = \\ &= 2(x^2,\ zyz,\ z) + (xzx,\ y,\ z^2) - 2(x^2,\ zyz,\ z) = \\ &= (xzx,\ y,\ z^2).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *В фактор-алгебре $\bar{A} = A/J_n(A)$ справедливо тождество*

$$z(x^{n-1},\ y,\ z)z = 0.$$

Доказательство. Заметим вначале, что в $\bar{A}$ справедливо тождество

$$0 = S_n(z,\ x,\ \ldots,\ x) = (n-1)!\sum_{i=0}^{n-1} x^i z x^{n-1-i},$$

откуда в силу свойств идеала $J_n(A)$ получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} z x^i = 0. \tag{10}$$

Теперь, ввиду (10), имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} (zx^i) \circ (x^{n-1-i} z) = nzx^{n-1}z + \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} z^2 x^i = nzx^{n-1}z,$$

откуда вследствие линеаризованного по $x$ тождества (9) и тождеств Муфанг имеем

$$nz(x^{n-1}, y, z) z = (nzx^{n-1}z, y, z) =$$
$$= \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (zx^i) \circ (x^{n-1-i} z), y, z\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z x^{n-1-i}, y, z^2\Big) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *В алгебре $\overline{A}$ справедливо тождество*

$$(x^{n-1}, y^{n-1}, z^2) = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что во всякой альтернативной алгебре верно тождество

$$(x^n, y, z) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i (x, y, z) x^{n-1-i}. \tag{11}$$

Действительно, по теореме Артина $(x^n, y, x) = 0$, откуда

$$0 = (x^n, y, x) \Delta_x^1(z) = (x^n, y, z) + \sum_{i=0}^{n-1} (x^i z x^{n-1-i}, y, x),$$

и далее в силу тождеств Муфанг получаем (11).

По лемме 6 для любых $k, l \geqslant 1$ имеем

$$z^k (x^{n-1}, y, z) z^l = 0.$$

В силу тождества (11) отсюда следует, что для любого $m \geqslant 1$

$$(x^{n-1}, y, z^m) = (x^{n-1}, y, z) \circ z^{m-1}.$$

Теперь имеем

$$0 = (x^{n-1}, y, z^n) = (x^{n-1}, y, z) \circ z^{n-1} =$$
$$= \{ \ldots [(x^{n-1}, y, z) \circ z] \circ z \ldots \} \circ z.$$

Линеаризация этого тождества по $z$ дает

$$0 = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \{ \ldots [(x^{n-1}, y, z_{i_1}) \circ z_{i_2}] \circ z_{i_3} \ldots \} \circ z_{i_n}. \qquad (12)$$

Положим здесь $z_1 = z_2 = z$, $z_3 = z_4 = \ldots = z_n = y$. Так как для любого $k \geqslant 0$

$$\{[\ldots((x^{n-1}, y, z) \circ \underbrace{y) \circ y \ldots] \circ y}_{k}\} \circ z =$$

$$= ([\ldots (x^{n-1} \circ \underbrace{y) \circ y \ldots] \circ y}_{k}, y, z) \circ z =$$

$$= ([\ldots (x^{n-1} \circ \underbrace{y) \circ y \ldots] \circ y}_{k}, y, z^2) =$$

$$= \{ \ldots [(x^{n-1}, y, z^2) \circ \underbrace{y] \circ y \ldots \} \circ y}_{k} = (x^{n-1}, y, z^2) \circ y^k,$$

то тождество (12) после произведенной подстановки примет вид

$$0 = 2(n-1)!\,(x^{n-1}, y, z^2) \circ y^{n-2} =$$
$$= 2(n-1)!\,(x^{n-1}, y^{n-1}, z^2).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. $A^4 \subseteq J_2(A)$.

Доказательство. Для любых $a, b \in A$ имеем $a^2$, $a \circ b \in J_2(A)$ и $2aba = (a \circ b) \circ a - a^2 \circ b \in J_2(A)$, откуда и $aba \in J_2(A)$. Теперь, как и при доказательстве предложения 5.3, получаем, что фактор-алгебра $\bar{A} = A/J_2(A)$ антикоммутативна и антиассоциативна. Рассмотрим в алгебре $\bar{A}$ ассоциатор

$$(ab, c, d) = [(ab)c]d - (ab)(cd) =$$
$$= -[a(bc)]d + a[b(cd)] =$$
$$= a[(bc)d] - a[(bc)d] = 0.$$

С другой стороны, имеем

$$(ab, c, d) = [(ab)c]d - (ab)(cd) =$$
$$= [(ab)c]d + [(ab)c]d = 2[(ab)c]d.$$

Полученные равенства доказывают, что $\bar{A}^4 = (0)$. Лемма доказана.

Теперь может быть доказана

Теорема 2 (Жевлаков). *Пусть $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Тогда для любого натурального $n$*

$$A^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} \subseteq J_n(A).$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно; при $n = 2$ в силу леммы 8 имеем $A^{(3)} \subseteq \subseteq A^2 \cdot A^2 \subseteq A^4 \subseteq J_2(A)$, т. е. утверждение также верно. Пусть теперь $A^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} \subseteq J_{n-1}(A)$, $n > 2$. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A} = A/J_n(A)$. По индуктивному предположению имеем

$$\bar{A}^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)} \subseteq J_{n-1}(\bar{A}).$$

Далее, из леммы 7, ввиду включения $J_{n-1}(A) \subseteq J_2(A)$, следует, что $J_{n-1}(A)$ — ассоциативная ниль-алгебра индекса $n$. По теореме Нагаты — Хигмана алгебра $J_{n-1}(A)$ нильпотентна индекса $2^n - 1$, откуда $(J_{n-1}(A))^{(n)} = (0)$. Так как $(A^{(k)})^{(m)} = A^{(k+m)}$, то окончательно получаем

$$\bar{A}^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} = (\bar{A}^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)})^{(n)} \subseteq (J_{n-1}(A))^{(n)} = (0),$$

откуда

$$A^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} \subseteq J_n(A).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $A$ — альтернативная ниль-алгебра индекса $n$ без элементов порядка $\leqslant n$ в аддитивной группе. Тогда алгебра $A$ разрешима индекса $\leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.*

Следствие 2. *Пусть $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Тогда для любого натурального числа $n$ существует такое натуральное число $k$, что для любого $a \in A^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$*

$$(n!)^k a = \sum_i \alpha_i a_i^n, \quad \text{где} \quad \alpha_i \in \Phi, \quad a_i \in A.$$

Таким образом, всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса локально нильпотентна, при доста-

точно хорошем кольце операторов даже разрешима, но при любом кольце операторов может быть ненильпотентной. При этом, как и в теореме Нагаты — Хигмана, довольно легко видеть, что ограничение на характеристику является существенным для разрешимости.

Заметим для сравнения, что в случае йордановых алгебр ситуация далеко не так ясна. Мы уже отмечали в главе 5, что ответ на вопрос о локальной нильпотентности йордановых ниль-алгебр ограниченного индекса неизвестен для неспециальных йордановых алгебр. Вопрос о разрешимости йордановых ниль-алгебр ограниченного индекса не решен даже для специальных йордановых ниль-алгебр индекса 3.

**Упражнения**

Ниже $A$ — альтернативная Ф-алгебра, где $\Phi \ni 1/2$.

**1.** Доказать, что для любого натурального $n$ множество $A_n = (A^{(+)})^{(n)}$ является подалгеброй алгебры $A$.

Указание. Доказать, что $A_n = I_2(A_{n-1})$, затем применить лемму 1 и индукцию по $n$.

**2.** Доказать, что $A^{(2n)} \subseteq (A^{(+)})^{(n)}$. В частности, алгебра $A$ разрешима тогда и только тогда, когда йорданова алгебра $A^{(+)}$ разрешима.

Указание. Применить лемму 8 и индукцию по $n$.

**3.** Пусть $I$ — идеал алгебры $A$, $M$ — некоторый подмодуль Ф-модуля $A$, причем $I \odot A^{(+)} \subseteq M$. Доказать, что для любого неассоциативного слова $v(x_1, x_2, x_3, x_4)$ длины 4 справедливо включение $v(I, A, A, A) \subseteq M$.

Указание. Рассмотреть свободную альтернативную Ф-алгебру и применить лемму 8.

**4.** Доказать, что $A^{3n+1} \subseteq (A^{(+)})^{n+1}$. В частности, алгебра $A$ нильпотентна тогда и только тогда, когда йорданова алгебра $A^{(+)}$ нильпотентна.

Указание. Применить индукцию по $n$ и воспользоваться упражнением 3.

ЛИТЕРАТУРА

Дорофеев [55], Жевлаков [66], Кузьмин [103], Нагата [157], Размыслов [175], Хигман [253].

Результаты о связи разрешимости и нильпотентности в некоторых других многообразиях алгебр: Андерсон [13, 14], Дорофеев [59], Жевлаков [69], Жевлаков и Шестаков [80], Марковичев [144], Никитин [160], Пчелинцев [172, 174], Роомельди [184], Шестаков [267].

*ГЛАВА* **7**

# ПРОСТЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Вопросы о строении простых алгебр в том или ином многообразии являются одними из главных вопросов теории колец. Настоящая глава посвящена изучению простых альтернативных алгебр. Мы уже знаем один пример простой неассоциативной альтернативной алгебры — это алгебра Кэли — Диксона. Оказывается, что других простых неассоциативных альтернативных алгебр не существует. Этот результат доказывался с постепенным нарастанием общности на протяжении нескольких десятков лет разными авторами: вначале для конечномерных алгебр (Цорн, Шафер), затем для алгебр с нетривиальным идемпотентом (Алберт), для альтернативных тел (Брак, Клейнфелд, Скорняков), для коммутативных альтернативных алгебр (Жевлаков) и т. д. Наибольшее продвижение было получено Клейнфелдом, доказавшим, что всякая простая альтернативная неассоциативная алгебра, не являющаяся ниль-алгеброй характеристики 3, есть алгебра Кэли — Диксона. Окончательное описание простых альтернативных алгебр осуществилось после появления теоремы Ширшова о локальной нильпотентности альтернативных ниль-алгебр с тождественными соотношениями.

## § 1. Предварительные результаты

Пусть $A$ — произвольная алгебра. В алгебре $A$ можно рассматривать следующие три основных центральных подмножества: *ассоциативный центр* $N(A)$, *коммутативный центр* $K(A)$ и *центр* $Z(A)$, которые определяются следующим образом:

$$N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = (0)\};$$
$$K(A) = \{k \in A \mid [k, A] = (0)\},$$
$$Z(A) = N(A) \cap K(A).$$

Лемма 1. *Пусть* $A$ — *произвольная алгебра*, $x, y, z \in A$, $n \in N(A)$. *Тогда в* $A$ *справедливы соотношения*

$$n(x, y, z) = (nx, y, z), \tag{1}$$

$$(xn, y, z) = (x, ny, z), \tag{2}$$

$$(x, y, z)n = (x, y, zn). \tag{3}$$

*Если, кроме того, один из элементов* $x, y, z$ *принадлежит* $N(A)$, *то в* $A$ *справедливо соотношение*

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y. \tag{4}$$

Доказательство. Заметим, что во всякой алгебре справедливо тождество

$$(wx, y, z) + (w, x, yz) - w(x, y, z) - (w, x, y)z - (w, xy, z) = 0. \tag{5}$$

Для доказательства его достаточно раскрыть все ассоциаторы. Из тождества (5) вытекает справедливость соотношений (1) — (3). Для доказательства соотношения (4) достаточно установить, что в любой алгебре верно тождество

$$[xy, z] - x[y, z] - [x, z]y = (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y). \tag{6}$$

Оно доказывается так же, как и (5). Лемма доказана.

Следствие 1. *Множества* $N(A)$ *и* $Z(A)$ *всегда являются подалгебрами алгебры* $A$. *Если алгебра* $A$ *альтернативна, то коммутативный центр* $K(A)$ *также является подалгеброй алгебры* $A$, *при этом* $3K(A) \subseteq Z(A)$.

Доказательство. Из соотношений (1) — (3) следует, что $N(A)$ является подалгеброй, а из (4) следует, что и $Z(A)$ является подалгеброй. Пусть теперь алгебра $A$ альтернативна. Тождество (6) в этом случае принимает следующий вид:

$$[xy, z] - x[y, z] - [x, z]y = 3(x, y, z). \tag{7}$$

Пусть $k, k' \in K(A)$, $x, y \in A$. Имеем из (7)

$$3(k, x, y) = 3(y, k, x) = 3(x, y, k) = [xy, k] - x[y, k] - [x, k]y = 0,$$

откуда следует, что $3K(A) \subseteq Z(A)$. Далее, применяя вновь тождество (7), получаем

$$[kk', x] = k[k', x] + [k, x]k' + 3(k, k', x) = 0,$$

т. е. $K(A)$ является подалгеброй алгебры $A$.

Следствие 2. *Пусть $A$ — коммутативная альтернативная $\Phi$-алгебра. Тогда, если $1/3 \in \Phi$, то $A$ ассоциативна.*

Действительно, в этом случае $A = K(A) \subseteq Z(A)$.

Теорема 1. *Если $A$ — простая алгебра, то либо $Z(A) = (0)$, либо $Z(A)$ является полем.*

Доказательство. Пусть $Z = Z(A) \neq (0)$. Ясно, что $Z$ является ассоциативным коммутативным кольцом, поэтому нам достаточно доказать, что в $Z$ есть единица и что каждый ненулевой элемент из $Z$ обратим в $Z$. Пусть $z \in Z$, $z \neq 0$. Тогда множество $zA$ является идеалом алгебры $A$, причем, как легко видеть, $zA \neq (0)$. В силу простоты алгебры $A$ имеем $zA = A$. Значит, существует такой $e \in A$, что $ze = z$. Пусть теперь $x \in A$, тогда $x = zy$ для некоторого $y \in A$, поэтому $ex = e(zy) = (ez)y = (ze)y = zy = x$ и аналогично $xe = x$, т. е. $e$ является единицей алгебры $A$. Далее, существует такой $z' \in A$, что $zz' = e$. Пусть $x$, $y$ — произвольные элементы алгебры $A$ и $x = zt$. Тогда, ввиду (2), имеем

$$(z', x, y) = (z', zt, y) = (z'z, t, y) = (e, t, y) = 0$$

и аналогично

$$(x, z', y) = (x, y, z') = 0,$$

т. е. $z' \in N(A)$. Наконец, ввиду (4), получаем

$$[z', x] = [z', zt] = z[z', t] = [zz', t] = [e, t] = 0,$$

т. е. $z' \in Z$. Мы доказали, что элемент $z'$ является обратным к элементу $z$ в $Z$. Теорема доказана.

Алгебра $A$ над полем $F$ называется *центральной* над $F$, если $Z(A) = F$.

Теорема 2. *Пусть $A$ — простая центральная алгебра над полем $F$, $K$ — любое расширение поля $F$. Тогда алгебра $A_K = K \otimes_F A$ является простой центральной алгеброй над полем $K$.*

Доказательство. Докажем вначале простоту алгебры $A_K$.

Пусть $U \neq (0)$ — идеал в $A_K$. Если $u$ — ненулевой элемент из $U$, то запишем его в виде $u = \sum_i k_i \otimes a_i$, где $k_i \in K$, $a_i \in A$ и $k_i$ линейно независимы над $F$. Назовем число ненулевых $a_i$ в этом выражении длиной элемента $u$. Выберем элемент $0 \neq u \in U$ с наименьшей длиной. Далее, отождествим алгебру $A$ с $F$-подалгеброй $1 \otimes A$ алгебры $A_K$ и рассмотрим в алгебре умножений $M(A_K)$ алгебры $A_K$ $F$-подалгебру $A^* = M^{A_K}(A)$, порожденную операторами умножения на элементы из $A$. Если $W \in A^*$, то $uW = \sum_i k_i \otimes a_i W \in U$. Так как $A$ проста, то существует элемент $W_0 \in A^*$, для которого $a_1 W_0 = 1$; поэтому от элемента $u$ можно перейти к элементу $u_1 \in U$ той же длины, имеющему вид $u_1 = k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes a_2' + \ldots + k_m \otimes a_m'$. Для любого $a \in A$ элемент $[1 \otimes a, u_1] = k_2 \otimes [a, a_2'] + \ldots + k_m \otimes [a, a_m']$ принадлежит $U$. Однако длина этого элемента меньше, чем длина $u$, поэтому он должен равняться 0. Так как $k_i$ линейно независимы над $F$, то из свойств тензорного произведения следует, что $[a, a_i'] = 0$ для $i = 2, \ldots, m$ и любых $a \in A$. Следовательно, $a_i' \in K(A)$. Аналогично получаем, что $a_i' \in N(A)$, и окончательно $a_i' \in Z(A) = F$. Запишем $a_i' = \alpha_i \in F$. Тогда $u_1 = k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes \alpha_2 + \ldots + k_m \otimes \alpha_m = (k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_m k_m) \otimes 1 = k \otimes 1$, где $k \in K$ и $k \neq 0$ в силу линейной независимости $k_i$ над $F$. Отсюда следует, что $U = A_K$, и простота алгебры $A_K$ доказана.

Пусть теперь элемент $z = \sum_i k_i \otimes a_i$ лежит в центре алгебры $A_K$; здесь мы снова предполагаем, что элементы $k_i \in K$ линейно независимы над $F$. Тогда для любых $a, b \in A$ будем иметь

$$0 = [z, 1 \otimes a] = \sum_i k_i \otimes [a_i, a],$$

$$0 = (z, 1 \otimes a, 1 \otimes b) = \sum_i k_i \otimes (a_i, a, b),$$

откуда $[a_i, a] = (a_i, a, b) = 0$ и аналогично $(a, a_i, b) = (a, b, a_i) = 0$, т. е. элементы $a_i$ лежат в $Z(A) = F$. Пусть $a_i = \alpha_i \in F$, тогда $z = \sum_i k_i \otimes a_i = (\sum_i \alpha_i k_i) \otimes 1 \in K$. Итак, мы доказали, что $Z(A_K) \subseteq K$. Ясно, что $K \subseteq Z(A_K)$, так что окончательно $Z(A_K) = K$.

Теорема доказана.

Предложение 1 (Жевлаков). *Не существует простых локально нильпотентных алгебр.*

Доказательство. Пусть $A$ — некоторая локально нильпотентная алгебра. Предположим, что $A$ проста, и возьмем в ней произвольный элемент $a \neq 0$. Рассмотрим в алгебре $A$ идеал $I_a$, порожденный множеством $Aa + aA$. Ясно, что $I_a \neq (0)$, поэтому $I_a = A$. Значит, в алгебре $A$ найдутся такие элементы $x_{ij}$, что

$$a = \sum_{i=1}^{t} aM_{x_{i1}}M_{x_{i2}} \ldots M_{x_{ik_i}}, \tag{8}$$

где каждое из $M_{x_{ij}}$ равно либо $R_{x_{ij}}$, либо $L_{x_{ij}}$.

Возьмем в алгебре $A$ подалгебру $B$, порожденную множеством элементов $\{a, x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, x_{21}, \ldots, x_{tk_t}\}$. По условию алгебра $B$ нильпотентна; пусть, например, $B^N = (0)$. Но тогда, если в каждое слагаемое правой части равенства (8) подставить вместо $a$ его выражение (8) и повторить эту процедуру $N - 1$ раз, мы получим в результате $a = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Далее в этом параграфе всюду $A$ — произвольная альтернативная алгебра, $N = N(A)$, $Z = Z(A)$.

Определим в $A$ функцию

$$f(w, x, y, z) = (wx, y, z) - x(w, y, z) - (x, y, z)w.$$

Эту функцию обычно называют *функцией Клейнфелда.*

Лемма 2. $f(w, x, y, z)$ — *кососимметрическая функция своих аргументов.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой пары равных аргументов $f(w, x, y, z) = 0$. В силу правой альтернативности $f(w, x, y, y) = 0$. Далее, обозначив левую часть равенства (5) через $g(w, x, y, z)$, мы получим

$$\begin{aligned} -f(z, w, x, y) = g(w, x, y, z) - f(z, w, x, y) = \\ = (wx, y, z) + (w, x, yz) - (w, xy, z) - \\ - w(x, y, z) - (w, x, y)z - (zw, x, y) + \\ + w(z, x, y) + (w, x, y)z = (wx, y, z) + \\ + (yz, w, x) - (xy, z, w) - (zw, x, y). \end{aligned}$$

Подставив сюда вместо $w$, $x$, $y$, $z$ соответственно $x$, $y$, $z$, $w$, получим

$$f(w, x, y, z) = (wx, y, z) + (yz, w, x) - (xy, z, w) - (zw, x, y). \quad (9)$$

Отсюда ясно, что $f(w, x, y, z) = -f(z, w, x, y)$. С помощью этого равенства, используя тождество $f(w, x, y, y) = 0$ и его линеаризацию, легко показать, что $f(w, x, y, z) = 0$ при любых двух равных аргументах. Лемма доказана.

Следствие. $f(w, x, y, z) = ([w, x], y, z) + ([y, z], w, x)$.

Доказательство. В силу тождества (9) нам достаточно показать, что

$$(xy, z, w) + (zw, x, y) + (xw, z, y) + (zy, x, w) = 0.$$

Это тождество действительно справедливо, так как оно является линеаризацией тождества $(xy, x, y) = 0$ по обеим переменным. Следствие доказано.

Лемма 3. *Пусть $a$, $b$ — такие элементы алгебры $A$, что $(a, b, A) = (0)$. Тогда $[a, b] \in N$.*

Доказательство. Пусть $x$, $y$ — произвольные элементы алгебры $A$. Тогда $f(x, y, a, b) = (xy, a, b) - y(x, a, b) - (y, a, b)x = 0$. С другой стороны, в силу следствия леммы 2 имеем $([a, b], x, y) = f(a, b, x, y) - (a, b, [x, y]) = 0$. Следовательно, $[a, b] \in N$. Лемма доказана.

Следствие 1. $[N, A] \subseteq N$.

Следствие 2. *Пусть $n \in N$, $x$, $y$, $z \in A$. Тогда*

$$n(x, y, z) = (nx, y, z) = (xn, y, z) = (x, y, z)n. \quad (10)$$

Для доказательства достаточно применить соотношения (1) — (3) и следствие 1.

Обозначим через $ZN(A)$ идеал алгебры $A$, порожденный множеством $[N, A]$. Этот идеал является как бы мерой разности между ассоциативным центром $N(A)$ и центром $Z(A)$ альтернативной алгебры $A$: $ZN(A) = (0)$ тогда и только тогда, когда $N(A) = Z(A)$.

Лемма 4. $ZN(A) = [N, A]A^{\#} = A^{\#}[N, A]$.

Доказательство. Ясно, что $ZN(A) \supseteq [N, A]A^{\#}$. Для доказательства обратного включения

достаточно показать, что множество $M = [N, A]A^{\#}$ является идеалом алгебры $A$. В силу следствия 1 леммы 3 мы имеем для любых $n \in N$, $y \in A^{\#}$, $x, z \in A$

$$y[n, x] = [n, x]y + [y, [n, x]] \in M,$$

$$[n, x]y \cdot z = [n, x](yz) \in M,$$

$$z \cdot ([n, x]y) = (z[n, x])y \in MA^{\#} \subseteq M.$$

Следовательно, $M$ является идеалом алгебры $A$ и $M = ZN(A)$. Аналогично доказывается, что $ZN(A) = A^{\#}[N, A]$. Лемма доказана.

Лемма 5 (Слейтер). $(ZN(A), A, A) \subseteq N$.

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно показать, что $([x, n]y, z, t) \in N$ для любых $x, y, z, t \in A$, $n \in N$. Применяя соотношения (3), (4) и (10), получаем в силу следствия 1 леммы 3

$$([x, n]y, z, t) = [x, n](y, z, t) = [x(y, z, t), n] - \\ - x[(y, z, t), n] = [x(y, z, t), n] \in [A, N] \subseteq N.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $n \in N$, $nA^{\#}n = (0)$. *Тогда* $(n)^2 = (0)$, *где* $(n)$ — *идеал алгебры* $A$, *порожденный элементом* $n$.

Доказательство. Заметим вначале, что $(n) = A^{\#}nA^{\#}$. Действительно, легко видеть, что $(n) \supseteq A^{\#}nA^{\#}$. Для доказательства обратного включения достаточно показать, что множество $A^{\#}nA^{\#}$ является идеалом алгебры $A$. Имеем для любых $r \in A$, $s, t \in A^{\#}$

$$r \cdot snt = rs \cdot nt - (r, s, nt) = rs \cdot nt - n(r, s, t) \in A^{\#}nA^{\#}$$

и аналогично $snt \cdot r \in A^{\#}nA^{\#}$, что и требовалось доказать. Для доказательства леммы нам остается теперь показать, что $rns \cdot tnv = 0$ для любых $r, s, t, v \in A^{\#}$. Применяя несколько раз соотношения (10), получаем

$$rns \cdot tnv = r \cdot (ns)(tnv) + (r, ns, tnv) = \\ = r[(ns)(tn) \cdot v] - r(ns, tn, v) + n(r, s, tnv) = \\ = r[n(st)n \cdot v] - r \cdot n(s, t, v)n + (r, s, n \cdot tnv) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $a, b$ — *такие элементы алгебры* $A$, *что* $(a, b, A) \subseteq N$. *Тогда для любого элемента* $x \in A$ *элемент* $n = (a, b, x)$ *принадлежит* $N$ *и* $(n)^2 = (0)$.

Доказательство. Пусть $y$, $z$ — произвольные элементы алгебры $A$. В силу линеаризованного тождества Муфанг и условия леммы имеем

$$(a, y, z)(a, b, x) = -(a, (a, b, x), z)\, y + ((a, b, x)\, a, y, z) + (ya, (a, b, x), z) = ((a, b, ax), y, z) = 0.$$

Аналогично получаем

$$(a, b, x)(a, y, z) = 0.$$

Далее, имеем

$$(a, b, x)\, y\, (a, b, x) = -(a, b, y)\, x \cdot (a, b, x) + (a, yb, x)(a, b, x) + (a, xb, y)(a, b, x) = -(a, b, y) \cdot x\, (a, b, x) = -(a, b, y)(a, bx, x) = 0.$$

Таким образом, $nA^{\#}n = (0)$, откуда по лемме 6 $(n)^2 = (0)$. Лемма доказана.

Следствие. *Если алгебра $A$ проста и неассоциативна, то $N = Z$.*

Доказательство. Если $N \subsetneq Z$, то $ZN(A) \neq (0)$, поэтому в силу простоты алгебры $A$ получаем $ZN(A) = A$. По лемме 5 тогда алгебра $A$ удовлетворяет тождеству

$$((x, y, z), r, s) = 0. \tag{11}$$

Так как $A$ неассоциативна, существует элемент $n = (x, y, z) \neq 0$; в силу (11) $n \in N$. Из тождества (11) и леммы 7 следует, что $(n)^2 = (0)$, откуда, ввиду простоты $A$, следует $(n) = (0)$ и $n = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $ZN(A) = (0)$ и $N = Z$. Следствие доказано.

Предложение 2. *Пусть в алгебре $A$ справедливо тождество $[x, y]^n = 0$. Тогда нильпотентные элементы алгебры $A$ образуют идеал.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда алгебра $A$ ассоциативна. Пусть $I$ — наибольший ниль-идеал алгебры $A$ (верхний ниль-радикал). Фактор-алгебра $\bar{A} = A/I$ не содержит ненулевых двусторонних ниль-идеалов. Предположим, что в алгебре $\bar{A}$ есть нильпотентный элемент $\bar{x}$, $\bar{x}^2 = 0$. Рассмотрим правый идеал

$\bar{x}\bar{A}$. Для любого $\bar{y} \in \bar{A}$ имеем $0 = [\bar{x}, \bar{y}]^n \bar{x}\bar{y} = (\bar{x}\bar{y})^{n+1}$, т. е. идеал $\bar{x}\bar{A}$ является правым ниль-идеалом индекса $n+1$. По теореме Левицкого (следствие 2 теоремы о высоте) идеал $\bar{x}\bar{A}$ локально нильпотентен. Заметим, что $\bar{x}\bar{A} \neq$ $\neq (0)$, так как иначе бы элемент $\bar{x}$ порождал ненулевой двусторонний ниль-идеал в алгебре $\bar{A}$, чего не может быть. Но тогда, как хорошо известно (см., например, упражнение 4 к § 5.3), и $\mathscr{L}(\bar{A}) \neq (0)$, где $\mathscr{L}(\bar{A})$ — локально нильпотентный радикал (радикал Левицкого) алгебры $\bar{A}$. Идеал $\mathscr{L}(\bar{A})$ является ненулевым двусторонним ниль-идеалом алгебры $\bar{A}$. Полученное противоречие доказывает предложение в случае, когда алгебра $A$ ассоциативна.

Пусть теперь алгебра $A$ альтернативна, $x$ и $y$ — два нильпотентных элемента алгебры $A$. Рассмотрим ассоциативную подалгебру $B$, порожденную элементами $x$, $y$. Алгебра $B$ удовлетворяет условию предложения, поэтому по доказанному выше ее нильпотентные элементы образуют идеал. В частности, элемент $x + y$ нильпотентен. Аналогично можно показать, что если $x$ — нильпотентный, а $y$ — произвольный элементы алгебры $A$, то элементы $xy$ и $yx$ нильпотентны. Следовательно, нильпотентные элементы алгебры $A$ образуют идеал.

Предложение доказано.

Лемма 8. *Пусть алгебра $A$ коммутативна. Тогда*

$$(x, y, z)^2 = 0$$

*для любых элементов $x, y, z \in A$.*

Доказательство. Заметим вначале, что в $A$ праведливо тождество

$$4(x, (x, y, z), z) = 0. \tag{12}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}4[x(x, y, z)]z - 4x[(x, y, z)z] = \\ = [x \circ (x, y, z)] \circ z - x \circ [(x, y, z) \circ z] = \\ = (x^2, y, z^2) - (x^2, y, z^2) = 0.\end{aligned}$$

Из следствия 1 леммы 1 получаем

$$9(x, y, z)^2 = 3(x, y, z) \cdot 3(x, y, z) = 0.$$

Наконец, имеем в силу тождеств Муфанг и (12)

$$8(x, y, z)^2 = 4(x, y, z)\circ(x, y, z) = \\ = 4(x, (x, y, z)\circ y, z) - 4y\circ(x, (x, y, z), z) = \\ = 4(x, (x, y^2, z), z) = 0.$$

Окончательно получаем

$$(x, y, z)^2 = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 3 (Жевлаков). *Простая альтернативная коммутативная алгебра $A$ является полем.*

Доказательство. В силу предложения 2 нильпотентные элементы алгебры $A$ образуют идеал $I$. Если $A$ неассоциативна, то по лемме 8 $I \neq (0)$, откуда $I = A$, и $A$ является ниль-алгеброй. Алгебра $A$ коммутативна и потому удовлетворяет существенному тождественному соотношению. По теореме 5.6 $A$ локально нильпотентна, что, ввиду предложения 1, противоречит простоте $A$. Следовательно, алгебра $A$ ассоциативна и, как хорошо известно, является полем.

Теорема доказана.

**Упражнения**

**1.** Пусть $A$ — альтернативная алгебра. Доказать, что если $k \in K(A)$, то $k^3 \in Z(A)$.

**2.** Пусть $A$ — коммутативная альтернативная неассоциативная алгебра. Доказать, что для любых элементов $a, b, c \in A$ ассоциатор $(a, b, c)$ порождает в $A$ ниль-идеал $I$ индекса 3.

Указание. Доказать, что для любых $a, b \in A$ и $x, y \in I$ справедливы соотношения $(ab)^3 = a^3b^3$, $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.

**3.** Пусть $A$ — локально нильпотентная алгебра и $I$ — минимальный идеал алгебры $A$. Доказать, что $IA = AI = (0)$.

**4.** Доказать, что в альтернативной алгебре $A$ следующие условия эквивалентны:

а) $ZN(A) \subseteq N(A)$;

б) $(A[A, N], A, A) = (0)$;

в) $(A, A, A)[A, N] = (0)$.

**5.** Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $n \in N(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $(n) \subseteq N(A)$;

б) $(A, A, A)n = (0)$.

**6.** Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $x, y, z \in A$, $n \in N(A)$. Доказать, что

$$(x, y, z)[n, z] = 0.$$

Указание. Воспользоваться следствиями 1 и 2 леммы 3 и соотношением (4).

**7** (Слейтер). Доказать, что в альтернативной алгебре $A$ для любых элементов $n$, $m \in N(A)$ идеал $([m, n])$, порожденный коммутатором $[m, n]$, содержится в $N(A)$.

Указание. Использовать упражнения 6 и 5.

## § 2. Элементы ассоциативного центра

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Ф-алгебр. Через $N_{\mathfrak{M}}$, $K_{\mathfrak{M}}$ и $Z_{\mathfrak{M}}$ мы будем обозначать соответственно ассоциативный центр, коммутативный центр и центр $\mathfrak{M}$-свободной алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ от счетного множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Если $P$ — некоторое подмножество алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ и $A$ — произвольная алгебра из $\mathfrak{M}$, то через $P[A]$ мы будем обозначать совокупность элементов из $A$ вида $p(a_1, \ldots, a_n)$, где $p(x_1, \ldots, x_n) \in P$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Легко видеть, что $N_{\mathfrak{M}}[A] \subseteq N(A)$, $K_{\mathfrak{M}}[A] \subseteq K(A)$, $Z_{\mathfrak{M}}[A] \subseteq Z(A)$ для любой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$, причем эти включения, вообще говоря, могут быть строгими.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие. Тогда подмножества $N_{\mathfrak{M}}$, $K_{\mathfrak{M}}$, $Z_{\mathfrak{M}}$ алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ устойчивы относительно действия операторов частичных линеаризаций.*

Доказательство. Покажем, например, что для любого элемента $n = n(x_1, \ldots, x_m) \in N_{\mathfrak{M}}$ все частичные линеаризации элемента $n$ также принадлежат множеству $N_{\mathfrak{M}}$. Пусть $n_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_m; x_j) = n\Delta_i^k(x_j)$ — частичная линеаризация элемента $n$ по $x_i$ степени $k$ (см. § 1.4) и пусть $x_r, x_l \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_m, x_j\}$. Так как $n \in N_{\mathfrak{M}}$, то

$$(n, x_r, x_l) = (x_r, n, x_l) = (x_r, x_l, n) = 0,$$

откуда по лемме 1.2 мы получаем

$$0 = (n, x_r, x_l)\Delta_i^k(x_j) = (n\Delta_i^k(x_j), x_r, x_l),$$

и аналогично

$$0 = (x_r, n\Delta_i^k(x_j), x_l) = (x_r, x_l, n\Delta_i^k(x_j)).$$

Значит, $n\Delta_i^k(x_j) \in N_{\mathfrak{M}}$. Точно так же рассматриваются случаи подмножеств $K_{\mathfrak{M}}$ и $Z_{\mathfrak{M}}$. Предложение доказано.

Если $\mathfrak{M} = \mathrm{Ass}$ — многообразие ассоциативных алгебр, то как легко видеть, $N_{\mathrm{Ass}} = \mathrm{Ass}[X]$, $K_{\mathrm{Ass}} = Z_{\mathrm{Ass}} = (0)$.

В случае многообразия Alt альтернативных алгебр оказывается, что $N_{\text{Alt}} \neq (0)$, $K_{\text{Alt}} \neq (0)$ и $Z_{\text{Alt}} \neq (0)$. Случаи подалгебр $K_{\text{Alt}}$ и $Z_{\text{Alt}}$ мы рассмотрим позднее, а в этом параграфе мы найдем ряд ненулевых элементов из $N_{\text{Alt}}$, необходимых нам для доказательства теоремы о простых альтернативных алгебрах.

Далее $A$ — произвольная альтернативная алгебра.

Лемма 9. *В алгебре $A$ справедливы тождества*

$$(x, y, (x, y, z)) = [x, y](x, y, z), \tag{13}$$

$$((x, y, z), x, y) = -(x, y, z)[x, y], \tag{14}$$

$$(x, y, z)\circ[x, y] = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим вначале, что в $A$ справедливо следующее тождество:

$$(xy)(x, y, z) = y[x(x, y, z)]. \tag{16}$$

Действительно, имеем в силу левого тождества Муфанг и его линеаризации

$$(xy)[(xy)z] - (xy)[x(yz)] - y\{x[(xy)z]\} + \\ + y\{x[x(yz)]\} = (xy)^2z - \\ - [(xy)xy + yx(xy)]z + y[x^2(yz)] = \\ = [(xy)^2 - (xy)^2 - yx^2y + yx^2y]z = 0.$$

Теперь имеем

$$(y, x, (x, y, z)) = (yx)(x, y, z) - y(x(x, y, z)) = \\ = (yx)(x, y, z) - (xy)(x, y, z) = [y, x](x, y, z),$$

т. е. (13) доказано. Аналогично получаем тождество (14). Наконец, в силу (13) и (14) имеем

$$(x, y, z)\circ[x, y] = (x, y, z)[x, y] + [x, y](x, y, z) = \\ = -((x, y, z), x, y) + (x, y, (x, y, z)) = 0,$$

т. е. (15) также доказано. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $x, y \in A$. Тогда для любых элементов $u$, $v$ из подалгебры, порожденной элементами $x$, $y$, справедливо включение $(A, u, v) \subseteq (A, x, y)$.*

Доказательство. В силу теоремы Артина достаточно доказать, что для любых ассоциативных слов $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ верно включение $(A, u_1, u_2) \subseteq (A, x, y)$.

Будем доказывать это утверждение индукцией по числу $n = d(u_1) + d(u_2)$. Очевидно основание индукции: $n = 2$. Пусть теперь $n = k > 2$, и утверждение леммы справедливо для всех $n < k$. Будем писать $r \equiv s$, если $r - s \in (A, x, y)$. Заметим, что во всякой альтернативной алгебре верно тождество

$$(z, x, yxy) = (z, xyx, y). \tag{17}$$

Действительно, в силу тождеств Муфанг имеем

$$(z, x, yxy) - (z, xyx, y) = (zx)(yxy) - z(xyxy) - \\ - [z(xyx)]y + z(xyxy) = \\ = \{[(zx)y]x\}y - \{[(zx)y]x\}y = 0.$$

Линеаризуя (17) по $x$, получаем

$$(z, t, yxy) = (z, \{xyt\}, y) + (z, yty, x), \tag{18}$$

где $\{xyt\} = (xy)t + (ty)x$. Рассмотрим теперь два возможных случая.

1. Хотя бы одно из слов $u_1$, $u_2$ оканчивается и начинается на один и тот же элемент. Пусть, например, $u_1 = xv_1x$. Если $v_1$ — не пустое слово, то, ввиду (18) и по предположению индукции, получаем для любого $z \in A$

$$(z, u_1, u_2) = (z, xv_1x, u_2) = \\ = (xzx, v_1, u_2) + (\{zxv_1\}, x, u_2) \equiv 0.$$

Если же слово $v_1$ отсутствует, то имеем

$$(z, u_1, u_2) = (z, x^2, u_2) = (z \circ x, x, u_2) \equiv 0.$$

2. В начале или в конце слова $u_2$ стоит тот же элемент, что и в начале слова $u_1$. Пусть, например, $u_1 = xv_1$, $u_2 = xv_2$. Применяя тождества Муфанг и их линеаризации, получаем с помощью предположения индукции и случая 1

$$(z, xv_1, xv_2) = -(z, xv_1, v_2x) + (z, xv_1, x \circ v_2) = \\ = -(z, xv_1, v_2x) + (z \circ x, xv_1, v_2) + (z \circ v_2, xv_1, x) \equiv \\ \equiv -(z, xv_1, v_2x) = (z, v_2, xv_1x) - \\ - (v_2z, xv_1, x) - ((xv_1)z, v_2, x) \equiv 0.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $x, y, z \in A$. Тогда для любых элементов $u_i$, $v_i$, $i = 1, 2$, из подалгебры, порожденной*

*элементами* $x$, $y$, *справедливо соотношение*

$$(u_1, v_1, z) \circ [u_2, v_2] = 0. \tag{19}$$

Доказательство. В силу теоремы Артина достаточно доказать, что для любых ассоциативных слов $u(x, y)$, $v(x, y)$ верно равенство

$$(u_1, v_1, z) \circ [u, v] = 0. \tag{20}$$

Докажем это равенство индукцией по числу $n = d(u) + d(v)$. Справедливость основания индукции при $n = 2$ вытекает из леммы 10 и равенства (15). Пусть теперь $n = k > 2$ и равенство (20) верно, если $n < k$. Заметим, что по лемме 10 мы имеем $(u_1, v_1, z) = (x, y, z_1)$. Если $d(u) > 1$, $d(v) = 1$ и, например, $v = x$, то в силу линеаризованного тождества (15) и по предположению индукции мы имеем

$$(u_1, v_1, z) \circ [u, v] = (x, y, z_1) \circ [u, x] = \\ = -(x, u, z_1) \circ [y, x] = 0.$$

Если же $d(u) > 1$ и $d(v) > 1$, то аналогично получаем

$$(u_1, v_1, z) \circ [u, v] = (x, y, z_1) \circ [u, v] = \\ = -(u, y, z_1) \circ [x, v] - (x, v, z_1) \circ [u, y] - (u, v, z_1) \circ \\ \circ [x, y] = 0.$$

Следствие доказано.

Теорема 4. *Пусть* $x, y \in A$, $B$ — *подалгебра алгебры* $A$, *порожденная элементами* $x$, $y$. *Тогда для любых* $u_i, v_i \in B$, $r, s \in A$ *и* $w_i = [u_i, v_i]$ *верны равенства*

$$(w_1 \circ w_2, r, s)\, w_3 = w_3\, (w_1 \circ w_2, r, s) = 0, \tag{21}$$

$$(w_1^2, r, s)\, w_2 = w_2\, (w_1^2, r, s) = 0, \tag{22}$$

$$(w_1^2\, (w_2 \circ w_3), r, s) = ((w_2 \circ w_3)\, w_1^2, r, s) = 0, \tag{23}$$

$$(w_1^2 w_2^2, r, s) = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Заметим вначале, что для любых $r \in A$, $u \in B$

$$(w_1 \circ w_2, u, r) = (w_1^2, u, r) = 0. \tag{25}$$

Действительно, в силу линеаризованного тождества Муфанг и тождества (19) получаем

$$(w_1 \circ w_2, u, r) = w_1 \circ (w_2, u, r) + w_2 \circ (w_1, u, r) = 0,$$

и аналогично получается второе равенство. Теперь из линеаризованного тождества (14) получаем, ввиду (25),

$$(w_1 \circ w_2, r, s) w_3 = (w_1 \circ w_2, r, s)[u_3, v_3] = \\ = -(w_1 \circ w_2, u_3, s)[r, v_3] - (w_1 \circ w_2, r, v_3)[u_3, s] - \\ - (w_1 \circ w_2, u_3, v_3)[r, s] - ((w_1 \circ w_2, r, s), u_3, v_3) - \\ - ((w_1 \circ w_2, u_3, s), r, v_3) - ((w_1 \circ w_2, r, v_3), u_3, s) - \\ - ((w_1 \circ w_2, u_3, v_3), r, s) = -((w_1 \circ w_2, r, s), u_3, v_3),$$

и далее вновь в силу линеаризованного тождества Муфанг, (19) и теоремы Артина

$$((w_1 \circ w_2, r, s), u_3, v_3) = (w_1 \circ (w_2, r, s), u_3, v_3) + \\ + (w_2 \circ (w_1, r, s), u_3, v_3) = w_1 \circ ((w_2, r, s), u_3, v_3) + \\ + (w_2, r, s) \circ (w_1, u_3, v_3) + w_2 \circ ((w_1, r, s), u_3, v_3) + \\ + (w_1, r, s) \circ (w_2, u_3, v_3) = 0,$$

что доказывает первое из тождеств (21). Аналогично доказываются второе тождество (21) и тождество (22). Далее, из (25) получаем

$$f(r, s, w_1^2, w_2 \circ w_3) = \\ = (rs, w_1^2, w_2 \circ w_3) - s(r, w_1^2, w_2 \circ w_3) - (s, w_1^2, w_2 \circ w_3) r = 0.$$

Следовательно, ввиду тождеств левой и правой альтернативности и (21), (22), имеем

$$(w_1^2 (w_2 \circ w_3), r, s) = \\ = f(w_1^2, w_2 \circ w_3, r, s) + (w_2 \circ w_3)(w_1^2, r, s) + (w_2 \circ w_3, r, s) w_1^2 = \\ = w_2 [w_3 (w_1^2, r, s)] + w_3 [w_2 (w_1^2, r, s)] + [(w_2 \circ w_3, r, s) w_1] w_1 = 0,$$

т. е. первое из тождеств (23) доказано. Аналогично доказываются второе тождество (23) и тождество (24). Теорема доказана.

Следствие 1 (Клейнфелд). *Во всякой альтернативной алгебре верны тождества* (*тождества Клейнфелда*)

$$[x, y]([x, y]^2, r, s) = 0,$$
$$([x, y]^2, r, s)[x, y] = 0,$$
$$([x, y]^4, r, s) = 0.$$

Прежде чем сформулировать второе следствие, определим следующие функции:

$$n_1(x, y) = [x, y]^4,$$
$$n_2(x, y) = [x, y]^2([x, y] \circ [x, yx]),$$
$$n_3(x, y) = [x, y]^2 [x, yx]^2.$$

Следствие 2 (Шестаков). *Элементы* $n_i(x_1, x_2)$ *принадлежат множеству* $N_{\mathrm{Alt}}$ *для* $i = 1, 2, 3$; *при этом справедливо следующее соотношение*:

$$n_1(x_1, x_2)\, x_1^2 - n_2(x_1, x_2)\, x_1 + n_3(x_1, x_2) = 0. \qquad (26)$$

Действительно, по теореме 4 $n_i(x_1, x_2) \in N_{\mathrm{Alt}}$, а соотношение (26) справедливо в силу теоремы Артина.

Заметим, что элементы $n_i(x_1, x_2)$ отличны от нуля в свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{Ass}[X]$, поэтому они являются ненулевыми и в алгебре $\mathrm{Alt}[X]$. В частности, $N_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$.

**Упражнения**

В упражнениях 1—6 $A$ — альтернативная алгебра, $x, y, z, r, s, t$ — произвольные элементы из $A$, $v = [x, y]$, $w = (r, s, t)$.

1. Доказать, что

$$v^{2i}\ (i \geqslant 2),\ v^i[v^2, z]\ \ (i \geqslant 1),\ \ [v^4, z]\, w \in N_{\mathrm{Alt}}[A].$$

Указание. Применить леммы 3 и 5.

2. Доказать, что

$$v[w, v^2] = 0,$$
$$[v[v^2, z], w] = 0.$$

Указание. Воспользоваться тождеством (3.2).

3. Доказать, что

$$(v^2, r, s)^2 = 0.$$

Указание. Вначале доказать, что $(v^2, (v^2, r, s), t) = 0$, затем воспользоваться тождествами Муфанг и их линеаризациями.

4. Пусть $(x, y, z) = 0$. Доказать, что $[[z, y]^2, z] \in N(A)$.

Указание. Применить лемму 3, лемму 2 и ее следствие, а также линеаризованное тождество (15).

5. Доказать, что

$$(v^2 t)(v^2, r, s) = (tv^2)(v^2, r, s) = 0.$$

Указание. Используя линеаризованное тождество (16), доказать, что $[v(vt)](v, r, v \circ s) = 0$.

6 (Шестаков). Доказать, что

$$[[x, y]^2, z]^2 \in N_{\mathrm{Alt}}[A].$$

Указание. Доказать, что $[v^2, z] \circ f(v^2, z, r, s) = 0$.

7. Доказать, что $N_{\mathrm{Alt}}[A] = (0)$ для любой ассоциативно-коммутативной алгебры $A$.

Указание. Рассмотреть матричную алгебру Кэли — Диксона $C(A)$.

8. Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей над полем $F$, $N(A) = F$, и в $A$ есть такие элементы $a$, $b$, что $[a, b]^4 \neq 0$. Доказать, что коммутативный центр $K(A)$ алгебры $A$ равен $F$.

## § 3. Теорема Клейнфелда

В этом параграфе мы докажем теорему Клейнфелда о строении простых неассоциативных альтернативных алгебр.

Лемма 11. *Пусть $A$ — алгебра с единицей $1$ над полем $F$, $K$ — некоторое расширение поля $F$. Тогда, если алгебра $\widetilde{A} = K \otimes {}_F A$ квадратична над $K$, то алгебра $A$ квадратична над $F$. При этом если $\widetilde{A}$ является композиционной алгеброй относительно нормы $\tilde{n}(x)$, то $A$ также является композиционной алгеброй относительно ограничения $n(x)$ нормы $\tilde{n}(x)$ на $A$.*

Доказательство. По условию каждый элемент $x \in \widetilde{A}$ удовлетворяет соотношению: $x^2 - \tilde{t}(x)x + \tilde{n}(x) = 0$, где $\tilde{t}(x)$, $\tilde{n}(x) \in K$. Обозначим через $t(x)$ и $n(x)$ ограничения следа $\tilde{t}(x)$ и нормы $\tilde{n}(x)$ на $A$. Для доказательства квадратичности $A$ нам достаточно показать, что $t(x)$, $n(x) \in F$ для любого $x \in A$. Если $x \in F$, то $t(x) = 2x \in F$ и $n(x) = x^2 \in F$. Пусть теперь $x \notin F$, т. е. $1$ и $x$ линейно независимы. В этом случае в $A$ можно выбрать базис вида $\{1, x, e_1, e_2, \ldots\}$, содержащий элементы $1$ и $x$. Как известно, этот базис является и базисом $\widetilde{A}$ над $K$. Рассмотрим элемент $x^2$. С одной стороны, так как $x^2 \in A$, то $x^2 = \alpha 1 + \beta x + \sum_i \gamma_i e_i$, где $\alpha$, $\beta$, $\gamma_i \in F$. С другой стороны, имеем $x^2 = t(x)x - n(x)\cdot 1$. В силу единственности разложения элемента $x^2$ по базису $\{1, x, e_1, e_2, \ldots\}$ алгебры $\widetilde{A}$ получаем $t(x) = \beta$, $n(x) = -\alpha$, т. е. $t(x)$, $n(x) \in F$. Тем самым доказана квадратичность алгебры $A$ над $F$.

Для завершения доказательства леммы нам осталось доказать, что если форма $\tilde{n}(x)$ строго невырождена на $\widetilde{A}$, то форма $n(x)$ строго невырождена на $A$. Пусть $a \in A$,

$f(a, x) = n(a + x) - n(a) - n(x) = 0$ для всех $x \in A$. Тогда в силу билинейности формы $\tilde{f}(x, y) = \tilde{n}(x + y) - \tilde{n}(x) - \tilde{n}(y)$ и ввиду того, что $\tilde{f} \equiv f$ на $A$, мы получаем, что $\tilde{f}(a, \tilde{A}) = 0$, откуда $a = 0$, и форма $n(x)$ строго невырождена.

Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей 1 над бесконечным полем $F$. Предположим, что $n_i(x, y) \in F$, $i = 1, 2, 3$, для любых $x, y \in A$, причем $n_1(a, b) = [a, b]^4 \neq 0$ для некоторых элементов $a, b \in A$. Тогда алгебра $A$ квадратична над $F$.*

Доказательство. Заметим вначале, что если $x, y \in A$ и $y^4 \neq 0$, то существуют такие различные элементы $\beta_i \in F$, $i = 1, 2$, что $(x + \beta_i y)^4 \neq 0$. Это легко следует из бесконечности поля $F$. Пусть теперь $a, b$ — такие элементы из $A$, для которых $[a, b]^4 \neq 0$, и $x$ — произвольный элемент алгебры $A$. Ввиду симметрии элементов $a, b$, мы можем считать, что либо $[x, a] \neq 0$, либо $[x, b] = 0$. Выберем различные элементы $\beta_1, \beta_2$ из $F$ такие, что $([b, x] + \beta_i [b, a])^4 = [b, x + \beta_i a]^4 \neq 0$. В силу соотношения (26) существуют такие $\alpha_i \in F$, что

$$(x + \beta_i a)^2 + \alpha_i (x + \beta_i a) \in F, \ i = 1, 2.$$

Так как $[a, b]^4 \neq 0$, то аналогично имеем $a^2 \in F + Fa$, откуда

$$x^2 + \alpha_i x + \beta_i y \in F + Fa,$$

где $y = x \circ a$. Исключив отсюда $y$ и разделив на $\beta_2 - \beta_1$, получаем

$$x^2 + \alpha x + \gamma = \theta a$$

для подходящих $\alpha, \gamma, \theta \in F$. Если $[x, b] = 0$, мы прокоммутируем это соотношение с $b$ и получим $\theta [a, b] = 0$. Если же $[x, a] \neq 0$, мы прокоммутируем это выражение с $a$ и получим $\theta [x, a] = 0$. В обоих случаях $\theta = 0$ и $x^2 + \alpha x + \gamma = 0$. Ввиду произвольности элемента $x$, тем самым доказана квадратичность над $F$ алгебры $A$. Лемма доказана.

Теперь может быть доказана

Теорема 5. *Пусть $A$ — простая некоммутативная альтернативная алгебра и $N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq Z(A)$. Тогда центр $Z(A)$ алгебры $A$ является полем и $A$ есть либо*

*алгебра обобщенных кватернионов, либо алгебра Кэли — Диксона над своим центром.*

Доказательство. По теореме 1 для доказательства того, что центр $Z(A)$ является полем, нам достаточно показать, что $Z(A) \neq (0)$. Ввиду условий нашей теоремы и следствия 2 теоремы 4, для этого достаточно показать, что в $A$ есть такие элементы $a$, $b$, для которых $[a, b]^4 \neq 0$. Пусть это не так, т. е. $[x, y]^4 = 0$ для любых $x$, $y \in A$. По предложению 2 нильпотентные элементы алгебры $A$ образуют идеал $I$; при этом $[x, y] \in I$ для любых $x$, $y \in A$. Алгебра $A$ некоммутативна, поэтому $I \neq (0)$ и $I = A$ вследствие простоты алгебры $A$. Следовательно, $A$ является ниль-алгеброй. Так как $A$ удовлетворяет существенному тождественному соотношению $[x, y]^4 = 0$, то по теореме 5.6 $A$ локально нильпотентна. Но это невозможно, ввиду предложения 1. Полученное противоречие доказывает, что существуют такие $a$, $b \in A$, для которых $[a, b]^4 \neq 0$, откуда $(0) \neq N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq Z(A)$ и $Z = Z(A)$ — поле.

Будем теперь рассматривать $A$ как алгебру над полем $Z$. Как легко видеть, $A$ проста не только как Ф-алгебра, но и как кольцо; в частности, $A$ проста над $Z$. Пусть $K$ — некоторое бесконечное расширение поля $Z$. По теореме 1.6 и теореме 2 алгебра $A_K = K \otimes_Z A$ является центральной простой альтернативной алгеброй над полем $K$. Заметим теперь, что по условию теоремы в алгебре $A$ выполняются тождества

$$(n_i(x, y), z, t) = [n_i(x, y), z] = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Ввиду предложения 3, в $A$ выполняются и все частичные линеаризации этих тождеств. По теоремам 1.4 и 1.6 отсюда следует, что тождества (27) справедливы в алгебре $A_K$. Следовательно, $n_i(x, y) \in Z(A_K) = K$ для любых $x$, $y \in A_K$; при этом существуют такие $a$, $b \in A \subseteq A_K$, что $[a, b]^4 \neq 0$. По лемме 12 алгебра $A_K$ квадратична над $K$, откуда, ввиду некоммутативности, по теореме 2.4 алгебра $A_K$ является композиционной. По лемме 11 алгебра $A$ также является композиционной. Остается воспользоваться теоремой 2.1. Теорема доказана.

Следствие 1 (теорема Клейнфелда). *Пусть $A$ — простая неассоциативная альтернативная*

*алгебра. Тогда центр алгебры $A$ является полем и $A$ есть алгебра Кэли — Диксона над своим центром.*

Действительно, по теореме 3 алгебра $A$ некоммутативна, а по следствию леммы 7 $N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq N(A) = Z(A)$, т. е. условия теоремы 5 выполнены. Остается заметить, что, ввиду неассоциативности, $A$ не может являться алгеброй обобщенных кватернионов.

Алгебра $A$ называется *алгеброй с делением*, если для любых элементов $a$, $b \in A$, $a \neq 0$, каждое из уравнений

$$ax = b, \quad ya = b$$

разрешимо в $A$. Если каждое из этих уравнений при $a \neq 0$ имеет одно и только одно решение и $A$ содержит единицу, то $A$ называется *телом*.

Как легко видеть (см. упражнение 1), всякая альтернативная алгебра с делением является телом.

Следствие 2 (Брак, Клейнфелд, Скорняков). *Пусть $A$ — альтернативная неассоциативная алгебра с делением. Тогда центр алгебры $A$ является полем и $A$ есть алгебра Кэли — Диксона над своим центром.*

**Упражнения**

**1.** Доказать, что всякая альтернативная алгебра с делением является телом.

Элемент $a$ кольца $R$ называется *вполне обратимым*, если в $R$ существует такой элемент $a^{-1}$, называемый вполне обратным для $a$ что

$$a^{-1}(ax) = (xa)a^{-1} = x$$

для любого $x \in R$.

**2.** Пусть $R$ — альтернативное тело. Тогда все ненулевые элементы из $R$ вполне обратимы.

Справедливо и обратное утверждение: если все ненулевые элементы произвольного кольца $R$ с единицей вполне обратимы, то $R$ является альтернативным телом (см. Мальцев А. И., Алгебраические системы, стр. 119).

**3.** Доказать, что в альтернативном теле любые два элемента порождают ассоциативное подтело.

**4.** Всякое конечное альтернативное тело является полем.

Указание. Применить упражнение 3 и теорему Веддерберна о конечных телах (Херстейн И., Некоммутативные кольца, стр. 100).

Следствие. *Всякая алгебра Кэли — Диксона над конечным полем расщепляема.*

## ЛИТЕРАТУРА

Алберт [6], Брак и Клейнфелд [24], Жевлаков [70], Клейнфелд [92, 93], Скорняков [190], Слейтер [197, 199, 205], Херстейн [250], [251], Цорн [258], Шестаков [270].

*ГЛАВА 8*

# РАДИКАЛЫ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

Идея радикала — важнейшая в теории колец. Она заключается в следующем. Допустим, что нужно описать кольца некоторого класса колец $\mathfrak{K}$, например класса всех альтернативных Ф-алгебр. Как правило, класс $\mathfrak{K}$ содержит в себе весьма разнородные элементы; он может содержать как тела, так и нильпотентные кольца, и найти общие черты в строении колец класса $\mathfrak{K}$ обычно оказывается невозможным. В этом случае поступают следующим образом. В каждом кольце $K \in \mathfrak{K}$ фиксируют некоторый идеал $\mathcal{R}(K)$, называемый радикалом, так, чтобы радикалы $\mathcal{R}(K)$ и фактор-кольца $K/\mathcal{R}(K)$ по отдельности обладали сходным строением, а затем описывают классы колец $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}(K)\}$ и $\mathcal{P} = \{K/\mathcal{R}(K)\}$. Произвольное кольцо класса $\mathfrak{K}$ таким образом описывается как расширение кольца из $\mathcal{P}$ с помощью кольца из $\mathcal{R}$. Открытие этого метода принадлежит Веддерберну. В 1908 г. он доказал, что всякая конечномерная ассоциативная алгебра является расширением прямой суммы полных матричных алгебр над телами с помощью нильпотентной алгебры.

К настоящему времени в классе альтернативных колец открыт ряд радикалов, позволивших доказать глубокие структурные теоремы. Особое по своей важности место занимает в этом ряду квазирегулярный радикал Жевлакова — аналог радикала Джекобсона в классе ассоциативных колец. Этому радикалу будет посвящена глава 10.

## § 1. Элементы общей теории радикалов

В 1953 г. Курош и независимо Амицур положили начало аксиоматическому изучению понятия радикала. Имея целью доказательство структурных теорем об альтернативных и йордановых кольцах, мы не будем

углубляться в эту теорию, а ограничимся лишь необходимым минимумом сведений из нее.

Зафиксируем некоторый класс Ф-алгебр $\mathfrak{K}$, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. На протяжении этого параграфа будем считать, что все рассматриваемые алгебры принадлежат $\mathfrak{K}$. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторый подкласс класса $\mathfrak{K}$. Алгебры класса $\mathcal{R}$ будем сокращенно называть $\mathcal{R}$-алгебрами. Идеал $I$ алгебры $A$ будем называть $\mathcal{R}$-идеалом, если $I$ есть $\mathcal{R}$-алгебра. Класс $\mathcal{R}$ (свойство алгебры принадлежать к классу $\mathcal{R}$), называется *радикальным* в классе алгебр $\mathfrak{K}$, если выполняются следующие три условия:

(А) гомоморфный образ $\mathcal{R}$-алгебры есть $\mathcal{R}$-алгебра;

(В) каждая алгебра $A$ из $\mathfrak{K}$ содержит $\mathcal{R}$-идеал $\mathcal{R}(A)$, содержащий все $\mathcal{R}$-идеалы алгебры $A$;

(С) фактор-алгебра $A/\mathcal{R}(A)$ не содержит ненулевых $\mathcal{R}$-идеалов.

Отображение $A \mapsto \mathcal{R}(A)$ называется в этом случае *радикалом*, определенным в классе алгебр $\mathfrak{K}$; будем обозначать его также буквой $\mathcal{R}$.

Идеал $\mathcal{R}(A)$ алгебры $A$ называется ее *$\mathcal{R}$-радикалом*. Алгебры, совпадающие со своим $\mathcal{R}$-радикалом, называются *$\mathcal{R}$-радикальными*, а ненулевые алгебры, радикал которых равен нулю,— *$\mathcal{R}$-полупростыми*. Класс $\mathcal{P}$ всех $\mathcal{R}$-полупростых алгебр класса $\mathfrak{K}$ называется *полупростым классом радикала $\mathcal{R}$*. Радикал однозначно определяется не только своим радикальным, но и своим полупростым классом, так как справедливо

Предложение 1. *Радикальный класс $\mathcal{R}$ есть совокупность алгебр из $\mathfrak{K}$, гомоморфно не отображающихся на алгебры класса $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Если $A \in \mathcal{R}$, то она не может гомоморфно отобразиться на алгебру из $\mathcal{P}$ в силу условия (А). Если же $A \notin \mathcal{R}$, то $A \neq \mathcal{R}(A)$ и $A/\mathcal{R}(A)$ есть гомоморфный образ алгебры $A$, принадлежащий $\mathcal{P}$. Предложение доказано.

Проверка условий (А) — (С) часто оказывается трудоемкой. Иногда гораздо проще установить радикальность класса $\mathcal{R}$, воспользовавшись критерием, сформулированным в следующей теореме.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{R}$ является радикальным тогда и только тогда, когда выполнены условия*:

(A) *гомоморфный образ $\mathcal{R}$-алгебры есть $\mathcal{R}$-алгебра;*

(D) *если всякий ненулевой гомоморфный образ алгебры $A$ содержит ненулевой $\mathcal{R}$-идеал, то $A$ есть $\mathcal{R}$-алгебра.*

Доказательство. Если $\mathcal{R}$ — радикальный класс, то условие (A) выполнено и нужно доказать только (D). Допустим, что в каждом ненулевом гомоморфном образе алгебры $A$ имеется ненулевой $\mathcal{R}$-идеал. Рассмотрим в алгебре $A$ радикал $\mathcal{R}(A)$ и фактор-алгебру $A/\mathcal{R}(A)$. По свойству (C) этот гомоморфный образ не содержит ненулевых $\mathcal{R}$-идеалов, а значит, он нулевой. Следовательно, $A = \mathcal{R}(A)$ и $A$ есть $\mathcal{R}$-алгебра.

Допустим теперь, что класс $\mathcal{R}$ удовлетворяет условиям (A) и (D). Докажем, что он радикален. Чтобы установить (B), рассмотрим идеал $R$ — сумму всех $\mathcal{R}$-идеалов алгебры $A$. Нужно доказать, что $R$ есть $\mathcal{R}$-идеал. Предположим, что $R$ не является $\mathcal{R}$-алгеброй. Тогда в силу (D) имеется ненулевой гомоморфный образ $R/I$ алгебры $R$, не содержащий ненулевых $\mathcal{R}$-идеалов. Это невозможно по следующим причинам. Так как $I \neq R$, существует $\mathcal{R}$-идеал $B$ алгебры $A$, не содержащийся в $I$. Ввиду того, что $B \subseteq R$, $B$ является $\mathcal{R}$-идеалом алгебры $R$. По второй теореме о гомоморфизмах $B + I/I \cong B/B \cap I$ и по условию (A) $B + I/I$ есть ненулевой $\mathcal{R}$-идеал в $R/I$. Полученное противоречие доказывает, что условие (B) выполнено.

Докажем, что выполнено (C). Пусть $A$ — произвольная алгебра. По уже доказанному условию (B) в ней существует $\mathcal{R}$-идеал $R$, содержащий все $\mathcal{R}$-идеалы алгебры $A$. Допустим, что $A/R$ содержит ненулевой $\mathcal{R}$-идеал $M/R$. Докажем теперь, что $M \in \mathcal{R}$, и получим противоречие с тем, что $M \not\subseteq R$. Пусть $M/N$ — гомоморфный образ алгебры $M$. Если $N \supseteq R$, то $M/N$ есть гомоморфный образ $\mathcal{R}$-алгебры $M/R$ и потому есть $\mathcal{R}$-алгебра. Если же $N \not\supseteq R$, то по второй теореме о гомоморфизмах

$$N + R/N \cong R/R \cap N$$

и по условию (A) $N + R/N$ есть ненулевой $\mathcal{R}$-идеал алгебры $M/N$. Мы видим, что алгебра $M$ удовлетворяет посылке условия (D) и потому $M \in \mathcal{R}$. Итак, условие (C) выполнено, и теорема доказана.

Теорема 2. *Класс $\mathcal{P}$, не содержащий нулевой алгебры, является полупростым классом для некоторого*

*радикала $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям:*

(E) *всякий ненулевой идеал алгебры из $\mathcal{P}$ может быть гомоморфно отображен на алгебру из $\mathcal{P}$;*

(F) *если всякий ненулевой идеал алгебры $A$ может быть гомоморфно отображен на алгебру из $\mathcal{P}$, то $A \in \mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — полупростой класс некоторого радикала $\mathcal{R}$. Пусть $A \in \mathcal{P}$ и $I$ — идеал в $A$. Так как $A$ $\mathcal{R}$-полупроста, то идеал $I$ не $\mathcal{R}$-радикален и в силу предложения 1 гомоморфно отображается на алгебру из $\mathcal{P}$. Значит, $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию (E).

Если же $A \notin \mathcal{P}$, то $\mathcal{R}(A) \neq (0)$ и $\mathcal{R}(A)$ — идеал, который не отображается гомоморфно на алгебру из $\mathcal{P}$. Это соображение доказывает (F).

Обратно, пусть $\mathcal{P}$ — класс алгебр из $\mathfrak{K}$, удовлетворяющий условиям (E) и (F) и не содержащий нулевой алгебры. Обозначим через $\mathcal{R}$ класс алгебр, не отображающихся гомоморфно на алгебры из $\mathcal{P}$. Докажем, что $\mathcal{R}$ — радикальный класс, а $\mathcal{P}$ — полупростой класс радикала $\mathcal{R}$. Очевидно, условие (A) для класса $\mathcal{R}$ справедливо. Чтобы доказать (D), предположим, что алгебра $A$ такова, что в любом ее ненулевом гомоморфном образе есть ненулевой $\mathcal{R}$-идеал. Если $A \notin \mathcal{R}$, то $A$ может быть гомоморфно отображена на алгебру $A' \in \mathcal{P}$. По сделанному предположению алгебра $A'$ обладает $\mathcal{R}$-идеалом $I \neq (0)$. Согласно (E). $I$ может быть гомоморфно отображен на алгебру из $\mathcal{P}$, однако это противоречит тому, что $I \in \mathcal{R}$. Итак, класс $\mathcal{R}$ радикален.

Осталось доказать, что $\mathcal{P}$ — полупростой класс этого радикала. Если $A$ — алгебра из $\mathcal{P}$, то согласно (E) никакой идеал алгебры $A$ не является $\mathcal{R}$-радикальным. Следовательно, $A$ — $\mathcal{R}$-полупростая алгебра. Если же $A$ есть $\mathcal{R}$-полупростая алгебра, то никакой ее ненулевой идеал не $\mathcal{R}$-радикален. Это значит, что всякий идеал $I \neq (0)$ алгебры $A$ может быть гомоморфно отображен на алгебру из $\mathcal{P}$, а отсюда в силу (F) вытекает, что $A \in \mathcal{P}$. Мы доказали, что полупростой класс радикала $\mathcal{R}$ совпадает с $\mathcal{P}$. Теорема, таким образом, доказана.

Будем говорить, что класс алгебр $\mathcal{R}$ *замкнут относительно расширений*, если из того, что $I \in \mathcal{R}$ и $A/I \in \mathcal{R}$ следует, что $A \in \mathcal{R}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Всякий радикальный класс* $\mathcal{R}$ *замкнут относительно расширений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что для некоторой алгебры $A$ и некоторого ее идеала $I$ алгебры $I$ и $A/I$ принадлежат $\mathcal{R}$, но тем не менее $A \notin \mathcal{R}$. В этом случае $I \subseteq \mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(A) \neq A$. По первой теореме о гомоморфизмах

$$A/\mathcal{R}(A) \cong A/I/\mathcal{R}(A)/I,$$

и искомое противоречие получено, так как справа стоит гомоморфный образ алгебры $A/I$, т. е. алгебра радикальная, а слева — полупростая алгебра. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если* $\mathcal{R}$ — *класс алгебр, удовлетворяющий условию* (A) *и замкнутый относительно расширений, то сумма любых двух* $\mathcal{R}$*-идеалов произвольной алгебры* $A$ *есть снова* $\mathcal{R}$*-идеал алгебры* $A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $I_1$ и $I_2$ суть $\mathcal{R}$-идеалы алгебры $A$, то по второй теореме о гомоморфизмах

$$I_1 + I_2/I_1 \cong I_2/I_2 \cap I_1.$$

Поэтому $I_1 + I_2/I_1$ есть $\mathcal{R}$-алгебра, так как она есть гомоморфный образ $\mathcal{R}$-алгебры $I_2$. В силу замкнутости относительно расширений получаем, что $I_1 + I_2$ есть $\mathcal{R}$-алгебра и, следовательно, $\mathcal{R}$-идеал алгебры $A$. Предложение доказано.

В частности, предложение 3 справедливо, если класс $\mathcal{R}$ радикален.

Радикал $\mathcal{R}$ в классе алгебр $\mathfrak{K}$ называется *наследственным*, если для любой алгебры $A \in \mathfrak{K}$ и любого ее идеала $I$

$$\mathcal{R}(I) = I \cap \mathcal{R}(A).$$

Т е о р е м а 3. *Радикал* $\mathcal{R}$ *в классе алгебр* $\mathfrak{K}$ *является наследственным тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

(G) *если* $A \in \mathcal{R}$ *и* $I$ — *идеал в* $A$, *то* $I \in \mathcal{R}$;

(H) *если* $A \in \mathcal{P}$ *и* $I$ — *идеал в* $A$, *то* $I \in \mathcal{P}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. разбивается на две леммы.

Л е м м а 1. *Для любого радикала* $\mathcal{R}$ *условие* (G) *эквивалентно тому, то* $\mathcal{R}(I) \supseteq I \cap \mathcal{R}(A)$ *для любой алгебры* $A \in \mathfrak{K}$ *и любого ее идеала* $I$.

Доказательство. Если радикал $\mathcal{R}$ удовлетворяет свойству (G) и $A \in \mathfrak{R}$, то для любого ее идеала $I$ пересечение $I \cap \mathcal{R}(A)$ есть идеал $\mathcal{R}$-алгебры $\mathcal{R}(A)$, и в силу (G) заключаем, что $I \cap \mathcal{R}(A)$ есть $\mathcal{R}$-идеал алгебры $I$. Но тогда он должен содержаться в ее $\mathcal{R}$-радикале, т. е. $I \cap \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

Обратно, если $\mathcal{R}(I) \supseteq I \cap \mathcal{R}(A)$ и $A$ есть $\mathcal{R}$-алгебра, то $\mathcal{R}(I) \supseteq I \cap \mathcal{R}(A) = I \cap A = I$. Следовательно, $\mathcal{R}(I) = I$ и $I \in \mathcal{R}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого радикала $\mathcal{R}$ условие* (H) *эквивалентно тому, что $\mathcal{R}(I) \subseteq I \cap \mathcal{R}(A)$ для любой алгебры $A \in \mathfrak{R}$ и любого ее идеала $I$.*

Доказательство. Допустим, что (H) справедливо. Пусть $I$ — идеал алгебры $A$. Рассмотрим $\mathcal{R}$-полупростую алгебру $A/\mathcal{R}(A)$. Ее идеал $I + \mathcal{R}(A)/\mathcal{R}(A)$ в силу (H) также $\mathcal{R}$-полупрост. По второй теореме о гомоморфизмах

$$I + \mathcal{R}(A)/\mathcal{R}(A) \cong I/I \cap \mathcal{R}(A).$$

Следовательно, алгебра $I/I \cap \mathcal{R}(A)$ является $\mathcal{R}$-полупростой, и потому $\mathcal{R}(I) \subseteq I \cap \mathcal{R}(A)$.

Обратно, если алгебра $A$ является $\mathcal{R}$-полупростой и условие $\mathcal{R}(I) \subseteq I \cap \mathcal{R}(A)$ выполнено для любого ее идеала $I$, то $\mathcal{R}(I) \subseteq I \cap (0) = (0)$. Лемма 2, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

Остаток параграфа мы посвятим доказательству того, что в классе альтернативных алгебр условие (H) справедливо для любого радикала.

Лемма 3. *Если $I$ — идеал альтернативной алгебры $A$, а $M$ — идеал алгебры $I$, то для всякого $a \in A$*

а) $M^2A \subseteq M$;

б) $(M, a, I) \subseteq M + Ma$;

в) $M + Ma$ *— идеал в* $I$;

г) $M + (Ma)^2$ *— идеал в $I$, содержащийся в* $M + Ma$;

д) $(MA)\,I^2 \subseteq M$;

е) $(Ma)^2\,(Ma)^2 \subseteq M$.

Доказательство. Для доказательства а) и б) воспользуемся правой альтернативностью:

$$M^2A \subseteq M(MA) + (M, M, A) \subseteq MI + (M, A, M) \subseteq M,$$

$$(M, a, I) = (M, I, a) \subseteq M(Ia) + (MI)\,a \subseteq M + Ma.$$

Утверждение в) есть следствие б). Докажем г). Имеем $M+(Ma)^2 \subseteq M+Ma$ в силу в). Применяя еще раз в), получим

$$[M+(Ma)^2]\, I \subseteq M+(Ma)\,[(Ma)\, I]+(Ma,\ Ma,\ I) \subseteq$$
$$\subseteq M+(Ma)^2+(Ma,\ I,\ Ma) \subseteq M+(Ma)^2.$$

Чтобы доказать д), воспользуемся линеаризованным тождеством Муфанг. Пусть $m \in M$, $x,\ y \in I$, $r \in A$, тогда

$$(mr,\ x,\ y)+(yr,\ x,\ m)=(r,\ x,\ y)\, m+(r,\ x,\ m)\, y.$$

Ввиду того, что ассоциаторы $(yr,\ x,\ m)$ и $(r,\ x,\ y)\, m$ лежат в $M$, заключаем, что

$$(mr,\ x,\ y)-(r,\ x,\ m)\, y \in M.$$

Однако

$$(mr,\ x,\ y)-(r,\ x,\ m)\, y=(mr,\ x,\ y)-(m,\ r,\ x)\, y=$$
$$=-(mr)\,(xy)+[m\,(rx)]\, y,$$

откуда, ввиду того, что $[m\,(rx)]\, y \in M$, следует $(mr)\,(xy) \in M$. Итак, мы доказали д). Наконец, в силу г) и д)

$$(Ma)^2\,(Ma)^2 \subseteq (M+Ma)\,(Ma)^2 \subseteq M+$$
$$+(Ma)\,(Ma)^2 \subseteq M+(Ma)\, I^2 \subseteq M,$$

что дает нам е). Лемма доказана.

Теорема 4. *Если $I$ — идеал альтернативной алгебры $A$, а $M$ — идеал алгебры $I$ такой, что фактор-алгебра $I/M$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов, то $M$ — идеал всей алгебры $A$.*

Доказательство. Если $M$ не является идеалом в $A$, то найдется такой элемент $a \in A$, что либо $aM \nsubseteq M$, либо $Ma \nsubseteq M$. Пусть, например, $Ma \nsubseteq M$. Тогда в силу условия в) леммы 3 $M_1=M+Ma$ — идеал в $I$, строго содержащий $M$. Это значит, что в фактор-алгебре $\overline{I}=I/M$ образ $\overline{M_1}$ идеала $M_1$ не равен нулю. Но в силу е) $(\overline{M}_1^2)^2=(0)$, поэтому, ввиду предложения 5.1 и отсутствия в алгебре $\overline{I}$ ненулевых нильпотентных идеалов, мы получаем, что $\overline{M}_1^2=(0)$ и $\overline{M_1}=(0)$. Полученное противоречие доказывает, что $Ma \subseteq M$. Аналогично с использованием левого аналога леммы 3 доказывается, что $aM \subseteq M$. Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{R}$ — некоторый радикал в классе алгебр $\mathfrak{K}$ и $I$ — идеал алгебры $A$, причем $I^2 = (0)$. Тогда $\mathscr{R}(I)$ — идеал в $A$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого $a \in A$ либо $a\mathscr{R}(I) \nsubseteq \mathscr{R}(I)$, либо $\mathscr{R}(I)\, a \nsubseteq \mathscr{R}(I)$. Для определенности предположим, что $a\mathscr{R}(I) \nsubseteq \mathscr{R}(I)$. Тогда $\mathscr{R}(I) + a\mathscr{R}(I)/\mathscr{R}(I)$ — ненулевой идеал алгебры $I/\mathscr{R}(I)$, которая $\mathscr{R}$-полупроста. Покажем, что идеал $\mathscr{R}(I) + a\mathscr{R}(I)/\mathscr{R}(I)$ является $\mathscr{R}$-радикальным; тогда наше допущение приведет к противоречию. Рассмотрим отображение $\theta$: $\mathscr{R}(I) \to \mathscr{R}(I) + a\mathscr{R}(I)/\mathscr{R}(I)$, определенное по правилу $\theta(y) = ay + \mathscr{R}(I)$. Покажем, что это гомоморфизм. Действительно, для любых двух элементов $y_1, y_2 \in \mathscr{R}(I)$, ввиду того, что $I^2 = (0)$, имеем

$$\theta(y_1y_2) = a(y_1y_2) + \mathscr{R}(I) = 0 + \mathscr{R}(I),$$
$$\theta(y_1)\,\theta(y_2) = (ay_1)(ay_2) + \mathscr{R}(I) = 0 + \mathscr{R}(I).$$

Итак, $\theta$ — гомоморфизм, который отображает $\mathscr{R}(I)$ на $\mathscr{R}(I) + a\mathscr{R}(I)/\mathscr{R}(I)$. Значит, по условию (А) последняя алгебра $\mathscr{R}$-радикальна. Лемма доказана.

Теорема 5 (Андерсон — Дивинский — Сулинский). *Пусть $\mathscr{R}$ — произвольный радикал, определенный в классе альтернативных алгебр, $A$ — альтернативная алгебра и $I$ — ее идеал. Тогда $\mathscr{R}(I)$ — идеал в $A$.*

Доказательство. Обозначим $\mathscr{R}(I)$ через $M$. Если $M$ — не идеал в $A$, то существует такой $a \in A$, что либо $Ma \nsubseteq M$, либо $aM \nsubseteq M$. Допустим первое. Тогда $M + Ma$ — идеал в $I$, строго содержащий $M$. Предположим сначала, что $(Ma)^2 \subseteq M$. Рассмотрим отображение $\theta$: $M \to M + Ma/M$, определенное по правилу $\theta(m) = ma + M$. Пусть $m, n \in M$. Тогда, очевидно, $\theta(m+n) = \theta(m) + \theta(n)$ и в силу пункта а) леммы 3

$$\theta(mn) = (mn)\,a + M = 0 + M.$$

Далее, так как по предположению $(Ma)^2 \subseteq M$,

$$\theta(m)\,\theta(n) = (ma)(na) + M = 0 + M.$$

Мы доказали, что $\theta$ — гомоморфизм радикальной алгебры $M$ на идеал $M + Ma/M$ полупростой алгебры $I/M$. Это противоречит тому, что $M + Ma$ строго содержит $M$, т. е. тому, что $Ma \nsubseteq M$.

Осталось рассмотреть случай, когда $(Ma)^2 \nsubseteq M$. В этом случае в силу леммы 3 $M + (Ma)^2$ — идеал в $I$, строго содержащий $M$. Ввиду леммы 3, $M + (Ma)^2/M$ — идеал с нулевым умножением в полупростой алгебре $I/M$. Покажем, что у алгебры $M + (Ma)^2/M$ есть ненулевой $\mathcal{R}$-радикал; этим, ввиду леммы 4, мы приведем к противоречию сделанное допущение и докажем теорему.

Зафиксируем такой элемент $n \in M$, что $(Ma)(na) \nsubseteq \nsubseteq M$, и рассмотрим отображение $\theta$: $M \to M + (Ma)^2/M$, переводящее элемент $m \in M$ в смежный класс $\theta(m) = (ma)(na) + M$. Мы имеем в силу а), что

$$\theta(m_1m_2) = [(m_1m_2)a](na) + M = 0 + M.$$

Кроме того, ввиду е),

$$\theta(m_1)\theta(m_2) = [(m_1a)(na)][(m_2a)(na)] + M = 0 + M.$$

Аддитивность отображения $\theta$ очевидна, поэтому $\theta$ — гомоморфизм $\mathcal{R}$-радикальной алгебры $M$ на ненулевой идеал $(Ma)(na) + M/M$ алгебры $(Ma)^2 + M/M$. Следовательно, $\mathcal{R}(M + (Ma)^2/M) \neq (0)$, и все доказано.

Следствие. *Для любого радикала $\mathcal{R}$ в классе альтернативных алгебр справедливо условие* (H).

Доказательство. Если бы в полупростой альтернативной алгебре $A$ нашелся неполупростой идеал $I$, то его радикал $\mathcal{R}(I)$ в силу только что доказанной теоремы был бы ненулевым радикальным идеалом всей алгебры $A$, что невозможно. Следствие доказано.

**Упражнения**

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс Ф-алгебр со свойством (E) и $\overline{\mathfrak{M}}$ — класс всех таких алгебр $A$, что всякий ненулевой идеал $I$ алгебры $A$ может быть гомоморфно отображен на ненулевую алгебру из $\mathfrak{M}$. Доказать, что класс $\overline{\mathfrak{M}}$ удовлетворяет условиям (E) и (F).

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех простых алгебр класса $\mathfrak{K}$. Доказать, что для любого разбиения класса $\mathfrak{M}$ на два непересекающихся подкласса $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ существует радикал в $\mathfrak{K}$, относительно которого простые алгебры из $\mathfrak{M}_1$ будут радикальными, а алгебры из $\mathfrak{M}_2$ — полупростыми.

3. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех ассоциативных колец и $\mathcal{R}$ — класс всех ассоциативных колец, не отображающихся гомоморфно на нильпотентные кольца. Покажите, что $\mathcal{R}$ — радикальный класс в $\mathfrak{K}$ и что условие (G) для него не выполнено.

4 (Дивинский — Сулинский). Пусть $\mathfrak{M}$ — класс колец, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных

образов, и $\mathfrak{K}$ — класс Ф-алгебр с теми же свойствами, причем $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{M}$. Доказать, что если $\mathscr{R}$ — радикал в $\mathfrak{M}$, то $\mathscr{R}$-радикал любой Ф-алгебры из $\mathfrak{K}$ является ее Ф-идеалом, т. е. выдерживает умножения на элементы из Ф. Показать также, что класс $\mathscr{R} \cap \mathfrak{K}$ радикален в $\mathfrak{K}$.

## § 2. Ниль-радикалы

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный класс алгебр, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. В каждой алгебре $A \in \mathfrak{K}$ определим следующую цепочку идеалов, которую будем называть *бэровской*. Положим $\mathscr{B}_0(A) = (0)$, а через $\mathscr{B}_1(A)$ обозначим сумму всех *тривиальных идеалов* алгебры $A$ (т. е. идеалов с нулевым умножением). Далее, предположим, что идеалы $\mathscr{B}_\alpha(A)$ определены для всех ординалов $\alpha$, меньших ординала $\beta$. Если $\beta$ — предельный ординал, положим $\mathscr{B}_\beta(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathscr{B}_\alpha(A)$; если же $\beta$ не является предельным, то существует ординал $\beta - 1$, и мы определим $\mathscr{B}_\beta(A)$ как такой идеал, что

$$\mathscr{B}_\beta(A)/\mathscr{B}_{\beta-1}(A) = \mathscr{B}_1(A/\mathscr{B}_{\beta-1}(A)).$$

Если мощность ординала $\gamma$ больше мощности алгебры $A$, то $\mathscr{B}_\gamma(A) = \mathscr{B}_{\gamma+1}(A) = \ldots$ Обозначим $\mathscr{B}_\gamma(A)$ через $\mathscr{B}(A)$ и назовем *бэровским идеалом* алгебры $A$.

Предложение 4. *Фактор-алгебра $A/\mathscr{B}(A)$ не содержит ненулевых тривиальных идеалов. $\mathscr{B}(A)$ — наименьший идеал с этим свойством.*

Доказательство. Фактор-алгебра $A/\mathscr{B}(A)$ не содержит ненулевых тривиальных идеалов по построению идеала $\mathscr{B}(A)$. Рассмотрим множество $\{I_\alpha\}$ всех идеалов алгебры $A$ таких, что $A/I_\alpha$ — алгебра без ненулевых тривиальных идеалов. Легко видеть, что $I = \bigcap I_\alpha$ есть наименьший идеал в этом множестве. Если бы включение $I \subseteq \mathscr{B}(A)$ было строгим, нашелся бы минимальный ординал $\delta$ такой, что $\mathscr{B}_\delta(A) \nsubseteq I$. Ясно, что $\delta$ не является предельным и что $\mathscr{B}_{\delta-1}(A) \subseteq I$. Тогда в алгебре $\bar{A} = A/\mathscr{B}_{\delta-1}(A)$ существовал бы тривиальный идеал $\bar{K} \neq (0)$, не содержащийся в $\bar{I} = I/\mathscr{B}_{\delta-1}(A)$. Его полный прообраз $K$ в алгебре $A$ таков, что $K \nsubseteq I$, но $K^2 \subseteq \mathscr{B}_{\delta-1}(A) \subseteq I$. Получили в $A/I$ ненулевой тривиальный

идеал $K + I/I$, что противоречит допущению. Значит, на самом деле $I = \mathscr{B}(A)$, и предложение доказано.

Алгебра называется *первичной*, если для любых ее двух идеалов $I$ и $J$ из равенства $IJ = (0)$ следует, что либо $I = (0)$, либо $J = (0)$. Во многих классах алгебр первичные алгебры могут быть достаточно хорошо охарактеризованы. Первичные альтернативные алгебры изучаются в следующей главе.

Теорема 6. *Фактор-алгебра $A/\mathscr{B}(A)$ является подпрямой суммой первичных алгебр.*

Доказательство. Идеал $I$ алгебры $A$ назовем *первичным идеалом*, если алгебра $A/I$ первична. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что бэровский идеал $\mathscr{B}(A)$ равен пересечению некоторого множества первичных идеалов. Покажем, что он совпадает с пересечением $I$ всех первичных идеалов. Пусть $P$ — первичный идеал. Тогда в силу предложения 4 $P \supseteq \mathscr{B}(A)$ и, следовательно, $I \supseteq \mathscr{B}(A)$. Пусть $a \notin \mathscr{B}(A)$ и $(a)$ — идеал, порожденный элементом $a$. Имеем $(a)^2 \nsubseteq \mathscr{B}(A)$, и существует элемент $a_1 \in (a)^2 \setminus \mathscr{B}(A)$. Аналогично получим элемент $a_2 \in (a_1)^2 \setminus \mathscr{B}(A)$ и т. д. Строим бесконечную последовательность $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots$ и выбираем по лемме Цорна максимальный идеал $Q$ алгебры $A$ такой, что $Q \cap \{a_i\} = \varnothing$. Если идеалы $C$ и $D$ строго содержат идеал $Q$, то для некоторых $k$ и $m$ справедливы включения $C \ni a_k$ и $D \ni a_m$. Но тогда $C \cap D \supseteq (a_l)$, где $l = \max(k, m)$ и $CD \supseteq (a_l)^2 \ni a_{l+1}$. Поэтому $CD \nsubseteq Q$, что доказывает первичность идеала $Q$. Так как $a = a_0 \notin Q$, то $a \notin I$. Значит, $\mathscr{B}(A) \subseteq I$, и равенство $\mathscr{B}(A) = I$ доказано.

Алгебра без ненулевых тривиальных идеалов называется *полупервичной*. Так как в полупервичной алгебре бэровский идеал равен нулю, из теоремы 6 вытекает

Следствие. *Всякая полупервичная алгебра есть подпрямая сумма первичных алгебр.*

Выясним теперь, каким условиям должен удовлетворять класс алгебр $\mathfrak{K}$, чтобы отображение $\mathscr{B}\colon A \to \mathscr{B}(A)$ являлось в нем радикалом.

Предложение 5. *Отображение $\mathscr{B}$ является радикалом в классе алгебр $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда всякий ненулевой идеал полупервичной алгебры из $\mathfrak{K}$ может быть гомоморфно отображен на полупервичную алгебру.*

Доказательство. Сформулированное необходимое и достаточное условие — это есть в точности условие (E) для класса $\mathcal{F} = \{A \in \mathfrak{K} \mid \mathcal{B}(A) = (0)\}$. Докажем для класса $\mathcal{F}$ условие (F). Действительно, если каждый ненулевой идеал некоторой алгебры $A$ может быть гомоморфно отображен на алгебру без тривиальных идеалов, то тривиальных идеалов в алгебре $A$ быть не может и $A \in \mathcal{F}$. Ввиду теоремы 2, $\mathcal{F}$ — полупростой класс некоторого радикала, радикальный класс $\mathfrak{K}$ которого состоит в силу предложения 1 из алгебр, не отображающихся гомоморфно на алгебры без тривиальных идеалов. В силу предложения 4 заключаем, что $\mathcal{R} = \{A \in \mathfrak{K} \mid A = \mathcal{B}(A)\}$, и достаточность условия доказана. Необходимость также ясна, ибо если $\mathcal{B}$ — радикал, то его полупростой класс есть $\mathcal{F}$, и условие (E) для него справедливо. Предложение доказано.

Если отображение $\mathcal{B}$ является радикалом, то этот радикал называется *радикалом Бэра* или *нижним нильрадикалом*. Ввиду предложения 5, для радикальности этого отображения в классе альтернативных алгебр достаточно показать, что всякий идеал $I$ полупервичной альтернативной алгебры $A$ сам является полупервичной алгеброй. Мы докажем это в следующей главе.

Предложение 6. *Для любой алгебры $A$ и ее идеала $I$ справедливо включение $\mathcal{B}(I) \supseteq I \cap \mathcal{B}(A)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(I) \not\supseteq I \cap \mathcal{B}(A)$. Тогда найдется минимальный ординал $\delta$ такой, что $\mathcal{B}(I) \not\supseteq I \cap \mathcal{B}_\delta(A)$. Ясно, что $\delta$ — непредельный ординал и что $I \cap \mathcal{B}_{\delta-1}(A) \subseteq \mathcal{B}(I)$. Так как $I \cap \mathcal{B}_\delta(A) \not\subseteq \mathcal{B}(I)$, в фактор-алгебре $A/\mathcal{B}_{\delta-1}(A)$ найдется тривиальный идеал $\overline{K}$ такой, что для его прообраза $K$ имеет место $I \cap K \not\subseteq \mathcal{B}(I)$. Но $(I \cap K)^2 \subseteq I \cap \mathcal{B}_{\delta-1}(A) \subseteq \mathcal{B}(I)$, и в фактор-алгебре $I/\mathcal{B}(I)$ нашелся ненулевой тривиальный идеал $(I \cap K) + \mathcal{B}(I) / \mathcal{B}(I)$, чего не может быть. Значит, $\mathcal{B}(I) \supseteq I \cap \mathcal{B}(A)$, и предложение доказано.

Пусть теперь $\mathcal{L}$ — класс всех локально нильпотентных алгебр из $\mathfrak{K}$. Если $\mathcal{L}$ — радикальный класс в $\mathfrak{K}$, то определяемый им радикал называется *локально нильпотентным радикалом* или *радикалом Левицкого*. Необходимых и достаточных критериев радикальности класса $\mathcal{L}$ неизвестно. Достаточных критериев известно несколько [13, 14,

59, 80, 174]. Мы приведем наиболее простой из них, достаточный для наших целей.

Теорема 7 (Дорофеев). *Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие Ф-алгебр такое, что для каждой алгебры $A \in \mathfrak{M}$ элементы цепочки*

$$A \supseteq A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \ldots$$

*являются идеалами алгебры $A$. Тогда класс $\mathscr{L}$ всех локально нильпотентных алгебр является радикальным в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда все алгебры из $\mathfrak{M}$, разрешимые индекса 2, принадлежат $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает из предложения 2. Докажем достаточность. Доказательство разбивается на ряд лемм.

Лемма 5. *Квадрат конечнопорожденной алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ есть конечнопорожденная алгебра.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — порождающие алгебры $A$. Рассмотрим свободную алгебру $F$ из $\mathfrak{M}$ с $n$ свободными порождающими. По условию фактор-алгебра $F/F^{(2)}$ принадлежит $\mathscr{L}$ и, следовательно, нильпотентна. Если $M$ — индекс ее нильпотентности, тогда всякий одночлен $u$ из $F$ степени, не меньшей $M$, представим в виде

$$u = \sum_i v_i' v_i'', \tag{1}$$

где $v_i', v_i''$ — одночлены из $F^2$, причем в силу однородности можно считать, что $d(v_i') + d(v_i'') = d(u)$. Ясно теперь, что всевозможные элементы вида $w(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s})$, где $w$ — неассоциативный одночлен степени не менее 2 и не более $M - 1$, порождают алгебру $A^2$.

Лемма 6. *Локальная разрешимость — радикальное свойство в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Класс локально разрешимых алгебр удовлетворяет свойству (A). Покажем, что он замкнут относительно расширений. Пусть идеал $I$ и фактор-алгебра $A/I$ локально разрешимы, рассмотрим в $A$ конечнопорожденную подалгебру $A_0$. В силу локальной разрешимости $A/I$ имеем $A_0^{(p)} \subseteq I$ для некоторого $p$. Идеал $I$ также локально разрешим, а в силу предыдущей леммы $A_0^{(p)}$ — конечнопорожденная алгебра. Поэтому $A_0^{(q)} = (0)$ для некоторого $q$, что и означает локальную

разрешимость алгебры $A$. Обозначим через $\mathcal{L}(A)$ сумму всех локально разрешимых идеалов алгебры $A$. В силу предложения 3 $\mathcal{L}(A)$ — локально разрешимый идеал, а в силу замкнутости относительно расширений в фактор-алгебре $A/\mathcal{L}(A)$ нет ненулевых локально разрешимых идеалов. Следовательно, класс локально разрешимых алгебр удовлетворяет (B) и (C) и является радикальным.

Лемма 7. *Всякая локально разрешимая алгебра из $\mathfrak{M}$ локально нильпотентна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для свободной алгебры $F$ с $n$ порождающими и для любого $k \geqslant 1$ существует число $f(n, k)$ такое, что

$$F^{f(n,\,k)} \subseteq F^{(k)}. \tag{2}$$

Мы видели, что число $f(n, 2)$ существует. Предположим, что $k \geqslant 3$ и число $f(n, k-1)$ существует для любого $n$. Тогда, ввиду леммы 5, для некоторого числа $L$ имеем

$$(F^2)^L \subseteq (F^2)^{(k-1)} = F^{(k)}. \tag{3}$$

Рассмотрим число $N = \max(L, f(n, 2))$. Заметим, что для одночленов степени $\geqslant N$ имеет место разложение (1). Положим $f(n, k) = N^2$ и рассмотрим одночлен $u$ степени $\geqslant N^2$. В силу (1) $u = \sum_i v_i' v_i''$, где $d(v_i') + d(v_i'') = d(u)$ и $\min(d(v_i'), d(v_i'')) \geqslant 2$. Если одночлены $v_i'$ и $v_i''$ имеют степень, не меньшую $N$, то снова применяем (1), и т. д. до тех пор, пока $u$ не представится в виде линейной комбинации произведений одночленов, каждый из которых имеет степень больше двух, но меньше $N$. Но тогда в каждом произведении будет не менее $N$ таких одночленов и в силу (3) каждое произведение будет лежать в $F^{(k)}$. Следовательно, $u$ лежит в $F^{(k)}$ и (2) доказано. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 7 достаточно теперь применить леммы 6 и 7.

Предложение 7. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с $n$ порождающими и $A^{(2)} = (0)$. Тогда $A^{n+3} = (0)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{R}_a$ и $\widetilde{L}_a$ — ограничения операторов $R_a$ и $L_a$ на идеале $A^2$. Тогда $\widetilde{R}_{ab} = \widetilde{L}_{ab} = 0$ для любых $a, b \in A$ и вследствие тождеств альтернативности

$$\widetilde{R}_a^2 = \widetilde{L}_a^2 = 0. \tag{4}$$

Кроме того, в силу центрального тождества Муфанг

$$a\,(bc)\,a = (ab)\,(ca) = 0$$

для любых $a$, $b$, $c \in A$. Поэтому

$$\widetilde{R}_a\widetilde{L}_a = \widetilde{L}_a\widetilde{R}_a = 0. \qquad (5)$$

Пусть $w = \widetilde{M}_{a_1}\widetilde{M}_{a_2}\ \ldots\ \widetilde{M}_{a_k}$ — некоторый одночлен от операторов $\widetilde{R}_{a_i}$ и $\widetilde{L}_{a_i}$, где $a_i \in A$. Элементы $a_i$ без ограничения общности можно считать линейными комбинациями порождающих. Из соотношений (4), (5) и их линеаризаций следует, что элемент $w$ является кососимметрической функцией элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поэтому, если $k \geqslant n + 1$, то $w = 0$. Легко видеть теперь, что $A^{n+3} = (0)$. Предложение доказано.

Следствие. *В многообразии альтернативных алгебр класс локально нильпотентных алгебр радикален.*

Доказательство. Так как по следствию теоремы 1.5 многообразие альтернативных алгебр однородно, утверждение следует из теоремы 7 и предложения 7.

Теорема 8 (Шестаков [80]). *Пусть в многообразии Ф-алгебр $\mathfrak{M}$ существует локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}$. Тогда для всякой алгебры $A \in \mathfrak{M}$ радикал $\mathcal{L}(A)$ равен пересечению всех таких первичных идеалов $P_\alpha$ алгебры $A$, для которых фактор-алгебра $A/P_\alpha$ является $\mathcal{L}$-полупростой* *).

Доказательство. Обозначим пересечение соответствующих первичных идеалов $P_\alpha$ через $J$. Ясно, что $\mathcal{L}(A)$ содержится в каждом идеале $P_\alpha$, а следовательно, и в их пересечении: $\mathcal{L}(A) \subseteq J$. Теорема будет доказана, если для каждого элемента $x \notin \mathcal{L}(A)$ будет найден первичный идеал $P$ такой, что $\mathcal{L}(A/P) = (0)$ и $x \notin P$. Тогда будет верно и обратное включение $J \subseteq \mathcal{L}(A)$.

Пусть $x \notin \mathcal{L}(A)$. Рассмотрим идеал $(x)$ алгебры $A$, порожденный элементом $x$. Так как $x \notin \mathcal{L}(A)$, идеал $(x)$ не является локально нильпотентным и, значит, содержит ненильпотентную конечнопорожденную подалгебру $S$. Пусть $M$ — множество таких идеалов $I$ алгебры $A$, что образ алгебры $S$ при каноническом гомоморфизме $A$

---

*) Эта теорема впервые была доказана для ассоциативных колец Бабичем [20].

на $A/I$ не является нильпотентным. Множество $M$ непусто, так как $(0) \in M$. Далее, множество $M$ является частично упорядоченным по включению. Пусть теперь $T = \{I_\alpha\}$ — линейно упорядоченное подмножество множества $M$. Покажем, что $I = \bigcup I_\alpha$ принадлежит $M$. Допустим противное: образ $\overline{S}$ подалгебры $S$ в фактор-алгебре $A/I$ нильпотентен или, другими словами, $S^m \subseteq I$ для некоторого $m$. Рассмотрим множество $W$ слов от порождающих подалгебры $S$ длины от $m$ до $2m$. Это множество конечно, лежит в $S^m$, а значит и в $I$. Но, ввиду его конечности, имеем $W \subseteq I_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0$. Покажем, что и $S^m \subseteq I_{\alpha_0}$. Действительно, пусть $u$ — слово от порождающих алгебры $S$ длины не меньше $m$. Если его длина не больше $2m$, то $u \in W$ и, следовательно, $u \in I_{\alpha_0}$. Если же $d(u) > 2m$, то $u = u_1u_2$, где длина одного из $u_i$ больше $m$. Пусть $d(u_1) > m$. Сделав индуктивное предположение, мы можем считать, что $u_1 \in I_{\alpha_0}$, но тогда и $u = u_1u_2 \in I_{\alpha_0}$. Следовательно, $S^m \subseteq I_{\alpha_0}$, что противоречит тому, что $I_{\alpha_0} \in M$.

Итак, $I \in M$ и множество $M$ индуктивно. По лемме Цорна в $M$ есть максимальный элемент $P$. Очевидно, что $(x) \notin P$, ибо в противном случае $(x) \subseteq P$ и $S \subseteq P$. Рассмотрим алгебру $\overline{A} = A/P$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\overline{A}$ — первичная $\mathscr{L}$-полупростая алгебра. Заметим, что подалгебра $\overline{S}$ в $\overline{A}$ такова, что в любом собственном гомоморфном образе алгебры $\overline{A}$ образ ее нильпотентен. Для удобства обозначим $\overline{A}$ через $A$ и $\overline{S}$ через $S$. Покажем вначале, что $A$ первична.

Пусть $B$ и $C$ — два идеала алгебры $A$ и $BC = (0)$. Если $B \neq (0)$ и $C \neq (0)$, то алгебра $S$ при канонических гомоморфизмах $A$ на $A/B$ и $A$ на $A/C$ перейдет в нильпотентные алгебры $S_1$ и $S_2$. По теореме о гомоморфизмах

$$S_1 \cong S + B/B \cong S/S \cap B, \quad S_2 \cong S + C/C \cong S/S \cap C.$$

Рассмотрим алгебру $S \cap B/S \cap B \cap C$. Она нильпотентна, так как $S \cap B/S \cap B \cap C \cong S \cap B + S \cap C/S \cap C$, а последняя алгебра изоморфна подалгебре алгебры $S_2$. Кроме того, $(S \cap B \cap C)^2 = (0)$, поэтому в силу предложения 2 алгебра $S \cap B$ локально нильпотентна. Теперь мы видим, что $S \cap B$ и $S/S \cap B$ — локально нильпотентные алгебры. То же предложение 2

дает нам локальную нильпотентность алгебры $S$. Однако это невозможно, так как она конечнопорождена и ненильпотентна. Мы доказали первичность алгебры $A$.

Пусть, наконец, $B$ — локально нильпотентный идеал алгебры $A$. Если $B \neq (0)$, то алгебра $\overline{S} = S + B/B$ нильпотентна и, следовательно, нильпотентна алгебра $S/S \cap B$, которая изоморфна $S + B/B$. Итак, $S \cap B$ и $S/S \cap B$ — локально нильпотентные алгебры. По предложению 2 алгебра $S$ также локально нильпотентна, однако это не так. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *В условиях теоремы 8 всякая $\mathcal{L}$-полупростая алгебра из $\mathfrak{M}$ является подпрямой суммой первичных $\mathcal{L}$-полупростых алгебр.*

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — произвольный класс алгебр с ассоциативными степенями, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Легко видеть, что класс $\mathcal{N}$ всех ниль-алгебр является в $\mathfrak{K}$ радикальным классом. Соответствующий радикал называется *радикалом Кёте* или *верхним ниль-радикалом*.

Для всех трех введенных радикалов $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ выполняется условие (G); для $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$ оно очевидно, для $\mathcal{B}$ следует из предложения 6 и леммы 1. По следствию теоремы 5 в классе альтернативных алгебр условие (H) для этих радикалов тоже справедливо. Однако по теореме 3 условия (G) и (H) эквивалентны наследственности. Поэтому нами доказана

Теорема 9. *Радикалы $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ в классе альтернативных алгебр наследственны.*

Между вводимыми радикальными классами очевидны соотношения

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{N}.$$

Эти включения являются строгими [37, 186]. Всякий радикал $\mathcal{R}$, радикальный класс которого удовлетворяет соотношениям $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}$, называется *ниль-радикалом*. Понятными в связи с этим становятся термины «нижний ниль-радикал» и «верхний ниль-радикал». Жевлаков высказывал в свое время гипотезу, что ниль-радикалы образуют цепь. Гипотеза оказалась неверной: в классе ассоциативных алгебр над произвольным полем Рябухин построил целый класс несравнимых ниль-радикалов.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что всякая первичная (полупервичная) Ф-алгебра является первичным (полупервичным) кольцом.

2 (Дорофеев). Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие алгебр такое, что для любой алгебры $A \in \mathfrak{M}$ члены цепочки

$$A \supseteq A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \ldots$$

являются идеалами в $A$. Тогда, если все разрешимые индекса 2 алгебры из $\mathfrak{M}$ нильпотентны, то и все разрешимые алгебры в $\mathfrak{M}$ нильпотентны.

Указание. Рассуждать, как в доказательстве леммы 7.

3 (Слинько). Доказать, что для любого дифференцирования $D$ алгебры $A$ над полем характеристики 0

а) $\mathscr{B}(A)^D \subseteq \mathscr{B}(A)$;

б) если $\mathscr{L}(A)$ — локально нильпотентный идеал в $A$ и $A/\mathscr{L}(A)$ не содержит ненулевых локально нильпотентных идеалов, то $\mathscr{L}(A)^D \subseteq \mathscr{L}(A)$. В частности, это так, если $A$ принадлежит многообразию, где существует локально нильпотентный радикал;

в) если $A$ — алгебра с ассоциативными степенями, то $\mathscr{N}(A)^D \subseteq \subseteq \mathscr{N}(A)$.

**4.** Докажите, что во всякой алгебре $A$ с ассоциативными степенями радикал Кёте $\mathscr{N}(A)$ равен пересечению всех первичных идеалов этой алгебры, фактор-алгебра по которым $\mathscr{N}$-полупроста.

## § 3. Радикал Андрунакиевича

Алгебра $A$ называется *подпрямо неразложимой*, если ее *сердцевина* $H(A)$ — пересечение всех ненулевых идеалов алгебры $A$ — отлична от нуля. Свойства подпрямо неразложимой алгебры в значительной степени определяются свойствами ее сердцевины. В альтернативных алгебрах квадрат идеала — всегда идеал (предложение 5.1), так что, если $A$ — альтернативная алгебра, то либо $H(A)^2 = (0)$, либо $H(A)^2 = H(A)$. Таким образом, подпрямо неразложимые альтернативные алгебры делятся на два класса: алгебры с нильпотентной сердцевиной и алгебры с идемпотентной сердцевиной. Если о структуре первых ничего определенного сказать нельзя, то вторые допускают по модулю ассоциативных алгебр исчерпывающее описание. В этом параграфе будет доказано, что всякая неассоциативная подпрямо неразложимая альтернативная алгебра с идемпотентной сердцевиной является алгеброй Кэли — Диксона над своим центром. Кроме того, будет показано, что подпрямо неразложимые альтернативные алгебры с идемпотентной сердцевиной являются

строительными блоками полупростого класса некоторого нового радикала с интересными свойствами. Этот радикал будет играть важную роль в главе 12 при изучении альтернативных алгебр с условием минимальности.

Пусть $X$ — подмножество алгебры $A$. *Правым аннулятором* $X$ называется множество $\mathrm{Ann}_r(X) = \{z \in A \mid Xz = (0)\}$, *левым аннулятором* — множество $\mathrm{Ann}_l(X) = \{z \in A \mid zX = (0)\}$, *аннулятором* — $\mathrm{Ann}(X) = \mathrm{Ann}_r(X) \cap \mathrm{Ann}_l(X)$.

Лемма 8. *Пусть $B$ — идеал альтернативной алгебры $A$. Тогда* $\mathrm{Ann}_r(B)$, $\mathrm{Ann}_l(B)$ *и* $\mathrm{Ann}(B)$ *— также идеалы в $A$.*

Доказательство. В силу симметрии достаточно показать, что $\mathrm{Ann}_r(B)$ — идеал. Пусть $z \in \mathrm{Ann}_r(B)$, $a \in A$, $b \in B$. Тогда

$$b(za) = (bz)a - (b, z, a) = -(a, b, z) = a(bz) - (ab)z = 0,$$

т. е. $za \in \mathrm{Ann}_r(B)$ и $\mathrm{Ann}_r(B)$ — правый идеал. Аналогично,

$$b(az) = (ba)z - (b, a, z) = (a, b, z) = 0$$

и $az \in \mathrm{Ann}_r(B)$. Таким образом, $\mathrm{Ann}_r(B)$ — идеал, и лемма доказана.

Напомним, что для идеала $I$ альтернативной алгебры $A$ через $T(I)$ и $P(I)$ обозначаются соответственно подмодули $\{III\}$ и $\{IA^{\#}I\}$ $\Phi$-модуля $A$. По следствию предложения 5.2 эти подмодули являются идеалами алгебры $A$ такими, что $P(I) \supseteq T(I) \supseteq P(I)^2$.

Лемма 9. *Пусть $P(I) = (0)$ для идеала $I$ альтернативной алгебры $A$. Тогда для любого $v \in I$ подмодуль $V = vI$ является тривиальным идеалом алгебры $A$.*

Доказательство. Для любых $i, j \in I$, $a \in A$ мы имеем

$$i \circ j = \{i1j\} = 0,$$

$$(ia)j + (ja)i = i(aj) + j(ai) = \{iaj\} = 0.$$

Следовательно,

$$(vi)a = -(va)i + v(a \circ i) = v(a \circ i) + (ia)v = v(a \circ i) - v(ia) = v(ai) \in vI,$$

$$a(vi) = -a(iv) = i(av) - (a \circ i)v = v(a \circ i) - v(ai) = v(ia) \in vI,$$

т. е. $V$ — идеал алгебры $A$. В силу центрального тождества Муфанг $(vi)(vj) = -(vi)(jv) = -v(ij)v = 0$, откуда $V^2 = (0)$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $I$ — идеал альтернативной алгебры $A$. Тогда, если $I \neq (0)$ и $I$ не содержит ненулевых тривиальных идеалов алгебры $A$, то $T(I) \neq (0)$.*

Доказательство. Допустим, что $T(I) = (0)$. По следствию предложения 5.2 мы имеем тогда $P(I)^2 = (0)$. Так как $P(I) \subseteq I$ и $P(I)$ — идеал в $A$, то в силу условий леммы $P(I) = (0)$. Тогда по лемме 9 для любого $v \in I$ верно $vI = (0)$, откуда $I^2 = (0)$. Это противоречит условию леммы. Следовательно, $T(I) \neq (0)$. Лемма доказана.

Идеал $I \neq (0)$ алгебры $A$ называется *минимальным*, если из того, что $I'$ — идеал алгебры $A$, строго содержащийся в $I$, следует $I' = (0)$.

Теорема 10 (Жевлаков). *Если $I$ — минимальный идеал альтернативной алгебры $A$, то либо $I^2 = (0)$, либо $I$ — простая алгебра.*

Доказательство. Пусть $I^2 \neq 0$. Тогда $I^2 = I$, и мы находимся в ситуации леммы 10. Значит, в этом случае $I = T(I)$. Допустим, что $B$ — идеал алгебры $I$ и $B \neq I$. Рассмотрим множество $C = (IB)I + I(BI)$ и докажем, что $C$ — идеал алгебры $A$. Запись $p \equiv q$ будет обозначать, что $p - q \in C$. Пусть $b \in B$, $x, y \in I$, $a \in A$. Тогда в силу (7.18)

$$(a, b, xyx) = (xax, b, y) + (\{axy\}, b, x) \equiv 0.$$

Ввиду равенства $I = T(I)$, для любого $i \in I$ мы имеем

$$(a, b, i) \equiv 0. \tag{6}$$

Теперь пусть $i, j \in I$; тогда, ввиду (6),

$$[(ib)j]a = (ib)(ja) + (ib, j, a) \equiv 0$$

и, далее,

$$[i(bj)]a = i[(bj)a] + (i, bj, a) \equiv i[(bj)a] = \\ = i(b, j, a) + i[b(ja)] \equiv 0.$$

Эти соотношения означают, что $C$ — правый идеал в $A$. Аналогично доказывается, что $C$ — левый идеал. Но $C \subseteq B$, и потому $C$ строго содержится в $I$. Следовательно, $C = (0)$. В частности, $(IB)I = (0)$, т. е. $IB \subseteq \mathrm{Ann}_l(I)$.

Если $\mathrm{Ann}_l(I) \cap I \neq (0)$, то в силу минимальности идеала $I$ и леммы 8 $\mathrm{Ann}_l(I) \supseteq I$, т. е. $I^2 = (0)$. Следовательно, $\mathrm{Ann}_l(I) \cap I = (0)$. Аналогично, $\mathrm{Ann}_r(I) \cap I = (0)$. Однако $IB \subseteq \mathrm{Ann}_l(I) \cap I$ и, значит, $IB = (0)$. Но тогда $B \subseteq \subseteq \mathrm{Ann}_r(I) \cap I$ и $B = (0)$. Значит, $I$ — простая алгебра. Теорема доказана.

Для ассоциативных алгебр эта теорема легко вытекает из следующего утверждения, носящего название *леммы Андрунакиевича.*

Лемма 11. *Пусть $I$ — идеал ассоциативной алгебры $A$, а $J$ — идеал алгебры $I$. Тогда для идеала $\hat{J}$, порожденного множеством $J$, имеет место включение $\hat{J}^3 \subseteq J$.*

Доказательство. Так как $A$ ассоциативна, $\hat{J} = A^{\#}JA^{\#}$. Поэтому

$$\hat{J}^3 \subseteq I(A^{\#}JA^{\#})I \subseteq IJI \subseteq J.$$

Лемма доказана.

Для альтернативной алгебры $A$ до сих пор неизвестно, существует ли такое число $n$, что $\hat{J}^n \subseteq J$. Шестаков доказал [271], что для альтернативной алгебры $A$ с $k$ порождающими $\hat{J}^{k+3} \subseteq J$. В общем случае Хенцель и Слейтер показали, что $\hat{J}^{\omega+1} \subseteq J$, где $\omega$ — первый бесконечный ординал [249].

Ввиду того, что подпрямо неразложимая алгебра с идемпотентной сердцевиной первична, займемся сбором предварительных сведений о первичных и полупервичных алгебрах.

В произвольной алгебре $A$ через $D(A)$ обозначим идеал, порожденный множеством $(A, A, A)$ всех ассоциаторов,— так называемый *ассоциаторный идеал.*

Предложение 8. $D(A) = (A, A, A)A^{\#} = A^{\#}(A, A, A)$.

Доказательство. Из тождества (7.5) следует, что

$$A(A, A, A) \subseteq (A, A, A)A^{\#}.$$

Кроме того, очевидно включение

$$((A, A, A)A)A \subseteq (A, A, A) + (A, A, A)A^2.$$

Поэтому

$$A((A, A, A)A) \subseteq (A(A, A, A))A + (A, A, A) \subseteq$$
$$\subseteq (A, A, A) + (A, A, A)A + ((A, A, A)A)A \subseteq$$
$$\subseteq (A, A, A)A^{\#},$$

откуда следует, что множество $(A, A, A)A^{\#}$ — идеал в $A$. Следовательно, $D(A) = (A, A, A)A^{\#}$. Аналогично доказывается и второе равенство. Предложение доказано.

Всякий идеал, содержащийся в ассоциативном центре $N = N(A)$, назовем *ядерным идеалом*, а наибольший ядерный идеал — *ассоциативным ядром* алгебры $A$. Последний будем обозначать через $U = U(A)$.

Предложение 9. $U(A) = \{x \in A \mid xA^{\#} \subseteq \subseteq N(A)\}$.

Доказательство. Достаточно показать, что множество $V$, стоящее в правой части равенства, является идеалом. Очевидно, что $V$ — правый идеал. С другой стороны, $[N, A] \subseteq N$, и потому

$$(AV)A^{\#} = A(VA^{\#}) \subseteq AV \subseteq [V, A] + V \subseteq N.$$

Это значит, что $AV \subseteq V$, т. е. $V$ — левый идеал. Следовательно, $V$ — идеал, и предложение доказано.

Предложение 10. $DU = UD = (0)$.

Доказательство. Ввиду леммы 7.1, мы имеем $U(A, A, A) = (A, A, A)U = (0)$, поэтому

$$U((A, A, A)A^{\#}) = (U(A, A, A))A^{\#} = (0),$$
$$(A^{\#}(A, A, A))U = A^{\#}((A, A, A)U) = (0).$$

Доказательство закончено, ввиду предложения 8.

Следствие. *Если $A$ первична, то либо $U = (0)$, либо $A$ ассоциативна.*

Ясно, что если $U = (0)$, то алгебра $A$ довольно далеко отстоит от ассоциативных алгебр, и в этом случае ее принято называть *чисто неассоциативной*. Если $A$, к тому же, альтернативна, будем называть ее *чисто альтернативной*.

Полезным также оказывается понятие *разделенной алгебры* — такой алгебры, в которой $D \cap U = (0)$.

Пусть теперь $A$ — альтернативная алгебра. Рассмотрим ее идеал $ZN(A)$, порожденный множеством $[N, A]$. Обозначим его через $M$. Как мы знаем (см. леммы 7.4 и 7.5), $M = [N, A]A^{\#}$ и $(M, A, A) \subseteq N$.

Через $Z = Z(A)$ будем, как и прежде, обозначать центр алгебры $A$.

Теорема 11. *В полупервичной альтернативной алгебре $A$ имеет место включение $M \subseteq U$. Если вдобавок $A$ чисто альтернативна, то $N = Z$.*

Доказательство. Если $M \nsubseteq U$, то $M \nsubseteq N$, и мы можем найти такие элементы $n \in N$, $a, b, c, d \in A$, что $m = ([a, n]\, b, c, d) \neq 0$. Элемент $u = [a, n]\, b$ лежит в $M$, и, следовательно, $m \in (M, A, A) \subseteq N$. Но тогда по лемме 7.7 $(m)^2 = (0)$, что противоречит полупервичности алгебры $A$. Следовательно, $M \subseteq U$.

Если $A$ еще чисто альтернативна, отсюда следует $M = (0)$. В частности, $[N, A] = (0)$, а это значит, что $N = Z$. Теорема доказана.

Следствие. *В первичной альтернативной неассоциативной алгебре $A$ имеет место равенство $N = Z$.*

Теорема 12. *Всякая подпрямо неразложимая полупервичная альтернативная алгебра является либо ассоциативной, либо алгеброй Кэли — Диксона над своим центром.*

Доказательство. Пусть алгебра $A$ удовлетворяет условиям теоремы и $H = H(A)$ — ее сердцевина. В силу теоремы 10 $H$ — простая алгебра, и потому либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли — Диксона. В первом случае она совпадает со своим ассоциативным центром, и поэтому в силу леммы 10 $N(H) = T(N(H))$. Во втором случае это равенство также верно, так как по теореме 2.5 ассоциативный центр алгебры Кэли — Диксона является полем.

Покажем, что $N(H) \subseteq N(A)$. Пусть $n, m \in N(H)$ и $a, b \in A$. Тогда в силу тождества (7.18)

$$(nmn, a, b) = -(nan, m, b) + (n, \{mna\}, b).$$

Из этого равенства вытекает, что $(N(H), A, A) \subseteq (N(H), H, A)$. Далее, пусть $h \in H$, $n, m \in N(H)$, $a \in A$. В силу того же тождества

$$(nmn, h, a) = -(nan, h, m) + (n, h, \{mna\}) = 0,$$

и, следовательно, $(N(H), A, A) \subseteq (N(H), H, A) = (0)$. Таким образом, мы получили, что $N(H) \subseteq N(A)$.

Допустим теперь, что $A$ неассоциативна. Тогда по теореме 11, ввиду первичности алгебры $A$, имеем $N(A) = Z(A)$. Отсюда следует, что если $H$ ассоциативна, то

$H = N(H) \subseteq N(A) = Z(A)$, и $H$ является полем. Таким образом, если $A$ неассоциативна, то в любом случае $N(H)$ — поле. Пусть $e$ — единица этого поля. Рассмотрим множество $E = \{ea - a \mid a \in A\}$. Так как $e \in Z(A)$, то это множество — идеал. Однако $eE = Ee = (0)$, что в силу леммы 8 противоречит первичности алгебры $A$, если только $e$ не является единицей в $A$. Если же $e$ — единица в $A$, то $A$ совпадает с $H$ и является простой алгеброй. Ввиду теоремы о простых альтернативных алгебрах, наше утверждение доказано.

Перейдем теперь к построению радикала. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех Ф-алгебр и $\mathfrak{P}$ — класс всех подпрямо неразложимых Ф-алгебр, сердцевина которых — простая алгебра. Идеал $I$ алгебры $A$ будем называть $\mathfrak{P}$-идеалом, если фактор-алгебра $A/I$ принадлежит $\mathfrak{P}$.

Лемма 12. *Пусть $A \in \mathfrak{P}$ и $I$ — идеал в $A$. Тогда $I$ гомоморфно отображается на алгебру из $\mathfrak{P}$. Если алгебра $A$ альтернативна, то $I \in \mathfrak{P}$, причем $H(I) = H(A)$.*

Доказательство. Пусть $H(A)$ — сердцевина алгебры $A$. Алгебра $H(A)$ проста и $I \supseteq H(A)$. В силу простоты $H(A)$ для любого идеала $J$ алгебры $I$ либо $J \supseteq H(A)$, либо $J \cap H(A) = (0)$. По лемме Цорна выбираем максимальный идеал $K$ такой, что $K \cap H(A) = (0)$. Ясно, что $\overline{I} = I/K$ — подпрямо неразложимая алгебра с сердцевиной $\overline{H(A)}$. Если алгебра $A$ альтернативна, то по теореме 4 $K$ — идеал в $A$. Однако $K \cap H(A) = (0)$ и, следовательно, $K = (0)$, что доказывает и второе утверждение леммы.

Теорема 13. *Класс $\mathscr{A}$ всех алгебр, гомоморфно не отображающихся на алгебры из класса $\mathfrak{P}$, является радикальным в классе всех алгебр.*

Доказательство. Свойство (A) для класса $\mathscr{A}$ очевидно; свойство (D) вытекает из леммы 12, так что необходимые и достаточные условия радикальности, сформулированные в теореме 1, выполнены.

Радикал $\mathscr{A}$ называется *радикалом Андрунакиевича* или *антипростым радикалом*.

Лемма 13. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $I$ — ее идеал и $J$ — $\mathfrak{P}$-идеал алгебры $I$. Тогда существует $\mathfrak{P}$-идеал $K$ алгебры $A$ такой, что $K \cap I = J$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4, $J$ — идеал алгебры $A$. Рассмотрим $\overline{A} = A/J$ и идеал $\overline{I} = I/J$. По усло-

вию $\overline{I}$ — подпрямо неразложимая алгебра с простой сердцевиной. Если теперь $\overline{K}$ — максимальный идеал алгебры $\overline{A}$ такой, что $\overline{I} \cap \overline{K} = (\overline{0})$, то алгебра $\overline{\overline{A}} = \overline{A}/\overline{K}$ принадлежит $\mathfrak{P}$, так как $H(\overline{\overline{A}}) \supseteq \overline{H(\overline{I})} \neq (\overline{0})$. Пусть $K$ — прообраз идеала $\overline{K}$ в $A$. Тогда

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}/\overline{K} = A/J/K/J \cong A/K$$

и $K$ есть $\mathfrak{P}$-идеал алгебры $A$. Кроме того, $K \cap I \subseteq J$, а следовательно, $K \cap I = J$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *В классе альтернативных алгебр радикал Андрунакиевича является наследственным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду следствия теоремы мы должны доказать для радикала $\mathcal{A}$ только условие (G). Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $I$ — идеал в $A$. Если $I \notin \mathcal{A}$, то в алгебре $I$ имеется собственный $\mathfrak{P}$-идеал $J$. В силу леммы 13 существует $\mathfrak{P}$-идеал $K$ алгебры $A$ такой, что $K \cap I = J$ и, значит, $K \neq A$. Но тогда $A/K \in \mathfrak{P}$, что противоречит радикальности алгебры $A$. Следствие доказано.

Т е о р е м а 14. *Радикал Андрунакиевича $\mathcal{A}(A)$ альтернативной алгебры $A$ равен пересечению всех ее $\mathfrak{P}$-идеалов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пересечение $I$ всех $\mathfrak{P}$-идеалов алгебры $A$. По лемме 12 всякий идеал алгебры из $\mathfrak{P}$ есть снова алгебра из $\mathfrak{P}$, и потому все алгебры из $\mathfrak{P}$ являются $\mathcal{A}$-полупростыми. Отсюда следует, что $I \supseteq \mathcal{A}(A)$.

Докажем теперь, что $I$ есть $\mathcal{A}$-радикальная алгебра, и мы будем иметь $I = \mathcal{A}(A)$. Пусть $I \notin \mathcal{A}$. Тогда в $I$ существует собственный $\mathfrak{P}$-идеал $J$. В силу леммы 13 в $A$ имеется $\mathfrak{P}$-идеал $K$ такой, что $K \cap I = J \neq I$, но это противоречит определению $I$. Итак, $I$ — радикальный идеал и теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Для всякой альтернативной алгебры $A$ фактор-алгебра $A/\mathcal{A}(A)$ является подпрямой суммой ассоциативных подпрямо неразложимых алгебр с простой сердцевиной и алгебр Кэли — Диксона.*

Ввиду теоремы 14, $\mathcal{A}$-полупростые альтернативные алгебры — это в точности подпрямые суммы подпрямо неразложимых алгебр с идемпотентной сердцевиной. Некоторый свет на строение $\mathcal{A}$-радикальных алгебр проливает упражнение 4.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что все локально нильпотентные алгебры являются $\mathcal{A}$-радикальными.

**2.** Доказать, что в классе ассоциативно-коммутативных алгебр антипростой радикал $\mathcal{A}$ совпадает с квазирегулярным радикалом $\mathcal{J}$. В классе всех ассоциативных алгебр эти радикалы несравнимы [50].

3 (Андрунакиевич). Пусть $I$ — конечнопорожденный идеал ассоциативной алгебры $A$. Тогда, если $I \subseteq \mathcal{A}(A)$, то $I^2 \neq I$.

Указание. Пусть $I = (a_1, \ldots, a_n)$ и $I^2 = I$. Используя лемму Цорна, выбрать максимальный идеал $M$ в $I$, содержащий $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и не содержащий $a_n$. Доказать, что $M$ максимален в $I$, т. е. что $I/M$ — простая алгебра. Воспользоваться для этого леммой Андрунакиевича.

**4.** Доказать, что альтернативная алгебра $\mathcal{A}$-радикальна тогда и только тогда, когда любой ее гомоморфный образ является подпрямой суммой подпрямо неразложимых алгебр с нильпотентной сердцевиной.

**5.** Доказать, что всякая разделенная алгебра является подпрямой суммой ассоциативной и чисто неассоциативной алгебр.

**6.** Доказать, что в чисто неассоциативной алгебре $A$ ассоциаторный идеал $D(A)$ имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым ее идеалом.

**7.** Доказать, что всякая чисто альтернативная алгебра является альтернативной PI-алгеброй.

Указание. Воспользоваться упражнением 7 к § 7.1.

## ЛИТЕРАТУРА

Амицур [12], Андерсон [13, 14], Андерсон, Дивинский, Сулинский [15], Андрунакиевич [16, 17, 18], Бабич [20], Голод [37], Дивинский [50], Дивинский, Кремпа, Сулинский [51], Дивинский и Сулинский [52], Дорофеев [59], Жевлаков и Шестаков [80], Клейнфелд [94], Кремпа [102], Курош [105], Никитин [159, 161], Пчелинцев [174], Роомельди [182], Рябухин [186, 188, 189], Слинько [208, 210, 211], Хенцель и Слейтер [249], Цай [257], Шестаков [271].

*ГЛАВА* 9

# ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

В предыдущей главе мы видели, что для описания полупростых классов многих радикалов важно знать строение полупервичных алгебр из данного класса $\mathfrak{K}$. В частности, как для ниль-радикалов, так и для антипростого радикала Андрунакиевича все полупростые алгебры являются полупервичными. В этой главе мы изучим строение полупервичных альтернативных алгебр. Так как всякая полупервичная алгебра есть подпрямая сумма первичных, то задача во многом сводится к изучению первичных альтернативных алгебр. Последние, если исключить случай характеристики 3, допускают по модулю ассоциативных алгебр вполне удовлетворительное описание: всякая первичная альтернативная неассоциативная алгебра является так называемым «кольцом Кэли — Диксона», которое представляет из себя подкольцо определенного вида в алгебре Кэли — Диксона. Вопрос об описании первичных альтернативных алгебр характеристики 3 еще открыт.

Основные результаты этой главы получены Клейнфелдом и Слейтером.

## § 1. Идеалы полупервичных алгебр

Лемма 1. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра и $I$ — ее идеал. Если $(m, I, I) = (0)$ для некоторого элемента $m \in A$, то $(m, A, A) \subseteq \mathrm{Ann}_r\, T(I)$.*

Доказательство. В силу тождества (7.18) для любых элементов $i, j \in I$, $a \in A$

$$(m, iji, a) = -(m, iai, j) + (m, i, \{jia\}) = 0,$$

откуда

$$(m,\ T(I),\ A) = (0).$$

Если теперь $b \in A$, то

$$f(a,\ b, m, iji) = (ab, m, iji) - b(a, m, iji) - (b, m, iji)\,a = 0.$$

Следовательно,

$$(iji)(a,\ b,\ m) = -f(a,\ iji,\ b,\ m) + (a(iji),\ b,\ m) - \\ - (iji,\ b,\ m)\,a = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 (Слейтер). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра, $I$ — идеал алгебры $A$. Тогда $N(I) = I \cap N(A)$.*

Доказательство. По следствию теоремы 8.6 алгебра $A$ есть подпрямая сумма первичных алгебр. Если $N(I) \nsubseteq N(A)$, то существуют такие элементы $n \in N(I)$, $a,\ b \in A$, что $(n,\ a,\ b) \neq 0$. Но тогда у алгебры $A$ найдется первичный гомоморфный образ $\overline{A}$, в котором $(\overline{n},\ \overline{a},\ \overline{b}) \neq \neq \overline{0}$. Ясно, что образ $\overline{I}$ идеала $I$ отличен от нуля. По лемме 8.10 тогда и $T(\overline{I}) \neq (\overline{0})$. Правый аннулятор идеала $T(\overline{I})$ является идеалом в $\overline{A}$, который равен нулю в силу первичности $\overline{A}$. Заметим теперь, что $\overline{n} \in \overline{N(I)} \subseteq N(\overline{I})$, и по лемме 1 $(\overline{n},\ \overline{a},\ \overline{b}) \in \mathrm{Ann}_r(T(\overline{I})) = (\overline{0})$. Полученное противоречие доказывает, что $N(I) \subseteq N(A)$, т. е. и $N(I) \subseteq I \cap N(A)$. Ввиду очевидности обратного включения, теорема доказана.

Пусть теперь $A$ — альтернативная алгебра и $I$ — правый идеал в $A$. Через $\check{I}$ обозначим наибольший идеал алгебры $A$, содержащийся в $I$, а через $\hat{I}$ — наименьший идеал алгебры $A$, содержащий $I$. Как обычно, через $(I : A)$ будем обозначать множество $\{x \in A \mid Ax \subseteq I\}$.

Лемма 2. $\check{I} = (I : A^{\#})$.

Доказательство. Ясно, что $(I : A^{\#}) \subseteq I$ и что каждый двусторонний идеал, содержащийся в $I$, лежит в $(I : A^{\#})$. Для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что этот подмодуль является идеалом в $A$. Пусть $s \in (I : A^{\#})$, $a \in A$, $b \in A^{\#}$. Тогда

$$b(sa) = (bs)\,a - (b,\ s,\ a) = (bs)\,a + (s,\ b,\ a) \in I,$$

$$b(as) = (ba)\,s - (b,\ a,\ s) = (ba)\,s + (s,\ a,\ b) \in I,$$

т. е. $sa$ и $as$ лежат в $(I : A^{\#})$. Лемма доказана.

Лемма 3. $(I, I, A) \subseteq \check{I}$.

Доказательство. Пусть $i, j \in I$, $a \in A$, $b \in A^{\#}$. Тогда по линеаризованному тождеству Муфанг

$$b(i, j, a) = -j(i, b, a) + (i, j, ab) + (i, b, aj) \in I,$$

откуда $(I, I, A) \subseteq (I : A^{\#}) = \check{I}$. Лемма доказана.

Лемма 4. $\hat{I} = A^{\#}I$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что множество $A^{\#}I$ является идеалом в $A$. Пусть $i \in I$, $a \in A$, $b \in A^{\#}$. Тогда

$$a(bi) = (ab)i - (a, b, i) = (ab)i - (i, a, b) \in A^{\#}I,$$

$$(bi)a = b(ia) + (b, i, a) = b(ia) + (i, a, b) \in A^{\#}I,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть $A$ полупервична и $n \in I$ такой, что $(n, I, A) = (0)$. Тогда $n \in N(A)$.*

Доказательство. Пусть $i \in I$, $a, b \in A$. Положим $n_1 = (n, a, b)$. Имеем $f(a, b, n, i) = (ab, n, i) - b(a, n, i) - (b, n, i)a = 0$, откуда $(a, b, n)i = -f(i, a, b, n) + (ia, b, n) - a(i, b, n) = 0$, т. е.

$$n_1 I = 0. \qquad (1)$$

С другой стороны, $i(a, b, n) = -f(a, i, b, n) + (ai, b, n) - (i, b, n)a = (ai, b, n)$, т. е.

$$in_1 = (ai, b, n). \qquad (2)$$

Далее, из (1) следует, что $(n_1, i, a) = (n_1 i)a - n_1(ia) = 0$, и так как элемент $a$ произволен, по лемме 7.3 получаем $[n_1, i] \in N(A)$, что в силу (1) и (2) дает нам

$$(ai, n, A) \subseteq N(A).$$

По лемме 7.7 каждый элемент из $(ai, n, A)$ порождает тривиальный идеал в $A$. В силу полупервичности $(ai, n, A) = (0)$, и мы имеем теперь

$$(n, \hat{I}, A) = (0).$$

В частности, $n \in N(\hat{I})$, и по теореме 1 $n \in N(A)$. Лемма доказана.

Теорема 2 (Слейтер). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра и $I$ — правый идеал в $A$. Тогда $N(I) = I \cap N(A)$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, достаточно доказать утверждение в случае, когда алгебра $A$ первична. Если $\check{I} = (0)$, то по лемме 3 $(I, I, A) = (0)$, что в силу леммы 5 влечет $I \subseteq N(A)$. Легко видеть, что в этом случае утверждение теоремы верно.

Если же $\check{I} \neq (0)$, то по лемме 8.10 $T(\check{I}) \neq (0)$. Для любого элемента $n \in N(I)$ имеем $(n, \check{I}, \check{I}) = (0)$, откуда по лемме 1 $(n, A, A) \subseteq \mathrm{Ann}_r\, T(\check{I})$. В силу первичности алгебры $A$ получаем, что $\mathrm{Ann}_r\, T(\check{I}) = (0)$ и, следовательно, $n \in N(A)$. Таким образом, включение $N(I) \subseteq \subseteq I \cap N(A)$ доказано. Обратное включение очевидно. Теорема доказана.

Теорема 3 (Слейтер). *В условиях теоремы* 2 $Z(I) = I \cap Z(A)$.

Доказательство. Пусть $z \in Z(I)$. Тогда по теореме 2 $z \in N(A)$. Пусть $i \in I$, $a$, $b \in A$. В силу тождества (7.4)

$$i[z, a] = [z, ia] - [z, i]a = 0.$$

Далее, в силу следствия 1 леммы 7.3 $[z, a] \in N(A)$, и потому $(bi)[z, a] = b(i[z, a]) = 0$. Мы видим, что $[z, a] \in \mathrm{Ann}_r(\hat{I})$. Ввиду того, что элемент $[z, a]$ принадлежит идеалу $\hat{I}$ и его правому аннулятору, он принадлежит и их пересечению, которое является тривиальным идеалом в $A$. В силу полупервичности $[z, a] = 0$; это означает, что $z \in Z(A)$. Мы доказали, что $Z(I) \subseteq I \cap Z(A)$. Теорема доказана, так как обратное включение очевидно.

Покажем, наконец, что в полупервичной альтернативной алгебре всякий идеал сам является полупервичной алгеброй.

Лемма 6. *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра, $I$ — идеал алгебры $A$ и $V$ — тривиальный идеал алгебры $I$. Тогда подмодули $A^{\#}V$ и $VA^{\#}$ также являются тривиальными идеалами алгебры $I$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $A^{\#}V$ — идеал в $I$. Пусть $a \in A^{\#}$, $i \in I$, $v \in V$. Тогда

$$(av)i = a(vi) + (a, v, i) = a(vi) - (a, i, v) \in A^{\#}V,$$

$$i(av) = (ia)v - (i, a, v) = (ia)v + (a, i, v) \in A^{\#}V,$$

что и требовалось доказать. Аналогично получаем, что $VA^{\#}$ — идеал алгебры $I$. Далее, пусть $u, v \in V$, $i \in I$, $a, b \in A$. Мы имеем

$$f(a, i, u, v) = ([a, i], u, v) + (a, i, [u, v]) = 0.$$

Следовательно,

$$i(a, u, v) = -f(a, i, u, v) + (ai, u, v) - (i, u, v)a = 0,$$

т. е. $(a, u, v) \in \mathrm{Ann}_r(I)$. В то же время $(a, u, v) = (v, a, u) \in I$. Так как в силу полупервичности $I \cap \mathrm{Ann}_r(I) = (0)$, то окончательно получаем

$$(A, V, V) = (AV)V = (0). \tag{3}$$

Теперь из (3) по тождеству Муфанг имеем

$$(bv, i, u) = -(iv, b, u) + (v, i, u)b + (v, b, u)i = 0,$$

т. е.

$$(AV, I, V) = (0). \tag{4}$$

Из (4) по лемме 7.3 следует, что $[AV, V] \subseteq N(I)$, откуда в силу (3) и теоремы 1 получаем включение

$$VAV \subseteq N(A). \tag{5}$$

Заметим еще, что, ввиду тождества Муфанг и (4), (3),

$$v(i, b, u) = -i(v, b, u) + (i, bv, u) + (v, bi, u) = 0,$$

откуда

$$V(I, A, V) = (0). \tag{6}$$

Положим теперь $w = uav$. Тогда $w \in V$, $w^2 = 0$, и в силу (5) $w \in N(A)$. Пусть $i = ua$, тогда в силу (6)

$$wbw = w[b(iv)] = w[(bi)v] - w(b, i, v) = 0.$$

Итак, $w \in N(A)$, $wA^{\#}w = (0)$. По лемме 7.6 элемент $w$ порождает тривиальный идеал в алгебре $A$, поэтому $w = 0$. Значит,

$$VAV = (0). \tag{7}$$

Теперь в силу (4), (3) и (7) мы имеем

$$f(i, a, bv, u) = ([i, a], bv, u) + (i, a, [bv, u]) = 0,$$

откуда по (4)

$$(a, u, bv)i = -f(i, a, u, bv) + (ia, u, bv) - a(i, u, bv) = 0,$$

т. е. $(a, u, bv) \in \mathrm{Ann}_l(I)$. Так как $(a, u, bv) \in I$, то, ввиду полупервичности алгебры $A$, мы получаем

$$(A, V, AV) = (0). \tag{8}$$

Из (3), (7) и (8) следует, что $(A^{\#}V)^2 = (0)$. Аналогично получаем, что $(VA^{\#})^2 = (0)$.

Лемма доказана.

Теорема 4 (Слейтер). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра. Тогда всякий идеал $I$ алгебры $A$ сам является полупервичной алгеброй.*

Доказательство. Предположим, что алгебра $I$ не полупервична, т. е. в $I$ есть ненулевой тривиальный идеал $U$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ множество всех тривиальных идеалов алгебры $I$, содержащих $U$. Множество $\mathfrak{U}$ непусто, так как $U \in \mathfrak{U}$. Далее, как легко видеть, $\mathfrak{U}$ является индуктивным частично упорядоченным по включению множеством, поэтому по лемме Цорна $\mathfrak{U}$ содержит максимальный элемент $V$. По лемме 6 $A^{\#}V \in \mathfrak{U}$, поэтому $AV \subseteq V$. Аналогично, $VA \subseteq V$. Следовательно, $V$ является идеалом алгебры $A$, откуда $V = (0)$ и $U = (0)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. *Всякий идеал первичной альтернативной алгебры сам является первичной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A$ — первичная альтернативная алгебра и $I$ — ее идеал. Если алгебра $I$ не первична, то в ней существуют ненулевые идеалы $U$, $V$ такие, что $U \cdot V = (0)$. Обозначим через $M$ правый аннулятор $\mathrm{Ann}_r(U)$ идеала $U$ в алгебре $I$. Тогда $(M \cap U)^2 = (0)$, откуда $M \cap U = (0)$, так как по теореме 4 алгебра $I$ полупервична. Докажем теперь, что фактор-алгебра $\overline{I} = I/M$ полупервична. Пусть $\overline{T}$ — идеал в $\overline{I}$, $\overline{T}^2 = (0)$. Если $T$ — полный прообраз идеала $\overline{T}$ в алгебре $I$, то тогда $T^2 \subseteq M$ и $(T \cap U)^2 \subseteq T^2 \cap U \subseteq M \cap U = (0)$, откуда $T \cap U = (0)$ в силу полупервичности алгебры $I$. Следовательно, $UT \subseteq U \cap T = (0)$, $T \subseteq M$ и $\overline{T} = \overline{(0)}$, что доказывает полупервичность алгебры $\overline{I}$. По теореме 8.4 получаем, что $M$ является идеалом алгебры $A$. Но $\mathrm{Ann}_l(M) \supseteq U \neq (0)$, что противоречит первичности $A$. Полученное противоречие доказывает, что алгебра $I$ первична. Следствие доказано.

Из теоремы 4 и предложения 8.5 вытекает также

Следствие 2. *Отображение* $A \to \mathcal{B}(A)$ *является радикалом в классе всех альтернативных алгебр.*

Таким образом, в классе альтернативных алгебр определен нижний ниль-радикал. Отметим, что по теореме 8.9 этот радикал является наследственным.

**Упражнения**

1. Пусть $I$ — идеал альтернативной алгебры $A$ и $e$ — единица алгебры $I$. Доказать, что $e \in N(A)$.

В упражнениях 2—6 $I$ — минимальный правый идеал альтернативной алгебры $A$, причем $I^2 \neq (0)$.

2. Пусть $(\hat{I}, I, A) = (0)$. Доказать, что

а) $I = I^2 = vI$ для некоторого $v \in I$;

б) $I = T(I)$;

в) $(I, \hat{I}, A) = (0)$;

г) $I \subseteq N(A)$.

Указание. При доказательстве в) рассуждать, как в лемме 5, для доказательства г) воспользоваться утверждениями пунктов б), в) и тождеством (7.18).

3. Доказать, что либо $\hat{I} \subseteq U(A)$, либо $\hat{I} \subseteq D(A)$.

Указание. Воспользоваться леммой 3 и предыдущим упражнением.

4. Пусть $\hat{I} \subseteq U(A)$. Тогда $I^2 = I$, $\hat{I} = \hat{I}I$ и $I$ является минимальным правым идеалом ассоциативной алгебры $\hat{I}$. Если, кроме того, $\mathrm{Ann}_r(\hat{I}) = (0)$, то $\hat{I}$ — простая алгебра.

5. Доказать, что если $A$ ассоциативна, то $I = eA$ для некоторого идемпотента $e \in A$.

6. Пусть $\hat{I} \subseteq D(A)$. Тогда $I = \hat{I}$ — алгебра Кэли — Диксона.

7 (Слейтер). Пусть $I$ — минимальный правый идеал альтернативной алгебры $A$ и $I^2 \neq (0)$. Тогда $I^2 = I$ и $I$ является минимальным правым идеалом алгебры $\hat{I}$. Кроме того, $I = eA$ для некоторого идемпотента $e \in N(A)$.

8. Доказать, что полупервичная альтернативная алгебра не содержит ненулевых тривиальных правых идеалов.

9 (Слейтер). Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра и $I$ — идеал алгебры $A$. Тогда множество всех минимальных идеалов (правых идеалов) алгебры $I$ совпадает с множеством всех минимальных идеалов (правых идеалов) алгебры $A$, содержащихся в $I$.

10. Доказать, что если $A$ — полупервичная альтернативная алгебра, то $Z(D(A)) = N(D(A))$.

Указание. Воспользоваться теоремой 8.11.

В упражнениях 11—13 $A$ — полупервичная альтернативная алгебра, $I$ — правый идеал алгебры $A$.

11. Пусть $V$ — тривиальный идеал алгебры $I$. Доказать, что $V \subseteq N(I)$.

Указание. Доказать, что $V \cap \check{I} = (0)$.

**12.** Пусть $V$ — ядерный идеал алгебры $I$. Доказать, что $VA^{\#}$ — ядерный правый идеал алгебры $A$.

13 (Слейтер). Пусть $A$ полупервична и чисто альтернативна. Тогда и алгебра $I$ полупервична и чисто альтернативна.

## § 2. Невырожденные альтернативные алгебры

Элемент $a$ альтернативной алгебры $A$ называется *абсолютным делителем нуля*, если $aAa = (0)$. Алгебра $A$ называется *невырожденной* (или *сильно полупервичной*), если $A$ не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля. Как легко видеть, ассоциативная алгебра $A$ является невырожденной тогда и только тогда, когда $A$ полупервична. В случае альтернативных алгебр ситуация усложняется. Ясно, что всякая невырожденная алгебра является полупервичной. Однако вопрос о том, может ли полупервичная альтернативная алгебра содержать ненулевые абсолютные делители нуля, до сих пор остается не выясненным до конца. В этом параграфе мы покажем, что полупервичные альтернативные алгебры характеристики $\neq 3$ являются невырожденными, и изучим некоторые свойства невырожденных альтернативных алгебр.

Теорема 5 (Клейнфелд). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра, причем $3A = A$. Тогда $A$ невырождена.*

Доказательство. Ввиду следствия теоремы 8.6, нам вновь достаточно доказать теорему в случае, когда алгебра $A$ первична. Предположим, что $A$ не является невырожденной, т. е. $A$ содержит ненулевой абсолютный делитель нуля $a$. Рассмотрев, если необходимо, вместо $a$ элемент $a^2$, мы можем считать, что $aA^{\#}a = (0)$. Обозначим через $T$ множество

$$T = \{t \in A \mid a(A^{\#}t) = (aA^{\#})t = t(A^{\#}a) = (0)\}.$$

Заметим, что $T \neq (0)$, так как $a \in T$. Зафиксируем некоторый элемент $t \in T$ и рассмотрим Ф-модуль $S = S(t)$, порожденный множеством $(aA, t, A)$. Пусть $x, y, z$ — произвольные элементы алгебры $A$. Так как $(a, A, t) = (0)$, то мы имеем $(ax, t, x) = x(a, t, x) = 0$. Линеаризовав это соотношение по $x$, получим

$$(ax, t, y) = -(ay, t, x). \tag{9}$$

Далее запись вида $u \equiv v$ будет означать, что $u - v \in S$. Мы имеем

$$f(ax, t, y, z) = ([ax, t], y, z) + ([y, z], ax, t) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$(ax, t, y) z = (ax, t, zy) - y(ax, t, z) - f(z, y, ax, t) \equiv \equiv -y(ax, t, z),$$

т. е.

$$(ax, t, y) z \equiv -y(ax, t, z). \tag{10}$$

Теперь в силу (10) и (9) получаем

$$(ax, t, y) z \equiv -y(ax, t, z) = y(az, t, x) \equiv \equiv -(az, t, y) x = (ay, t, z) x \equiv \equiv -z(ay, t, x) = z(ax, t, y),$$

т. е. $[(ax, t, y), z] \in S$. Мы доказали, что

$$[S, A] \subseteq S. \tag{11}$$

Обозначим через $U$ подмодуль Ф-модуля $A$, порожденный множеством $SA^{\#}$. По тождеству (7.7) для любых $s \in S$, $x, y \in A$ имеем

$$3(x, y, s) = [xy, s] - x[y, s] - [x, s] y = = [xy, s] - [y, s] x - [x, [y, s]] - [x, s] y,$$

откуда, ввиду (11) и условия $3A = A$, заключаем, что

$$(A, A, S) \subseteq U. \tag{12}$$

Теперь по (12) и (11) для любых $s \in S$, $a \in A^{\#}$, $b \in A$ имеем

$$(sa) b = s(ab) + (s, a, b) \in U,$$

$$b(sa) = (bs) a - (b, s, a) = (sb) a + [b, s] a - - (b, s, a) \in U,$$

т. е. $U$ — идеал алгебры $A$. Далее, в силу линеаризованного тождества Муфанг имеем

$$(ax, t, y) = -(yx, t, a) + (x, t, y) a + (x, t, a) y = = (x, t, y) a,$$

откуда по правому тождеству Муфанг для любых $x, y \in A$, $z \in A^{\#}$

$$[(ax, t, y) z] a = ([(x, t, y) a] z) a = (x, t, y)(aza) = 0,$$

т. е. $a \in \mathrm{Ann}_r(U)$. Так как алгебра $A$ первична и $a \neq 0$, то мы получаем, что $U = (0)$. Аналогичным образом, рассмотрев Ф-подмодуль $S' = S'(t)$, порожденный множеством $(Aa, t, A)$, и идеал $U' = A^{\#}S'$, мы получим, что $a \in \mathrm{Ann}_l(U')$, откуда $U' = (0)$. Мы доказали, в частности, что $S(t) = S'(t) = (0)$ для любого $t \in T$, т. е.

$$(aA, T, A) = (Aa, T, A) = (0). \tag{13}$$

Заметим теперь, что для любых $x, y \in A$, $t \in T$

$$f(x, y, a, t) = (xy, a, t) - y(x, a, t) - (y, a, t) x = 0,$$

откуда, ввиду (13),

$$0 = (ax, y, t) = f(a, x, y, t) + x(a, y, t) + (x, y, t) a = \\ = (x, y, t) a = -f(a, t, x, y) + (at, x, y) - \\ - t(a, x, y) = -t(a, x, y)$$

и, аналогично,

$$0 = (xa, y, t) = -(x, y, a) t = \\ = f(t, x, y, a) - (tx, y, a) + x(t, y, a) = -(tx, y, a).$$

Следовательно,

$$(TA, A, a) = T(a, A, A) = (0). \tag{14}$$

Покажем теперь, что $T$ — идеал алгебры $A$. Для любых $x \in A$, $y \in A^{\#}$, $t \in T$ имеем в силу (13)

$$(ay)(tx) = -(ay, t, x) + ((ay) t) x = 0,$$

откуда согласно (14)

$$a(y(tx)) = (ay)(tx) - (a, y, tx) = 0.$$

Наконец, по (13) и (14) имеем

$$(tx)(ya) = t[x(ya)] + (t, x, ya) = t[x(ya)] = \\ = t[(xy) a] - t(x, y, a) = 0.$$

Полученные соотношения показывают, что $T$ — правый идеал алгебры $A$. Аналогично доказывается, что $T$ является левым идеалом в $A$. Так как $a \in T$ и $a \in \mathrm{Ann}(T)$, то

в силу первичности алгебры $A$ мы получаем, что $a = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Чтобы перейти от алгебр с ограничением $3A = A$ к случаю алгебр без элементов порядка 3 в аддитивной группе, нам понадобятся некоторые дополнительные рассмотрения.

Пусть $R$ — некоторое кольцо и $R^{\#} = R + \mathbf{Z}\cdot 1$ — кольцо, полученное формальным присоединением единицы к $R$ (здесь $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел).

Предложение 1. *Кольцо $R$ является полупервичным* (*невырожденным*) *тогда и только тогда, когда кольцо $R^{\#}$ полупервично* (*соответственно невырождено*).

Доказательство. Так как всякий идеал кольца $R$ является идеалом в $R^{\#}$, то ясно, что из полупервичности $R^{\#}$ следует полупервичность $R$. Ясно также, что из невырожденности кольца $R^{\#}$ следует невырожденность $R$. Для доказательства обратных утверждений достаточно заметить, что всякий нильпотентный элемент кольца $R^{\#}$ лежит в $R$. Пусть $r = n\cdot 1 + r' \in R^{\#}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $r' \in R$, и пусть $r^2 = 0$. Тогда мы имеем $0 = n^2\cdot 1 + r''$, где $r'' \in R$, откуда $n = 0$ и $r = r' \in R$. Предложение доказано.

Предположим теперь, что центр $Z = Z(R)$ кольца $R$ отличен от нуля. Непустое подмножество $S$ центра $Z$ называется *мультипликативным подмножеством*, если $S$ содержит вместе с любыми двумя элементами $x$, $y$ их произведение $xy$. Как и в случае ассоциативно-коммутативных колец (см., например, Ленг С., Алгебра, стр. 85), мы можем построить *кольцо частных* кольца $R$ по $S$.

Рассмотрим пары $(r, s)$, где $r \in R$ и $s \in S$. Определим отношение $(r, s) \sim (r', s')$ между такими парами следующим условием: существует элемент $s_1 \in S$, для которого $s_1(s'r - sr') = 0$. Тривиально проверяется, что это будет отношением эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий пару $(r, s)$, обозначим через $s^{-1}r$, а множество классов эквивалентности — через $S^{-1}R$. Сложение и умножение в множестве $S^{-1}R$ вводятся следующими условиями:

$$s^{-1}r + s_1^{-1}r_1 = (ss_1)^{-1}(s_1r + sr_1),$$

$$(s^{-1}r)(s_1^{-1}r_1) = (ss_1)^{-1}(rr_1).$$

Тривиально проверяется, что сложение и умножение определены корректно и что относительно этих операций множество $S^{-1}R$ является кольцом.

Заметим, что наряду с кольцом $S^{-1}R$ мы можем рассматривать и обычное ассоциативно-коммутативное кольцо частных $S^{-1}Z$ центра $Z$ по $S$.

Пусть $s_0$ — некоторый фиксированный элемент множества $S$. Как легко видеть, элемент $s_0^{-1}s_0$ является единицей кольца $S^{-1}R$; при этом $s_0^{-1}s_0 = s^{-1}s$ для любого $s \in S$. Кроме того, $s^{-1}r = (ss_1)^{-1}(rs_1)$ для любых $r \in R$ и $s$, $s_1 \in S$, т. е. мы можем «сокращать» наши дроби на элементы из $S$. Рассмотрим теперь отображение $\varphi_0$: $R \to S^{-1}R$, при котором $\varphi_0(r) = s_0^{-1}(rs_0)$. Сразу видно, что $\varphi_0$ — гомоморфизм колец. Кроме того, всякий элемент из $\varphi_0(S)$ обратим в $S^{-1}Z$ (обратным к $s_0^{-1}(ss_0)$ служит $(ss_0)^{-1}s_0$). Если $s_1$ — другой элемент из $S$, то, как легко видеть, отображение $\varphi_1$: $R \to S^{-1}R$, при котором $\varphi_1(r) = s_1^{-1}(rs_1)$, совпадает с отображением $\varphi_0$. Таким образом, отображение $\varphi_0$ не зависит от выбора элемента $s_0$, и мы будем обозначать его через $\varphi_S$.

Предложение 2. *Пусть $S$ — мультипликативное подмножество центра $Z$ кольца $R$, причем $S$ не содержит делителей нуля кольца $R$. Тогда*

1) *отображение $\varphi_S$: $R \to S^{-1}R$ является вложением кольца $R$ в $S^{-1}R$;*

2) $Z(S^{-1}R) = S^{-1}Z$;

3) *кольцо $S^{-1}R$ полупервично (невырождено, первично) тогда и только тогда, когда кольцо $R$ полупервично (соответственно невырождено, первично);*

4) *если кольцо $R$ является алгеброй над $\Phi$, то и кольцо $S^{-1}R$ будет алгеброй над $\Phi$ относительно композиции $\alpha \cdot (s^{-1}r) = s^{-1}(\alpha r)$, где $\alpha \in \Phi$, $s \in S$, $r \in R$; при этом $\Phi$-алгебра $S^{-1}R$ удовлетворяет однородному тождеству $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$ тогда и только тогда, когда $\Phi$-алгебра $R$ удовлетворяет этому тождеству;*

5) *если $S \cap I \neq \varnothing$ для некоторого идеала $I$ кольца $R$, то множество $S_1 = S \cap I$ является мультипликативным подмножеством центра кольца $I$; при этом кольца частных $S_1^{-1}I$ и $S^{-1}R$ совпадают.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что отображение $\varphi_S$ является кольцевым гомоморфизмом. Если $\varphi_S(r) = s_0^{-1}(rs_0) = 0$ для некоторого $r \in R$, то по опреде-

лению это означает, что существует $s \in S$, для которого $s(rs_0) = (ss_0)r = 0$ и, следовательно, $r = 0$. Тем самым 1) доказано, и мы будем далее отождествлять кольцо $R$ с его образом $\varphi_S(R)$ в кольце $S^{-1}R$.

Пусть теперь $z \in Z$, $r$, $t \in R$, $s$, $s_1$, $s_2 \in S$. Мы имеем

$$(s^{-1}z,\ s_1^{-1}r,\ s_2^{-1}t) = (ss_1s_2)^{-1}(z,\ r,\ t) = 0,$$

$$[s^{-1}z,\ s_1^{-1}r] = (ss_1)^{-1}[z,\ r] = 0,$$

откуда следует, что $S^{-1}Z \subseteq Z(S^{-1}R)$. Обратно, пусть $s^{-1}r \in Z(S^{-1}R)$. Тогда для любых $x$, $y \in R$ имеем

$$0 = (s^{-1}r,\ x,\ y) = s^{-1}(r,\ x,\ y) = (s^{-1}(r,\ x,\ y))\,s = (r,\ x,\ y),$$

т. е. $r \in N(R)$. Аналогично получаем, что $[r,\ x] = 0$ для любого $x \in R$, т. е. $r \in Z$ и $Z(S^{-1}R) \subseteq S^{-1}Z$. Тем самым доказано утверждение 2).

Заметим теперь, что для любого идеала $I$ кольца $R$ множество $S^{-1}I = \{s^{-1}i \mid s \in S,\ i \in I\}$ является идеалом кольца $S^{-1}R$; при этом $I \cdot J = (0)$ для каких-либо идеалов $I$, $J$ кольца $R$ тогда и только тогда, когда $(S^{-1}I)\cdot(S^{-1}J) = (0)$. Отсюда следует, что полупервичность или первичность кольца $S^{-1}R$ влекут соответственно полупервичность или первичность кольца $R$. Для доказательства обратных утверждений достаточно, очевидно, заметить, что $I \cap R \neq (0)$ для любого ненулевого идеала $I$ кольца $S^{-1}R$. Пусть $0 \neq i \in I$, $i = s^{-1}r$, где $s \in S$, $r \in R$. Тогда $r \neq 0$, $r = si \in I \cap R$, откуда $I \cap R \neq (0)$. Пусть, наконец, $a$ — абсолютный делитель нуля кольца $R$, т. е. $aRa = (0)$. Тогда для любых $r \in R$, $s \in S$ мы имеем $a(s^{-1}r)a = s^{-1}(ara) = 0$, т. е. $a$ является абсолютным делителем нуля кольца $S^{-1}R$. Обратно, если элемент $x = s^{-1}r$ является ненулевым абсолютным делителем нуля кольца $S^{-1}R$, то элемент $sx = r$ будет ненулевым абсолютным делителем нуля в $R$. Отсюда следует, что кольцо $S^{-1}R$ является невырожденным тогда и только тогда, когда $R$ невырождено. Утверждение 3) доказано.

Ясно, что если $R$ является Ф-алгеброй, то и кольцо $S^{-1}R$ будет Ф-алгеброй относительно композиции, указанной в предложении. Если Ф-алгебра $S^{-1}R$ удовлетворяет какому-то тождеству, то и Ф-алгебра $R$ как подалгебра алгебры $S^{-1}R$ должна удовлетворять этому тождеству. Пусть, наоборот, алгебра $R$ удовлетворяет однородному тождеству $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$, и пусть все одночлены,

входящие в $f$, имеют тип $[k_1, \ldots, k_n]$. Тогда для любых элементов $r_1, \ldots, r_n \in R$, $s_1, \ldots, s_n \in S$ мы имеем $f(s_1^{-1}r_1, \ldots, s_n^{-1}r_n) = (s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n})^{-1} f(r_1, \ldots, r_n) = 0$, т. е. алгебра $S^{-1}R$ также удовлетворяет тождеству $f$. Тем самым доказано и 4).

Пусть, наконец, $I \cap S = S_1 \neq \varnothing$ для некоторого идеала $I$ кольца $R$. Ясно, что $S_1$ является мультипликативным подмножеством центра кольца $I$ и что справедливо включение $S_1^{-1}I \subseteq S^{-1}R$. Зафиксируем теперь некоторый элемент $s_0 \in S_1$. Всякий элемент вида $s^{-1}r$ из кольца $S^{-1}R$ можно представить в виде $s^{-1}r = (ss_0)^{-1}(rs_0)$. Так как $ss_0 \in I \cap S$, $rs_0 \in I$, то тем самым доказано, что $S^{-1}R \subseteq S_1^{-1}I$. Предложение доказано.

Из 4) следует, что если кольцо $R$ принадлежит однородному многообразию $\mathfrak{M}$, то этому многообразию принадлежит и кольцо $S^{-1}R$. В частности, если $R$ альтернативно, то и $S^{-1}R$ альтернативно.

Теперь мы в состоянии доказать аналог теоремы 5 для альтернативных алгебр без элементов порядка 3 в аддитивной группе.

Теорема 5′. *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра без элементов порядка 3 в аддитивной группе. Тогда $A$ невырождена.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $A$ как кольцо. Легко видеть, что кольцо $A$ полупервично. По предложению 1 тогда и кольцо $A^{\#} = A + \mathbf{Z}\cdot 1$ полупервично; при этом $Z(A^{\#}) \neq (0)$. Рассмотрим в центре $Z(A^{\#})$ кольца $A^{\#}$ подмножество $S = \{3^k \cdot 1 \mid k = 1, 2, \ldots\}$. Ясно, что $S$ — мультипликативное подмножество центра $Z(A^{\#})$; кроме того, в силу условия теоремы $S$ не содержит делителей нуля кольца $A^{\#}$. По предложению 2 кольцо $A^{\#}$ изоморфно вкладывается в кольцо частных $S^{-1}A^{\#}$, которое также является полупервичным. Далее, легко видеть, что $3(S^{-1}A^{\#}) = S^{-1}A^{\#}$, поэтому по теореме 5 кольцо $S^{-1}A^{\#}$ невырождено. Ввиду предложений 2 и 1, кольцо $A$ также является невырожденным. Так как понятие невырожденности никак не зависит от кольца операторов, то тем самым теорема доказана.

Замечание. Отметим без доказательства, что всякая конечнопорожденная полупервичная алгебра является невырожденной. Это вытекает из следующего результата, принадлежащего Шестакову [271].

*Для любого натурального числа $m$ существует такое натуральное число $f(m)$, что во всякой альтернативной алгебре от $m$ порождающих любой абсолютный делитель нуля порождает идеал, нильпотентный индекса не больше $f(m)$.*

Перейдем теперь к изучению свойств невырожденных альтернативных алгебр.

Теорема 6 (Клейнфелд). *Пусть $A$ — невырожденная альтернативная алгебра. Тогда либо $A = Z(A)$, либо $N_{\mathrm{Alt}}[A] \neq (0)$.*

Доказательство. Напомним, что через $N_{\mathrm{Alt}}[A]$ мы обозначили подалгебру алгебры $A$, состоящую из всевозможных специализаций в алгебре $A$ элементов ассоциативного центра $N_{\mathrm{Alt}}$ свободной альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ (см. § 7.2). В силу тождеств Клейнфелда в алгебре $\mathrm{Alt}[X]$ верны соотношения

$$([x_1, x_2]^4, x_3, x_4) = ([x_1, x_2]^2, [x_1, x_2] x_3, x_4) = 0,$$

откуда следует, что $[x_1, x_2]^4 \in N_{\mathrm{Alt}}$, и по лемме 7.3 $[[x_1, x_2]^2, [x_1, x_2] x_3] \in N_{\mathrm{Alt}}$. Предположим, что $N_{\mathrm{Alt}}[A] = (0)$. Тогда для любых $x, y, z \in A$ и $v = [x, y]$ мы имеем $v^4 = [v^2, vz] = 0$. Поэтому $v[v^2, z] = [v^2, vz] = 0$ и $v^2 z v^2 = v^2 [z, v^2] = 0$, откуда, ввиду невырожденности алгебры $A$,

$$v^2 = [x, y]^2 = 0. \tag{15}$$

Линеаризуя это соотношение по $y$, получаем

$$[x, y] \circ [x, z] = 0. \tag{16}$$

Теперь в силу (15) и (16) имеем

$$vxv = vxv + xv^2 = [x, y] x [x, y] + x [x, y] [x, y] = \\ = [x, y] \circ [x, xy] = 0,$$

откуда

$$v[v, x] = [v, x] v = 0. \tag{17}$$

Далее, по тождеству (7.7) имеем

$$z[v, x] = [zv, x] - [z, x] v - 3(z, v, x).$$

Проантикоммутировав обе части этого равенства с элементом $[v, x]$, получим в силу (15), (16) и (7.15)

$$[v, x] z [v, x] = [zv, x] \circ [v, x] - ([z, x] v) \circ [v, x] - \\ - 3(z, v, x) \circ [v, x] = -([z, x] v) \circ [v, x],$$

и далее в силу (16), (17) и линеаризованных тождеств альтернативности

$$[v, x]z[v, x] = -([z, x]v)\circ[v, x] = \\ = (v[z, x])[v, x] - [v, x]([z, x]v) = \\ = -(v[v, x])[z, x] + v([z, x]\circ[v, x]) + \\ + [z, x]([v, x]v) - ([v, x]\circ[z, x])v = 0.$$

Ввиду невырожденности алгебры $A$, отсюда следует, что

$$[v, x] = [[x, y], x] = 0. \qquad (18)$$

В частности, $[[v, z], v] = 0$, поэтому по (15)

$$0 = [v^2, z] = v\circ[v, z] = 2vzv,$$

откуда вновь в силу невырожденности $A$ получаем

$$2v = 2[x, y] = 0. \qquad (19)$$

Теперь имеем по (19) и (18)

$$[x^2, y] = x\circ[x, y] = [[x, y], x] + 2x[x, y] = 0.$$

Линеаризуя это соотношение по $x$, получаем

$$[x\circ y, z] = 0,$$

откуда, ввиду (19),

$$[v, z] = [[x, y], z] = [x\circ y, z] - 2[yx, z] = 0,$$

и далее по (15)

$$vzv = v^2z = 0.$$

Следовательно, $v = 0$ и алгебра $A$ коммутативна. По лемме 7.8 теперь имеем $(x, y, z)^2 = 0$ и далее $(x, y, z)\times t(x, y, z) = (x, y, z)^2 t = 0$, откуда $(x, y, z) = 0$. Таким образом, алгебра $A$ ассоциативна и коммутативна, т. е. $Z(A) = A$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $A$ — невырожденная альтернативная алгебра. Тогда, если $A \neq (0)$, то и $N(A) \neq (0)$.*

Действительно, мы имеем включения

$$N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq N(A), \qquad Z(A) \subseteq N(A),$$

из которых все следует.

Лемма 7. *Всякий идеал невырожденной альтернативной алгебры сам является невырожденной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A$ — невырожденная альтернативная алгебра и $I$ — идеал алгебры $A$. Предположим, что существует $i \in I$ такой, что $iIi = (0)$. Тогда для любых $x, y \in A$ в силу тождеств Муфанг мы получаем

$$(ixi)\, y\, (ixi) = [i\, (x \cdot iy)]\, (ixi) = [i\, (x \cdot iy)]\, (ix \cdot i) = \\ = i\, [(x \cdot iy)\, (ix)]\, i = 0.$$

Следовательно, $(ixi)\, A\, (ixi) = (0)$, откуда в силу невырожденности алгебры $A$ следует $ixi = 0$. Ввиду произвольности элемента $x$, это означает, что $iAi = (0)$, откуда окончательно имеем $i = 0$. Таким образом, алгебра $I$ не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля. Лемма доказана.

Теорема 7 (Слейтер). *Пусть $A$ — невырожденная альтернативная алгебра. Если $A$ неассоциативна, то $Z(A) \neq (0)$.*

Доказательство. Рассмотрим ассоциаторный идеал $D = D(A)$ алгебры $A$. Так как $A$ неассоциативна, то $D \neq (0)$. По лемме 7 идеал $D$ является невырожденной алгеброй, поэтому по следствию теоремы 6 $N(D) \neq (0)$. Далее, ввиду полупервичности $D$, по теореме 1 мы имеем $N(D) = D \cap N(A)$. Выберем $0 \neq n \in D \cap N(A)$. Тогда для любого $a \in A$ мы имеем по теореме 8.11

$$[n, a] \in ZN(A) \cap D \subseteq U \cap D,$$

где $U = U(A)$ — ассоциативное ядро алгебры $A$. В силу предложения 8.10 мы имеем $(U \cap D)^2 = (0)$, откуда, ввиду полупервичности алгебры $A$, следует, что $U \cap D = (0)$. Тем самым доказано, что $[n, a] = 0$ для всех $a \in A$, т. е. $0 \neq n \in Z(A)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая невырожденная альтернативная ниль-алгебра ассоциативна.*

Действительно, если $A$ неассоциативна, то по теореме 7 $Z(A) \neq (0)$. С другой стороны, легко видеть, что никакая полупервичная алгебра не может содержать в своем центре ненулевых нильпотентных элементов.

Следствие 2 (Клейнфелд). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная ниль-алгебра без элементов порядка 3 в аддитивной группе. Тогда $A$ ассоциативна.*

В заключение этого параграфа мы применим полученные результаты к произвольным полупервичным альтернативным алгебрам.

Пусть $A$ — некоторая алгебра и $m$ — натуральное число. Положим $A_m = \{x \in A \mid mx = 0\}$ и через $\overline{A} = \overline{A}(m)$ обозначим фактор-алгебру $A/A_m$.

Лемма 8. *Если алгебра $A$ полупервична, то алгебра $\overline{A}$ полупервична и не содержит элементов порядка $m$ в аддитивной группе.*

Доказательство. Пусть $\overline{I}$ — идеал алгебры $\overline{A}$ и $\overline{I}^2 = (\overline{0})$. Рассмотрим полный прообраз $I$ идеала $\overline{I}$ в алгебре $A$. Тогда $I$ — идеал в $A$ и $I^2 \subseteq A_m$. Это значит, что $mI^2 = (0)$, откуда $(mI)^2 = (0)$, и, ввиду полупервичности алгебры $A$, имеем $mI = (0)$. Следовательно, $I \subseteq A_m$ и $\overline{I} = (\overline{0})$, так что алгебра $\overline{A}$ полупервична.

Заметим, что $(mA_{m^2})^2 = (0)$. Ввиду полупервичности $A$, отсюда следует, что $mA_{m^2} = (0)$ и $A_{m^2} \subseteq A_m$. Если теперь $\overline{x} \in (\overline{A})_m$, то $m\overline{x} = \overline{0}$, и для любого прообраза $x$ элемента $\overline{x}$ в алгебре $A$ мы имеем $mx \in A_m$, $m^2x = 0$, откуда $x \in A_{m^2} \subseteq A_m$ и $\overline{x} = \overline{0}$. Тем самым доказано, что $(\overline{A})_m = (\overline{0})$, т. е. в $\overline{A}$ нет элементов порядка $m$.

Лемма доказана.

Теорема 8 (Слейтер). *Пусть $A$ — полупервичная альтернативная алгебра. Тогда*

1) $3a = 0$ *для любого абсолютного делителя нуля $a$ алгебры $A$;*

2) *если* $3A \neq (0)$, *то* $N(A) \neq (0)$;

3) *если* $3A \nsubseteq N(A)$, *то* $Z(A) \neq (0)$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-алгебру $\overline{A} = A/A_3$. По лемме 8 и теореме 5' алгебра $\overline{A}$ невырождена, поэтому всякий абсолютный делитель нуля алгебры $A$ лежит в $A_3$.

Тем самым доказано 1).

Далее, если $3A \neq (0)$, то $\overline{A} \neq (\overline{0})$. По следствию теоремы 6 мы имеем $N(\overline{A}) \neq (\overline{0})$. Выберем $\overline{0} \neq \overline{n} \in N(\overline{A})$, и пусть $n$ — некоторый прообраз элемента $\overline{n}$ в $A$. Пусть, далее, $r, s \in A$, $t = (n, r, s)$. Тогда $\overline{t} = (\overline{n}, \overline{r}, \overline{s}) = 0$ в алгебре $\overline{A}$. Значит, $t \in A_3$ и $(3n, r, s) = 0$. Так как элементы $r, s$ были произвольными, то $3n \in N(A)$. Если $3n = 0$, то $n \in A_3$ и $\overline{n} = 0$. Следовательно, $0 \neq 3n \in N(A)$ и $N(A) \neq (0)$, что доказывает 2).

Наконец, если $3A \nsubseteq N(A)$, то алгебра $\bar{A}$ неассоциативна. По теореме 7 мы имеем $Z(\bar{A}) \neq (0)$, откуда, как и в случае 2), получаем $Z(A) \neq (0)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Тогда $3a \in \mathscr{B}(A)$ для любого абсолютного делителя нуля $a$ алгебры $A$.*

**Упражнения**

**1.** Пусть $R$ — некоторое кольцо с ненулевым центром $Z$, $S$ — мультипликативное подмножество центра $Z$, не содержащее делителей нуля кольца $R$. Для идеала $I$ кольца $R$ положим $S^{-1}I = \{s^{-1}i \in S^{-1}R \mid s \in S, i \in I\}$. Доказать, что отображение $\psi_S\colon I \to S^{-1}I$ отображает множество всех идеалов кольца $R$ на множество всех идеалов кольца частных $S^{-1}R$. При этом для любых идеалов $I$, $J$ кольца $R$

$$S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J,$$
$$S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J),$$
$$S^{-1}(I \cap J) = (S^{-1}I) \cap (S^{-1}J).$$

**2.** Доказать, что имеет место следующий изоморфизм:

$$S^{-1}R \cong S^{-1}Z \otimes_Z R.$$

**3.** Пусть $R$ — первичное кольцо. Доказать, что кольцо $R^{\#}$ первично тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbf{Z}$ в $R$ нет таких элементов $a$, что $R_a = L_a = nE$.

**4.** Доказать, что в произвольной альтернативной алгебре $A$ подмодуль $\mathscr{M}_1(A)$, порожденный всеми абсолютными делителями нуля, является идеалом.

**5.** По аналогии с бэровской цепочкой идеалов $\{\mathscr{B}_\alpha(A)\}$ определим в произвольной альтернативной алгебре $A$ цепочку идеалов $(0) \subseteq \mathscr{M}_1(A) \subseteq \mathscr{M}_2(A) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{M}_\alpha(A) \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{M}(A)$, где $\mathscr{M}_1(A)$ — идеал алгебры $A$, введенный в задаче 4. Доказать, что отображение $A \to \mathscr{M}(A)$ является наследственным радикалом в классе всех альтернативных алгебр; при этом полупростой класс радикала $\mathscr{M}$ есть в точности класс всех невырожденных альтернативных алгебр.

**6.** Доказать, что во всякой альтернативной алгебре $A$

$$\mathscr{M}(A) \supseteq \mathscr{B}(A) \supseteq 3\mathscr{M}(A).$$

## § 3. Первичные альтернативные алгебры

Пусть $R$ — некоторое кольцо такое, что $Z = Z(R) \neq (0)$, и $Z$ не содержит делителей нуля кольца $R$. Тогда множество $Z^* = Z \setminus \{0\}$ является мультипликативным подмножеством центра $Z$, и мы можем рассмотреть кольца

частных $Z_1 = (Z^*)^{-1} Z$ и $R_1 = (Z^*)^{-1} R$. Ясно, что в данном случае кольцо $Z_1$ будет обычным полем частных ассоциативно-коммутативного кольца $Z$ без делителей нуля. По предложению 2 мы имеем $Z(R_1) = Z_1$, так что кольцо $R_1$ можно естественным образом рассматривать как центральную алгебру над полем $Z_1$. Кроме того, кольцо $R$ изоморфно вкладывается в алгебру $R_1$.

Введем теперь следующее определение. Альтернативное кольцо $K$ с ненулевым центром $Z$, не содержащим делителей нуля кольца $K$, будем называть *кольцом Кэли — Диксона*, если кольцо частных $K_1 = (Z^*)^{-1} K$ является алгеброй Кэли — Диксона над полем частных $Z_1$ центра $Z$.

Предложение 3. *Всякое кольцо Кэли — Диксона является первичным невырожденным чисто альтернативным кольцом. Любой ненулевой идеал кольца Кэли — Диксона сам является кольцом Кэли — Диксона. Обратно, если некоторый идеал $I$ первичного альтернативного кольца $R$ является кольцом Кэли — Диксона, то и само кольцо $R$ есть кольцо Кэли — Диксона.*

Доказательство. Пусть $K$ — некоторое кольцо Кэли — Диксона и $\boldsymbol{C} = K_1$ — соответствующая алгебра Кэли — Диксона. Так как всякая алгебра Кэли — Диксона является простым кольцом (в частности, первичным), то, ввиду предложения 2, кольцо $K$ является первичным. Далее, ввиду неассоциативности алгебры $\boldsymbol{C}$ кольцо $K$ также неассоциативно, поэтому по следствию предложения 8.10 $K$ чисто альтернативно. Для доказательства невырожденности кольца $K$ достаточно установить в силу предложения 2, что алгебра Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}$ невырождена. Пусть $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq 0$, $a\boldsymbol{C}a = (0)$. Тогда, в частности, $a^2 = 0$, откуда $t(a) = n(a) = 0$, где $t(x)$ и $n(x)$ — соответственно след и норма элемента $x$ в алгебре Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}$ (см. гл. 2). Теперь для любого $x \in \boldsymbol{C}$ мы имеем в силу (2.21)

$$axa = (a \circ x)\, a - xa^2 =$$
$$= t(a)\, xa + t(x)\, a^2 - t(x)\, t(a)\, a + t(xa)\, a =$$
$$= t(xa)\, a = 0.$$

Заметим, что в силу (2.8)

$$t(xa) = f(xa, 1) = -f(x, a) + f(x, 1)\, f(a, 1) =$$
$$= -f(x, a).$$

Ввиду невырожденности формы $f$ на $\boldsymbol{C}$, найдется элемент $x \in \boldsymbol{C}$, для которого $t(xa) = -f(x, a) \neq 0$. Но тогда $a = 0$. Полученное противоречие доказывает невырожденность алгебры $\boldsymbol{C}$ и кольца $K$.

Пусть теперь $(0) \neq I$ — идеал кольца Кэли — Диксона $K$. По следствию 1 теоремы 4 и лемме 7 кольцо $I$ первично и невырождено. Если $I$ ассоциативно, то по теореме 1 имеем $I = N(I) \subseteq N(K)$, откуда $I \subseteq U(K)$ и $U(K) \neq (0)$, что противоречит чистой альтернативности кольца $K$. Значит, кольцо $I$ неассоциативно. Тогда по теоремам 7 и 3 мы имеем $(0) \neq Z(I) = I \cap Z(K)$, откуда в силу утверждения 5) предложения 2 следует, что $\boldsymbol{C} = S^{-1}I$, где $S = Z(I) \setminus \{0\}$, т. е. $I$ есть кольцо Кэли — Диксона.

Пусть, наконец, $R$ — некоторое первичное альтернативное кольцо и $I$ — идеал кольца $R$, являющийся кольцом Кэли — Диксона. Тогда $Z_0 = Z(I) \neq (0)$, откуда и $Z = Z(R) \neq (0)$. Ввиду первичности кольца $R$, множество $Z^* = Z \setminus \{0\}$ не содержит делителей нуля кольца $R$. Следовательно, мы можем рассмотреть кольцо частных $R_1 = (Z^*)^{-1} R$. Так как $I \cap Z^* = Z_0^* = Z(I) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, то вновь по утверждению 5) предложения 2 мы получаем, что $(Z_0^*)^{-1} I = (Z^*)^{-1} R$. Так как по условию кольцо $(Z_0^*)^{-1} I$ является алгеброй Кэли — Диксона, то тем самым доказано, что $R$ есть кольцо Кэли — Диксона.

Предложение доказано.

С л е д с т в и е. *Всякое кольцо Кэли — Диксона ниль-полупросто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{N}(K)$ — верхний ниль-радикал кольца Кэли — Диксона $K$. Если $\mathcal{N}(K) \neq (0)$, то $\mathcal{N}(K)$ есть кольцо Кэли — Диксона. С другой стороны, по следствию 1 теоремы 7 всякое невырожденное альтернативное ниль-кольцо ассоциативно. Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{N}(K) = (0)$, т. е. в $K$ нет ненулевых ниль-идеалов. Следствие доказано.

Покажем теперь, что, кроме колец Кэли — Диксона, других первичных невырожденных альтернативных неассоциативных колец не существует.

Т е о р е м а 9 (С л е й т е р). *Пусть $A$ — первичная невырожденная неассоциативная альтернативная алгебра. Тогда $A$ является кольцом Кэли — Диксона.*

Доказательство. По теореме 7 мы имеем $Z = Z(A) \neq (0)$. Кроме того, из первичности $A$ легко следует, что $Z$ не содержит ненулевых делителей нуля кольца $A$. Следовательно, мы можем образовать соответствующее кольцо частных $A_1$, которое является алгеброй над полем частных $Z_1$ центра $Z$. По предложению 2 алгебра $A_1$ альтернативна, первична и $Z(A_1) = Z_1$. Кроме того, кольцо $A$ изоморфно вкладывается в кольцо $A_1$, поэтому алгебра $A_1$ неассоциативна. Ввиду теоремы Клейнфелда, для доказательства нашей теоремы достаточно теперь показать, что $A_1$ — простая алгебра.

Заметим, что так как $A_1$ неассоциативна и первична, то по следствию предложения 8.10 $A_1$ является чисто альтернативной алгеброй, т. е. $U(A_1) = (0)$. Пусть теперь $I$ — произвольный ненулевой идеал алгебры $A_1$. По следствию 1 теоремы 4 и лемме 7 алгебра $I$ первична и невырождена. Если $I$ ассоциативна, то по теореме 1 имеем $I = N(I) \subseteq N(A_1)$, что противоречит чистой альтернативности алгебры $A_1$. Значит, алгебра $I$ неассоциативна. Тогда по теоремам 7 и 3 мы имеем $(0) \neq Z(I) = I \cap Z(A_1) = I \cap Z_1$. Пусть $0 \neq \alpha \in I \cap Z_1$. Тогда мы имеем $1 = \alpha \cdot \alpha^{-1} \in I$, откуда $I = A_1$. Следовательно, алгебра $A_1$ проста.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $A$ — первичная альтернативная неассоциативная алгебра, причем $3A \neq (0)$. Тогда $A$ является кольцом Кэли — Диксона.*

Доказательство. Ввиду теоремы 5′, достаточно доказать, что в аддитивной группе алгебры $A$ нет элементов порядка 3. Пусть

$$A_3 = \{x \in A \mid 3x = 0\},$$

тогда $A_3$ — идеал алгебры $A$, при этом $A_3 \cdot (3A) = (0)$. Так как $3A$ — также идеал алгебры $A$ и по условию $3A \neq (0)$, то мы получаем $A_3 = (0)$. Следствие доказано.

Назовем первичную альтернативную алгебру *исключительной*, если она неассоциативна и не является кольцом Кэли — Диксона. Вопрос о том, существуют ли исключительные первичные альтернативные алгебры, остается открытым до сих пор. Из доказанного следует, что всякая такая алгебра должна содержать ненулевые абсолютные

делители нуля и иметь характеристику 3. Найдем еще ряд свойств таких алгебр.

Теорема 10 (Слейтер). *Пусть существует исключительная первичная альтернативная алгебра. Тогда существует исключительная первичная альтернативная алгебра $S$ со следующими свойствами:*

1) $3S = (0)$;
2) *в $S$ есть ненулевые абсолютные делители нуля;*
3) $N(S) = (0)$;
4) *$S$ является альтернативной* PI-*алгеброй;*
5) *$S$ локально нильпотентна;*
6) *$S$ не содержит минимальных односторонних идеалов.*

Доказательство. Нам дана некоторая исключительная первичная алгебра $A$, которая, как мы видели, удовлетворяет условиям 1) и 2). Мы будем теперь последовательно строить новые алгебры, удовлетворяющие все большему числу перечисленных свойств.

Заметим прежде всего, что если $B$ — первичная исключительная алгебра, то всякий ненулевой идеал $I$ алгебры $B$ также является исключительной первичной алгеброй. Действительно, ввиду чистой альтернативности алгебры $B$, алгебра $I$ неассоциативна, а по предложению 3 алгебра $I$ не может быть кольцом Кэли — Диксона. Наконец, по следствию 1 теоремы 4 алгебра $I$ первична.

Вернемся к алгебре $A$. Если $N(A) = (0)$, то свойство 3) выполнено. В противном случае по теореме 8.11 мы имеем $Z(A) = N(A) \neq (0)$, и мы можем, как обычно, образовать алгебру частных $A_1$. Если алгебра $A_1$ проста, то $A_1$ есть алгебра Кэли — Диксона, а $A$ — кольцо Кэли — Диксона, что противоречит условию. Следовательно, алгебра $A_1$ не проста. Пусть теперь $I$ — любой собственный идеал алгебры $A_1$. Тогда по доказанному $I$ есть первичная исключительная алгебра. Если $N(I) \neq (0)$, то мы имеем $(0) \neq N(I) = Z(I) = I \cap Z(A_1)$, откуда, как и при доказательстве теоремы 10, следует, что $I = A_1$. Полученное противоречие доказывает, что $N(I) = (0)$, т. е. исключительная первичная алгебра $I$ удовлетворяет свойствам 1) — 3).

Далее, в силу тождеств Клейнфелда для любых $a, b \in I$ мы имеем $[a, b]^4 \in N(I) = (0)$, т. е. $I$ удовлетворяет существенному тождественному соотношению $[x, y]^4 = 0$. Следовательно, в $I$ выполнено и свойство 4).

Обозначим теперь через $S$ множество всех нильпотентных элементов алгебры $I$. По предложению 7.2 $S$ является идеалом алгебры $I$. Так как в $I$ есть ненулевые абсолютные делители нуля, то $S \neq (0)$, и по доказанному выше $S$ есть исключительная первичная ниль-алгебра.

Мы имеем $N(S) = S \cap N(I) = (0)$, т. е. в $S$ выполнено свойство 3). Ясно также, что $S$ является альтернативной PI-алгеброй. По теореме 5.6 алгебра $S$ локально нильпотентна. Таким образом, алгебра $S$ удовлетворяет свойствам 1) — 5).

Пусть теперь $V$ — минимальный правый идеал алгебры $S$ и $\check{V}$ — наибольший идеал алгебры $S$, содержащийся в $V$. Ввиду минимальности $V$, либо $\check{V} = (0)$, либо $\check{V} = V$. В первом случае по лемме 3 правый идеал $V$ ассоциативен, откуда по теореме 2 $V = N(V) \subseteq N(S) = (0)$, что не так. Если же $\check{V} = V$, то $\check{V}$ является минимальным двусторонним идеалом алгебры $S$. Ввиду первичности алгебры $S$, мы имеем $V^2 \neq (0)$, поэтому по теореме 8.10 $V$ является простой алгеброй. Но алгебра $V$ локально нильпотентна и по предложению 7.1 не может быть простой. Полученное противоречие доказывает, что в $S$ нет минимальных правых идеалов, т. е. алгебра $S$ обладает свойством 6).

Теорема доказана.

Докажем теперь, что первичные альтернативные алгебры без ненулевых локально нильпотентных идеалов не являются исключительными.

Лемма 9. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $A \neq (0)$ и $N(A) = (0)$. Тогда $\mathscr{L}(A) \neq (0)$, т. е. $A$ содержит ненулевые локально нильпотентные идеалы.*

Доказательство. Ввиду тождеств Клейнфелда, алгебра $A$ удовлетворяет тождеству $[x, y]^4 = 0$. В этом случае по предложению 7.2 множество $I$ всех нильпотентных элементов алгебры $A$ образует идеал. По теореме 5.6 идеал $I$ локально нильпотентен, т. е. $I \subseteq \mathscr{L}(A)$. Если $I = (0)$, то алгебра $A$ коммутативна, а по лемме 7.7 — и ассоциативна, т. е. $(0) \neq A = N(A)$, что противоречит условию. Значит, $I \neq (0)$ и $\mathscr{L}(A) \neq (0)$.

Лемма доказана.

Теорема 11. *Пусть $A$ — первичная альтернативная неассоциативная алгебра. Тогда если $\mathscr{L}(A) = (0)$, то $A$ является кольцом Кэли — Диксона.*

Доказательство. В силу леммы 9 мы имеем $N(A) \neq (0)$ и далее по теореме 8.11 $Z(A) = N(A) \neq (0)$, так что мы можем вновь рассмотреть алгебру частных $A_1$. Пусть $I$ — произвольный ненулевой идеал алгебры $A_1$; тогда $I$ — первичная неассоциативная альтернативная алгебра. Если $N(I) = (0)$, то по лемме 9 $\mathcal{L}(I) \neq (0)$, а так как радикал $\mathcal{L}$ по теореме 8.9 наследствен, то и $\mathcal{L}(A_1) \neq (0)$. Легко видеть, что $(0) \neq \mathcal{L}(A_1) \cap A$ — локально нильпотентный идеал алгебры $A$. Так как это противоречит условию $\mathcal{L}(A) = (0)$, то мы получаем, что $N(I) \neq (0)$ для любого собственного идеала $I$ алгебры $A_1$. Но тогда $(0) \neq N(I) = Z(I) = I \cap Z(A_1)$, откуда, как и раньше, следует, что $I = A_1$. Таким образом, алгебра $A_1$ проста и является алгеброй Кэли — Диксона. Теорема доказана.

Отметим в заключение, что из результата Шестакова, сформулированного в замечании к теореме 5′, следует, что никакая исключительная первичная альтернативная алгебра не может быть конечнопорожденной.

**Упражнения**

**1.** Пусть $K$ — кольцо Кэли — Диксона. Если $a, b \in K$ и $(aK)b = (0)$ или $a(Kb) = (0)$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

**2.** Пусть $A$ — первичная неассоциативная альтернативная алгебра и $I$ — правый идеал алгебры $A$. Доказать, что в алгебре $I$ нет ненулевых ассоциативных идеалов.

Указание. Воспользоваться упражнением 12 к § 1.

**3.** Доказать, что в условиях упражнения 2 $I$ является первичной неассоциативной алгеброй.

Указание. Если $PQ = (0)$ для некоторых идеалов $P$ и $Q$ алгебры $I$, то рассмотреть в идеале $I_0$, порожденном в алгебре $A$ множеством $(I, I, A)$, идеалы $P_0$ и $Q_0$, порожденные в алгебре $I$ соответственно множествами $(P, P, P)$ и $(Q, Q, Q)$. Воспользоваться следствием 1 теоремы 4.

**4.** Доказать, что всякий односторонний идеал кольца Кэли — Диксона является кольцом Кэли — Диксона.

**5.** Доказать, что в условиях теоремы 10 всякий односторонний идеал алгебры $S$ также удовлетворяет условиям 1) — 6).

**6.** Пусть $A$ — альтернативная алгебра и $a$ — произвольный абсолютный делитель нуля в $A$. Доказать, что $a \in \mathcal{L}(A)$.

Указание. Применить теорему 8.8 и теорему 11.

Следствие. *Пусть $\mathcal{M}$ — радикал, определенный в упражнении 5 к § 2. Тогда во всякой альтернативной алгебре $A$ верно включение*

$$\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{L}(A),$$

## ЛИТЕРАТУРА

Амицур [12], Брак и Клейнфелд [24], Скорняков [190], Клейнфелд [94, 97], Жевлаков [75], Слейтер [198, 203, 205], Шестаков [271].

Результаты об абсолютных делителях нуля йордановых, ассоциативных и альтернативных алгебр: Слинько [209], Маккриммон [137].

Результаты, посвященные описанию полупервичных и первичных алгебр в других многообразиях алгебр: Дорофеев [61], Клейнфелд [96], Клейнфелд Э., Клейнфелд М., Косьер [100], Пчелинцев [172], Роомельди [185], Тэди [231], Хенцель [246].

*ГЛАВА* 10

# РАДИКАЛ ЖЕВЛАКОВА

Как следует из общей теории, в классе ассоциативных алгебр существует много различных радикалов. Однако лишь немногие оказываются полезными в структурной теории. Для некоторых — как, например, для ниль-радикалов — понятно строение радикальных алгебр. Для других — понятнее устройство полупростых. Чаще всего непонятно ни то, ни другое.

С этой точки зрения квазирегулярный радикал Джекобсона является счастливым исключением. С одной стороны, довольно изученным объектом являются квазирегулярные алгебры. Всякая же полупростая в смысле Джекобсона алгебра является подпрямой суммой примитивных алгебр, каждая из которых является плотным кольцом линейных преобразований некоторого векторного пространства над телом. Таким образом, о радикале произвольной ассоциативной алгебры и о фактор-алгебре по нему имеется существенная информация.

Попытки создать аналогичную структурную теорию для альтернативных алгебр предпринимались давно. В 1948 г. Смайли доказал, что в произвольной альтернативной алгебре $A$ существует наибольший квазирегулярный идеал $\mathcal{S}(A)$, фактор-алгебра по которому не содержит ненулевых квазирегулярных идеалов. В литературе этот радикал получил название *радикала Смайли*.

В 1955 г. Клейнфелд распространил на альтернативные алгебры понятие примитивности. Так как в то время еще было неясно, что считать представлениями и модулями альтернативных алгебр, он определил примитивные альтернативные алгебры в чисто кольцевых терминах: как алгебры, обладающие максимальным модулярным одно-

сторонним идеалом, не содержащим ненулевых двусторонних идеалов. Для ассоциативных алгебр это условие эквивалентно обычной примитивности. Неассоциативные альтернативные примитивные алгебры, как показал Клейнфелд, исчерпываются алгебрами Кэли — Диксона.

В той же работе Клейнфелд доказал, что во всяком альтернативном кольце $A$ пересечение $\mathcal{K}(A)$ всех максимальных правых (левых) модулярных идеалов есть двусторонний идеал в $A$ и что фактор-алгебра $A/\mathcal{K}(A)$ является подпрямой суммой примитивных альтернативных алгебр. Идеал $\mathcal{K}(A)$ получил название *радикала Клейнфелда* алгебры $A$. Впоследствии название оправдалось: Жевлаков доказал, что отображение $\mathcal{K}\colon A \to \mathcal{K}(A)$ является наследственным радикалом.

Вплоть до 1969 г. вопрос о совпадении этих двух радикалов оставался открытым. Этот вопрос решил Жевлаков, доказав, что в произвольной альтернативной алгебре радикалы Смайли и Клейнфелда совпадают. Таким образом, в классе альтернативных алгебр появился радикал с богатой информацией как о своем радикальном, так и о своем полупростом классе. Мы обозначаем этот радикал буквой $\mathcal{J}$ и называем *радикалом Жевлакова*, а также *квазирегулярным радикалом*.

В последующие годы в работах Жевлакова, Слинько и Шестакова было выработано понятие правого (левого) представления альтернативной алгебры и доказано, что радикал Жевлакова $\mathcal{J}(A)$ произвольной альтернативной алгебры $A$ совпадает с пересечением ядер правых (левых) неприводимых представлений этой алгебры. Ими также доказано, что примитивные альтернативные алгебры есть в точности алгебры, обладающие точным неприводимым альтернативным модулем. Представлениям альтернативных алгебр мы посвятим следующую главу.

## § 1. Примитивные альтернативные алгебры

Назовем правый идеал $I$ алгебры $A$ *модулярным*, если существует такой элемент $e \in A$, что $ea - a \in I$ для всех $a \in A$. Этот элемент $e$ является левой единицей алгебры $A$ по модулю идеала $I$. Если алгебра $A$ обладает единицей, то всякий ее правый идеал, очевидно, модулярен. Аналогично левый идеал $J$ алгебры $A$ называется

*модулярным*, если существует элемент $e \in A$ такой, что $ae - a \in J$ для всех $a \in A$.

Предложение 1. *Пусть $I$ — модулярный правый идеал алгебры $A$. Тогда его можно вложить в некоторый максимальный правый идеал алгебры $A$, который будет также модулярен.*

Доказательство. Легко видеть, что если $e$ — левая единица по модулю правого идеала $I$, то $e$ — левая единица по модулю любого идеала алгебры $A$, содержащего $I$. Поэтому любой идеал, содержащий $I$, модулярен.

Рассмотрим множество $M$ правых идеалов алгебры $A$, содержащих $I$, но не содержащих $e$. По лемме Цорна в $M$ имеется максимальный идеал $J$. Покажем, что $J$ — максимальный идеал алгебры $A$. Пусть $J'$ — правый идеал в $A$ и $J' \supset J$. Тогда $e \in J'$ и для произвольного элемента $a \in A$ имеем $a - ea \in I \subseteq J'$. Но так как $ea \in J'$, то и $a \in J'$, т. е. $J' = A$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $I$ — модулярный правый идеал алгебры $A$. Тогда наибольший идеал $\check{I}$ алгебры $A$, содержащийся в $I$, совпадает с множеством $(I : A) = \{a \in A \mid Aa \subseteq I\}$.*

Доказательство. По лемме 9.2 $\check{I} = (I : A^{\#})$. Так как $(I : A^{\#}) = I \cap (I : A)$, то нам достаточно доказать, что $(I : A) \subseteq I$. Пусть $e$ — левая единица по модулю $I$ и $a \in (I : A)$. Тогда $ea \in I$ и $a - ea \in I$, а в результате $a \in I$. Предложение доказано.

Назовем альтернативную алгебру $A$ *примитивной* (*справа*), если она обладает максимальным модулярным правым идеалом $I$, не содержащим ненулевых двусторонних идеалов алгебры $A$. В силу предложения 2 для идеала $I$ верны соотношения $\check{I} = (I : A) = (0)$.

Лемма 1. *Примитивная альтернативная алгебра $A$ первична.*

Доказательство. Пусть $I$ — максимальный модулярный идеал и $\check{I} = (0)$. Предположим, что $BC = (0)$ для идеалов $B$ и $C$ алгебры $A$. Если $B \neq (0)$, то $B \nsubseteq I$, и в силу максимальности $I$ имеем $I + B = A$. Но тогда $AC = (I + B)\,C = IC \subseteq I$, т. е. $C \subseteq (I : A)$. Но $(I : A) = (0)$, и, следовательно, $C = (0)$. Таким образом, первичность алгебры $A$ доказана.

Лемма 2. *Если $A$ — первичная альтернативная неассоциативная алгебра и $(a, b, A) = (0)$ для некоторых элементов $a, b \in A$, то $[a, b] = 0$.*

Доказательство. Напомним, что по теореме 8.11 $N(A) = Z(A)$ и $Z(A)$ не содержит делителей нуля. Поэтому, ввиду леммы 7.3, $[a, b] \in Z(A)$. Далее, по тождеству Муфанг $(a, ab, A) = (a, b, A)\, a = (0)$, что влечет в силу той же леммы включение $[a, ab] \in Z(A)$. Заметим, что $[a, ab] = a\,[a, b]$. Отсюда следует, что $0 = [a\,[a, b], b] = [a, b]^2$. Но так как в $Z(A)$ нет делителей нуля, имеем $[a, b] = 0$, и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $A$ — первичная альтернативная неассоциативная алгебра и $I$ — ее ненулевой односторонний идеал. Тогда $\check{I} \neq (0)$.*

Доказательство. Пусть для определенности $I$ — правый идеал. Если $\check{I} = (0)$, то по лемме 9.3 $(I, I, A) = (0)$, и по предыдущей лемме заключаем, что $I$ — ассоциативная и коммутативная подалгебра в $A$. По теореме 9.3 имеем $I = Z(I) \subseteq Z(A)$, откуда $I$ — двусторонний идеал. Следовательно, $I = \check{I} = (0)$. Противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Алгебра Кэли—Диксона $\boldsymbol{C}$ над любым полем является примитивной и не содержит собственных односторонних идеалов.*

Доказательство. Если $I$ — ненулевой односторонний идеал в $\boldsymbol{C}$, то по лемме 3 $\check{I} \neq (0)$. Но так как $\boldsymbol{C}$ — простая алгебра, то $\check{I} = \boldsymbol{C}$ и, следовательно, $I = \boldsymbol{C}$.

Мы видим, что $(0)$ — максимальный правый идеал в $\boldsymbol{C}$. Кроме того, ввиду наличия в $\boldsymbol{C}$ единицы, он еще и модулярен. Поэтому $\boldsymbol{C}$ примитивна и следствие доказано.

Теорема 1 (Клейнфелд). *Всякая примитивная альтернативная алгебра является либо примитивной ассоциативной алгеброй, либо алгеброй Кэли — Диксона над своим центром.*

Доказательство. Если $A$ неассоциативна и $I$ — ее максимальный модулярный идеал такой, что $\check{I} = (0)$, то по лемме 3 $I = (0)$. Отсюда следует, что в $A$ нет собственных правых идеалов, в частности, она проста. В силу теоремы Клейнфелда о простых альтернативных алгебрах теорема 1 доказана.

**Упражнение**

1. Докажите, что во всякой альтернативной алгебре $A$ радикал $\mathscr{L}(A)$ содержит все односторонние локально нильпотентные идеалы.

Указание. Использовать теорему 8.8 и лемму 3.

## § 2. Радикал Клейнфелда

Предложение 3. *Пусть* $\varphi\colon B \to A$ — *гомоморфизм алгебры* $B$ *на* $A$, $\psi\colon A \to C$ — *гомоморфизм алгебры* $A$ *на* $C$ *и* $I$ — *максимальный модулярный правый (левый) идеал алгебры* $A$, *содержащий ядро* $\psi$. *Тогда* $\varphi^{-1}(I)$ *и* $\psi(I)$ — *также максимальные модулярные правые (левые) идеалы в алгебрах* $B$ *и* $C$.

Доказательство. Пусть $e$ — левая единица алгебры $A$ по модулю $I$. Тогда всякий элемент $\tilde{e} \in \varphi^{-1}(e)$ будет левой единицей алгебры $B$ по модулю $\varphi^{-1}(I)$. Если $\varphi^{-1}(I)$ не максимален в $B$, то в $B$ существует правый идеал $P$ такой, что $P \supset \varphi^{-1}(I)$ и $B \neq P$. Ясно, что $P = \varphi^{-1}(J)$, где $J$ — правый идеал алгебры $A$, строго содержащий $I$. Но тогда $J = A$ и $P = \varphi^{-1}(A) = B$.

Ясно также, что $\psi(I)$ модулярен. В качестве левой единицы по модулю $\psi(I)$ можно взять $\psi(e)$. Если $\psi(I)$ не максимален, то либо $\psi(I) = C$, либо в $C$ существует правый идеал $Q$ такой, что $Q \supset \psi(I)$ и $Q \neq C$. В первом случае найдется элемент $x \in I$ такой, что $\psi(x) = \psi(e)$. Но тогда $x - e \in \operatorname{Ker}\psi \subseteq I$, откуда $e \in I$ и $I = A$. Во втором случае мы имеем $\psi^{-1}(Q) = A$ и, следовательно, $Q = C$. Предложение доказано.

Как обычно, назовем идеал $B$ альтернативной алгебры $A$ *примитивным*, если фактор-алгебра $A/B$ — примитивная альтернативная алгебра,

Теорема 2 (Клейнфелд). *Во всякой альтернативной алгебре* $A$ *пересечение всех максимальных модулярных правых (левых) идеалов* $\mathscr{K}(A) = \bigcap I_\alpha$ *есть двусторонний идеал в* $A$, *совпадающий с пересечением всех примитивных идеалов алгебры* $A$. *Фактор-алгебра* $A/\mathscr{K}(A)$ *является подпрямой суммой примитивных ассоциативных алгебр и алгебр Кэли — Диксона.*

Доказательство. Пусть $I_\alpha$ — некоторый максимальный модулярный идеал алгебры $A$ и $Q_\alpha = \check{I}_\alpha$ — наибольший двусторонний идеал алгебры $A$, содержащий-

ся в $I_\alpha$. Из предложения 3 следует, что $Q_\alpha$ — примитивный идеал. Значит, $\mathcal{K}(A)$ содержит пересечение всех идеалов $Q_\alpha$ и тем более пересечение $Q$ всех примитивных идеалов алгебры $A$. С другой стороны, для любого примитивного идеала $Q_\alpha$ фактор-алгебра $A/Q_\alpha$ есть либо алгебра Кэли — Диксона, либо примитивная ассоциативная алгебра, и в ней пересечение всех максимальных модулярных идеалов равно нулю, ввиду следствия леммы 3 и хорошо известного факта теории ассоциативных алгебр. Поэтому в силу предложения 3 заключаем, что $\mathcal{K}(A)$ содержится в каждом примитивном идеале алгебры $A$ и, следовательно, в их пересечении $Q$. Таким образом, $\mathcal{K}(A) = Q$. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Если алгебра $A$ не содержит вообще максимальных модулярных правых идеалов, будем считать по определению, что $\mathcal{K}(A) = A$. Идеал $\mathcal{K}(A)$ назовем *радикалом Клейнфелда* алгебры $A$.

Лемма 4. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $B$ — идеал в $A$ и $I$ — максимальный модулярный правый идеал алгебры $B$. Тогда $I$ — правый идеал алгебры $A$.*

**Доказательство.** Пусть $IA \nsubseteq I$. Тогда существует такой элемент $x \in A$, что $Ix \nsubseteq I$. Рассмотрим множество $I_1 = I + Ix$ и покажем, что оно является правым идеалом в $B$. В самом деле, для любых $i \in I$ и $b \in B$

$$(ix)\,b = i\,(xb) + (i,\ x,\ b) = i\,(xb) - (i,\ b,\ x) = \\ = i\,(xb) - (ib)\,x + i\,(bx) \in I + Ix = I_1.$$

Значит, $I_1B \subseteq I_1$, а все прочие свойства правого идеала для $I_1$ очевидны. Так как $I_1 \supset I$ и $I$ — максимален в $B$, то $I_1 = B$. Значит, левая единица $e$ алгебры $B$ по модулю $I$ представляется в виде $e = i + jx$, где $i,\ j \in I$. Отметим, что $jx \notin I$, так как $e \notin I$. Однако, ввиду модулярности идеала $I$, $jx - e\,(jx) \in I$, и поэтому получаем

$$jx - e\,(jx) = jx - (i + jx)\,(jx) = jx - i\,(jx) - j\,(xjx) \in I.$$

Отсюда следует $jx \in I$, и искомое противоречие получено. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $B$ — идеал альтернативной алгебры $A$. Тогда множество максимальных модулярных правых идеалов алгебры $B$ совпадает с множеством правых идеалов вида $I \cap B$, где $I$ — максимальный модулярный правый идеал алгебры $A$, не содержащий $B$.*

Доказательство. Пусть $I_1$ — максимальный модулярный правый идеал алгебры $B$ и $e$ — левая единица алгебры $B$ по модулю $I_1$. Рассмотрим в алгебре $A^{\#}$ правый идеал $J$, порожденный элементом $1 - e$. Покажем, что $JB \subseteq I_1$. Пусть $J_0 = \{j \in J \mid jB \subseteq I_1\}$. Так как $b - eb \in I_1$ для любого $b \in B$, то $1 - e \in J_0$. Далее, по лемме 4 идеал $I_1$ алгебры $B$ является правым идеалом алгебры $A$, поэтому для любых $j \in J_0$, $a \in A^{\#}$, $b \in B$ мы имеем

$$(ja)\,b = j\,(ab) + (j,\ a,\ b) = j\,(ab) - (j,\ b,\ a) = \\ = j\,(ab) - (jb)\,a + j\,(ba) \in I_1,$$

откуда следует, что $J_0A^{\#} \subseteq J_0$. Ясно теперь, что $J_0$ — правый идеал алгебры $A^{\#}$. Так как $J_0 \subseteq J$ и $1 - e \in J_0$, то $J_0 = J$, т. е. $JB \subseteq I_1$. Положим теперь $J_1 = I_1 + J \cap A$. Ясно, что $J_1$ — правый идеал алгебры $A$ и что $J_1B \subseteq I_1$. Если бы $e \in J_1$, то мы имели бы $e^2 \in J_1B \subseteq I_1$ и, далее, $e = (e - e^2) + e^2 \in I_1$, что не так. Значит, $e \notin J_1$. Для любого $a \in A$ мы имеем $a - ea \in J \cap A \subseteq J_1$, т. е. $J_1$ — собственный правый модулярный идеал алгебры $A$. Рассмотрим максимальный модулярный правый идеал $I$, содержащий $J_1$. Ясно, что $e \notin I$, поэтому $B \nsubseteq I$. Но тогда $B \neq I \cap B \supseteq I_1$, откуда, ввиду максимальности $I_1$, получаем, что $I \cap B = I_1$.

Обратно, пусть $I$ — максимальный модулярный правый идеал алгебры $A$, причем $B \nsubseteq I$. В силу максимальности $I$ мы имеем $I + B = A$. Если $e$ — левая единица алгебры $A$ по модулю $I$, то $e = i + e'$, где $i \in I$, $e' \in B$. Далее, для любого $b \in B$ мы имеем

$$b - e'b = b - (e - i)\,b = (b - eb) + ib \in I \cap B.$$

Отсюда следует, что $I_1 = I \cap B$ — модулярный правый идеал алгебры $B$. Рассмотрим максимальный модулярный правый идеал $I_2$ алгебры $B$, содержащий $I_1$. По лемме 4 $I_2$ является правым идеалом алгебры $A$. Если $I_1 \neq I_2$, то $I_2 \nsubseteq I$, поэтому $I + I_2 = A$, и существуют такие элементы $i' \in I$, $i_2 \in I_2$, что $e = i' + i_2$. Тогда мы вновь имеем $b - i_2b \in I \cap B = I_1 \subseteq I_2$ для любого $b \in B$, откуда следует, что $I_2 = B$. Полученное противоречие доказывает максимальность идеала $I_1$.

Лемма доказана.

Следствие. *В условиях леммы* 5 $B \subseteq \mathcal{K}(A)$ *тогда и только тогда, когда* $B = \mathcal{K}(B)$.

Теорема 3 (Жевлаков). *Отображение* $\mathcal{K}: A \mapsto \mathcal{K}(A)$ *есть наследственный радикал в классе альтернативных алгебр.*

Доказательство. Если в алгебре $A$ нет максимальных правых модулярных идеалов, то по предложению 3 таких идеалов нет и в любом гомоморфном образе алгебры $A$. Далее, ввиду следствия леммы 5, во всякой альтернативной алгебре $A$ идеал $\mathcal{K}(A)$ является наибольшим $\mathcal{K}$-идеалом. В фактор-алгебре $\bar{A} = A/\mathcal{K}(A)$ согласно предложению 3 пересечение всех максимальных модулярных правых идеалов равно нулю, т. е. $\mathcal{K}(\bar{A}) = (0)$. Следовательно, отображение $\mathcal{K}$ удовлетворяет условиям (A) — (C) и является радикалом. Наследственность радикала $\mathcal{K}$ вытекает из следствия леммы 5, следствия теоремы 8.5 и теоремы 8.3. Теорема доказана.

## § 3. Радикал Смайли

Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей 1. Элемент $a \in A$ называется *обратимым*, если существует элемент $a^{-1} \in A$ такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Докажем несколько лемм о свойствах обратимых элементов алгебры $A$.

Лемма 6. *Если* $ab = ca = 1$, *то* $b = c$.

Доказательство. Докажем сначала, что $(a, b, c) = 0$. Действительно, в силу тождества (7.16) $(a, b, c) = (ab)(a, b, c) = b(a(a, b, c)) = b(a, b, ca) = 0$. Теперь $c = c(ab) = (ca)b - (c, a, b) = b$. Лемма доказана.

Лемма 7. $(x, a, a^{-1}) = f(x, y, a, a^{-1}) = 0$, *где* $f(x, y, z, t)$ — *функция Клейнфелда.*

Доказательство. В силу тождества (7.16) имеем

$$(x, a, a^{-1}) = (aa^{-1})(x, a, a^{-1}) = \\ = a^{-1}(a(x, a, a^{-1})) = a^{-1}(x, a, a^{-1}a) = 0.$$

Далее,

$$f(x, y, a, a^{-1}) = \\ = (xy, a, a^{-1}) - y(x, a, a^{-1}) - (y, a, a^{-1})x = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. $(a, x, y) = 0$ *влечет* $(a^{-1}, x, y) = 0$.

Доказательство. В силу леммы 7

$$(a^{-1}, x, y)\, a = (aa^{-1}, x, y) - f(a, a^{-1}, x, y) - a^{-1}(a, x, y) = 0.$$

Та же лемма дает нам теперь

$$(a^{-1}, x, y) = (a^{-1}, x, y)(aa^{-1}) = ((a^{-1}, x, y)\, a)\, a^{-1} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *элементы* $a$ *и* $b$ *обратимы*;

б) *элементы* $ab$ *и* $ba$ *обратимы.*

Доказательство. В силу леммы 8 имеем $(ab, b, a) = 0 \Rightarrow (ab, b^{-1}, a) = 0 \Rightarrow (ab, b^{-1}, a^{-1}) = 0$. Теперь в силу леммы 7

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)\, b^{-1})\, a^{-1} - (ab, b^{-1}, a^{-1}) = 1.$$

Аналогично доказываются равенства $(b^{-1}a^{-1})(ab) = (ba)(a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})(ba) = 1$.

Наоборот, пусть $ab$ и $ba$ обратимы. Тогда по лемме 8 $(a, b, (ab)^{-1}) = ((ba)^{-1}, b, a) = 0$, и получаем, что

$$1 = (ab)(ab)^{-1} = a(b(ab)^{-1}) + (a, b, (ab)^{-1}) = a(b(ab)^{-1}),$$

$$1 = (ba)^{-1}(ba) = ((ba)^{-1} b)\, a - ((ba)^{-1}, b, a) = ((ba)^{-1} b)\, a.$$

Отсюда по лемме 6 следует, что $a$ — обратимый элемент. Аналогично обратим и элемент $b$. Лемма доказана.

Пусть теперь $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Элемент $a \in A$ называется *квазирегулярным справа*, если существует элемент $b \in A$ такой, что $ab = a + b$, и *квазирегулярным слева*, если существует элемент $c \in A$ такой, что $ca = a + c$. Элемент $b$ называется *правым квазиобратным* к элементу $a$, а элемент $c$ — *левым квазиобратным*. Элемент $a \in A$ называется *квазирегулярным*, если существует элемент $b \in A$ такой, что $ab = ba = a + b$. В этом случае элемент $b$ называется *квазиобратным к* $a$.

Предложение 4. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *элемент $a$ альтернативной алгебры $A$ квазирегулярен с квазиобратным элементом $b$;*

б) *элемент $1 - a$ алгебры $A^{\#} = \Phi \cdot 1 + A$ обратим с обратным элементом $1 - b$.*

Доказательство очевидно.

Следствие. *Если квазирегулярный элемент $z$ альтернативной алгебры $A$ лежит в ее центре $Z(A)$, то и его квазиобратный элемент $z'$ также лежит в $Z(A)$.*

Доказательство. В силу предложения 4 достаточно доказать, что для обратимого элемента $a \in A$ из того, что $a \in Z(A)$, следует, что $a^{-1} \in Z(A)$. В силу леммы 8 $a^{-1} \in N(A)$. Далее, $[a^{-1}, x]\, a = [a^{-1}a, x] = 0$. В силу леммы 7 $[a^{-1}, x] = [a^{-1}, x](aa^{-1}) = ([a^{-1}, x]\, a)\, a^{-1} = 0$. Значит, $a^{-1} \in Z(A)$. Следствие доказано.

Лемма 10. *Если $b$ — правый квазиобратный к элементу $a \in A$, а $c$ — левый квазиобратный к $a$, то элемент $a$ квазирегулярен и $b = c$.*

Доказательство следует из предложения 4 и леммы 6.

Следствие. *Квазирегулярный элемент имеет единственный квазиобратный.*

Алгебра называется *квазирегулярной*, если каждый ее элемент квазирегулярен. Идеал алгебры называется *квазирегулярным*, если он квазирегулярен как алгебра. Легко видеть, что всякий идеал квазирегулярной алгебры является квазирегулярным.

Лемма 11. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей, $u$ — обратимый элемент в $A$ и $a$ — элемент квазирегулярного идеала $B$. Тогда $u - a$ — обратимый элемент.*

Доказательство. Мы видим, что

$$(u - a)\, u^{-1} = 1 - au^{-1} = 1 - b,$$

$$u^{-1}(u - a) = 1 - u^{-1}a = 1 - c,$$

где $b, c \in B$. Следовательно, элементы $(u - a)\, u^{-1}$ и $u^{-1}(u - a)$ обратимы, откуда по лемме 9 заключаем, что $u - a$ обратим. Лемма доказана.

Лемма 12. *Сумма двух квазирегулярных идеалов альтернативной алгебры — квазирегулярный идеал.*

Доказательство. Пусть $B$, $C$ — квазирегулярные идеалы алгебры $A$; тогда $B$ и $C$ — идеалы и в алгебре $A^{\#} = \Phi \cdot 1 + A$. Покажем, что каждый элемент идеала

$B + C$ квазирегулярен. Пусть $b + c \in B + C$. Тогда $1 - (b + c) = (1 - b) - c = u - c$, где $u = 1 - b$ — обратимый элемент, так как $b$ квазирегулярен. Теперь в силу леммы 11 имеем $1 - (b + c)$ — обратимый элемент, а это согласно предложению 4 означает квазирегулярность элемента $b + c$.

Л е м м а 13. *Если $B$ — квазирегулярный идеал альтернативной алгебры $A$ и в фактор-алгебре $\overline{A} = A/B$ образ $\bar{a}$ элемента $a \in A$ квазирегулярен, то $a$ — квазирегулярный элемент.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $A$ имеет единицу 1. Пусть $\bar{x}$ — квазиобратный элемент к $\bar{a}$. Тогда $(\bar{1} - \bar{a})(\bar{1} - \bar{x}) = (\bar{1} - \bar{x}) \times (\bar{1} - \bar{a}) = \bar{1}$ и для любого прообраза $x$ элемента $\bar{x}$ имеем $(1 - a)(1 - x) = 1 - b, (1 - x)(1 - a) = 1 - b'$, где $b, b' \in B$. В силу предложения 4 элементы $(1 - a) \times (1 - x)$ и $(1 - x)(1 - a)$ обратимы. Следовательно, по лемме 9 элемент $1 - a$ обратим, а это значит, что элемент $a$ квазирегулярен. Лемма доказана.

Т е о р е м а 4 (С м а й л и). *Всякая альтернативная алгебра $A$ имеет наибольший квазирегулярный идеал $\mathscr{S}(A)$ такой, что фактор-алгебра $A/\mathscr{S}(A)$ не имеет ненулевых квазирегулярных идеалов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathscr{S}(A)$ — сумма всех квазирегулярных идеалов алгебры $A$. В силу леммы 12 этот идеал квазирегулярен, а в силу леммы 13 фактор-алгебра $A/\mathscr{S}(A)$ не имеет ненулевых квазирегулярных идеалов. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Отображение $\mathscr{S}: A \to \mathscr{S}(A)$ есть наследственный радикал в классе альтернативных алгебр.*

Введенный в этом параграфе радикал носит название *радикала Смайли*.

## § 4. Теорема Жевлакова о совпадении радикалов Клейнфелда и Смайли

П р е д л о ж е н и е 5. *Во всякой альтернативной алгебре $A$ справедливо включение $\mathscr{S}(A) \subseteq \mathscr{K}(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathscr{S}(A) \nsubseteq I$, где $I$ — максимальный модулярный правый идеал, и $e$ — левая единица по модулю $I$. Тогда $I + \mathscr{S}(A) = A$, и найдутся

такие элементы $i \in I$, $s \in \mathcal{S}(A)$, что $i + s = e$. Для любого $a \in A$ мы имеем $ea - a = (i + s)a - a \in I$. Но $ia \in I$, поэтому $sa - a \in I$ для любого $a \in A$. В частности, если вместо $a$ подставить элемент $p$, являющийся квазиобратным для $s$, то получим $sp - p = s \in I$. Но тогда $e = i + s \in I$, что невозможно. Значит, $\mathcal{S}(A)$ содержится во всех максимальных модулярных правых идеалах, а следовательно, и в их пересечении: $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$.

Предложение 6. *Если радикалы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ различны, то существует $\mathcal{K}$-радикальная $\mathcal{S}$-полупростая алгебра $A$, являющаяся подпрямой суммой колец Кэли — Диксона.*

Доказательство. Ввиду предложения 5, несовпадение радикалов Клейнфелда и Смайли означает наличие альтернативной алгебры $B$, в которой $\mathcal{S}(B) \subset \mathcal{K}(B)$. Но тогда $A = \mathcal{K}(B)/\mathcal{S}(B)$ есть $\mathcal{K}$-радикальная $\mathcal{S}$-полупростая алгебра. По теоремам 8.8 и 9.11 алгебра $A$ есть подпрямая сумма первичных ассоциативных алгебр без локально нильпотентных идеалов и колец Кэли — Диксона. Пусть $P$ — пересечение всех таких идеалов $P_\alpha$ алгебры $A$, для которых фактор-алгебра $A/P_\alpha$ является кольцом Кэли — Диксона. Тогда, очевидно, $P \cap D = (0)$, где $D = D(A)$ — ассоциаторный идеал алгебры $A$. Если $P = (0)$, то все доказано. Пусть $P \neq (0)$, тогда мы имеем $D(P) \subseteq D(A) \cap P = (0)$, т. е. $P$ — ненулевой ассоциативный идеал алгебры $A$. Но в этом случае $P = \mathcal{K}(P) = \mathcal{S}(P)$, и алгебра $A$ не является $\mathcal{S}$-полупростой. Полученное противоречие доказывает предложение.

Лемма 14. *Если центр $Z(A)$ альтернативной алгебры $A$ квазирегулярен и элемент $x \in A$ квадратичен над центром: $x^2 = \alpha x + \beta$, где $\alpha, \beta \in Z(A)$, то $x$ — квазирегулярный элемент.*

Доказательство. Присоединим формально к алгебре $A$ единицу 1. Будем искать квазиобратный к $x$ в виде $x' = \gamma x + \delta$, где $\gamma, \delta \in Z(A)$. Имеем

$$0 = x + x' - xx' = x + \gamma x + \delta - \gamma x^2 - \delta x = (1 + \gamma - \gamma\alpha - \delta)x + (\delta - \gamma\beta).$$

Решим следующую систему уравнений относительно неизвестных $\gamma$ и $\delta$:

$$\begin{cases} 1 + \gamma - \gamma\alpha - \delta = 0, \\ \delta - \gamma\beta = 0. \end{cases}$$

Складывая уравнения, имеем $1 + \gamma - \gamma\alpha - \gamma\beta = 0$, откуда $\gamma(1 - \alpha - \beta) = -1$. Но элемент $\alpha + \beta$ квазирегулярен, поэтому элемент $1 - \alpha - \beta$ обратим. Значит, $\gamma = -(1 - \alpha - \beta)^{-1}$ и $\delta = -\beta(1 - \alpha - \beta)^{-1}$. Искомый квазиобратный элемент найден, так как $\gamma x$ и $\delta$ лежат в алгебре $A$.

Следствие. *В $\mathcal{K}$-радикальной альтернативной алгебре $A$ всякий квадратичный над центром элемент квазирегулярен.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру $A^{\#} = \Phi\cdot 1 + A$. Заметим, что для любого $z \in Z(A)$ множество $(1 - z)A$ есть правый модулярный идеал алгебры $A$ и, значит, совпадает со всей алгеброй: $(1 - z)A = A$. Следовательно, существует элемент $z' \in A$ такой, что $(1 - z)z' = -z$. Отсюда $z + z' = zz' = z'z$ и $z'$ — квазиобратный элемент к $z$. Ввиду следствия предложения 4, $z' \in Z(A)$ и центр $Z(A)$ является квазирегулярным кольцом. Остается воспользоваться леммой 14.

Лемма 15. *Пусть $C$ — некоторая алгебра Кэли — Диксона над полем $F$. Тогда для любых $a$, $b$, $x \in C$ имеет место равенство*

$$t([a, b]^2 x) = [a \circ x, b][a, b] - [x, b][a^2, b],$$

*где $t(y)$ — след элемента $y$.*

Доказательство. Заметим, что по лемме 2.8 $[a, b]^2 \in F$, поэтому $t([a, b]^2 x) = [a, b]^2 t(x)$. С другой стороны, в силу равенств (2.18) и (2.21) мы имеем

$$[a \circ x, b][a, b] - [x, b][a^2, b] =$$
$$= t(a)[x, b][a, b] + t(x)[a, b]^2 - t(a)[x, b][a, b] =$$
$$= t(x)[a, b]^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 16 (Жевлаков). *Пусть алгебра $A$ есть подпрямая сумма колец Кэли — Диксона. Тогда в $A$ есть ненулевой квадратичный над центром идеал.*

Доказательство. Пусть алгебра $A$ — подпрямая сумма колец Кэли — Диксона $K_\alpha$. Если бы в $A$ выполнялось тождество $[x, y]^2 = 0$, то такое же тождество выполнялось бы и во всяком кольце Кэли — Диксона $K_\alpha$, а следовательно, и в алгебре Кэли — Диксона $C_\alpha = (Z_\alpha^*)^{-1} K_\alpha$, где $Z_\alpha = Z(K_\alpha)$. Но в произвольной алгебре Кэли — Диксона $C(\mu, \beta, \gamma)$ для базисных элементов $v_1$ и $v_2$ мы имеем $[v_1, v_2]^2 = (2v_1v_2 - v_2)^2 = -\beta(4\mu + 1) \neq$

$\neq 0$. Значит, в $A$ найдутся такие элементы $a$, $b$, что $[a, b]^2 \neq 0$. Пусть $I$ — идеал в $A$, порожденный элементом $[a, b]^2$. Образ элемента $[a, b]^2$ при гомоморфизме алгебры $A$ на любое кольцо Кэли — Диксона $K_\alpha$ попадает в центр $Z(K_\alpha)$, поэтому $[a, b]^2 \in Z(A)$ и $I = [a, b]^2 A^\#$. Пусть $x$ — произвольный элемент алгебры $A^\#$. Рассмотрим элементы $p = [a \circ x, b][a, b] - [x, b][a^2, b]$ и $q = ([a, b]^2 x)^2 - p([a, b]^2 x)$. При гомоморфизме на любое кольцо Кэли — Диксона $K_\alpha$ в силу леммы 15 элементы $p$ и $q$ переходят в $Z(K_\alpha)$, поэтому $p$ и $q$ принадлежат $Z(A)$. Значит, $([a, b]^2 x)^2 = p([a, b]^2 x) + q$, где $p, q \in Z(A)$, т. е. все элементы вида $[a, b]^2 x$ квадратичны над центром. Следовательно, $I$ — квадратичный идеал в $A$. Лемма доказана.

Теорема 5 (Жевлаков). *Радикалы Смайли и Клейнфелда совпадают.*

Доказательство. Если эти радикалы различны, то в силу предложения 6 существует $\mathcal{K}$-радикальная $\mathcal{S}$-полупростая альтернативная алгебра $A$, которая является подпрямой суммой колец Кэли — Диксона. По лемме 16 в $A$ имеется ненулевой квадратичный идеал. Однако этот идеал по следствию леммы 14 квазирегулярен, что противоречит $\mathcal{S}$-полупростоте алгебры $A$. Теорема доказана.

Таким образом, в классе альтернативных алгебр имеется единственный аналог радикала Джекобсона. Этот радикал будем в дальнейшем называть *радикалом Жевлакова* и обозначать буквой $\mathcal{Y}$.

Важную характеризацию радикала Жевлакова $\mathcal{Y}(A)$ альтернативной алгебры $A$ получил Маккриммон. Он доказал, что радикал $\mathcal{Y}(A)$ состоит из тех и только тех элементов $z$, для которых все элементы вида $za$ (или $az$), $a \in A$, квазирегулярны. Отсюда, в частности, следует, что радикал Жевлакова альтернативной алгебры содержит все ее односторонние квазирегулярные идеалы.

## § 5. Радикалы колец Кэли — Диксона

На протяжении этого параграфа $K$ — кольцо Кэли — Диксона, $Z$ — его центр, $Z_1$ — поле частных кольца $Z$ и $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma) = (Z^*)^{-1} K$ — алгебра Кэли — Диксона над полем $Z_1$, являющаяся кольцом частных кольца $K$

по мультипликативному подмножеству $Z^* = Z \setminus \{0\}$. Напомним, что кольцо $K$ изоморфно вкладывается в алгебру $C$, и мы будем просто считать $K$ подкольцом кольца $C$.

Сейчас мы начинаем подготовительную работу для доказательства основного результата данного параграфа — теоремы Жевлакова о $\mathcal{Y}$-полупростоте конечнопорожденных колец Кэли — Диксона.

Зафиксируем элементы $a$, $b$ кольца Кэли — Диксона $K$ такие, что $[a, b]^2 \neq 0$ (существование таких элементов было показано при доказательстве леммы 16). Заметим, что так как $K \subseteq C$, то для любого элемента $k \in K$ определены функции $t(k)$ и $n(k)$; однако значения этих функций на элементах из $K$ могут, вообще говоря, не принадлежать $Z$ (но обязательно принадлежат $Z_1$).

Лемма 17. *Для любых* $k, k_1, \ldots, k_n \in K$ *имеют место включения*:

1) $[a, b]^2\, t(k_1) \ldots t(k_n) \in K$;
2) $[a, b]^2\, n(k) \in K$;
3) $[a, b]^4\, t(k_1) \ldots t(k_n)\, n(k) \in K$.

Доказательство. Ввиду леммы 15, $[a, b]^2 \times \times t(k_1) = t([a, b]^2 k_1) = [a \circ k_1, b]\,[a, b] - [k_1, b]\,[a^2, b] \in K$. Тем самым имеется основание для индукции по $n$. Пусть уже доказано, что $[a, b]^2\, t(k_1) \ldots t(k_m) \in K$ при $m < n$ для любых $k_1, \ldots, k_m \in K$. Тогда в силу (2.21) имеем

$$[a, b]^2\, t(k_1) \ldots t(k_{n-1})\, t(k_n) = \\ = [a, b]^2\, t(k_1) \ldots t(k_{n-2})\,[t(k_{n-1}k_n) + t(k_{n-1})\,k_n + \\ + t(k_n)\,k_{n-1} - k_{n-1} \circ k_n] \in K,$$

т. е. 1) доказано.

Далее, $[a, b]^2\, n(k) = [a, b]^2\,(-k^2 + t(k)\,k)$, откуда, ввиду 1), следует 2).

Наконец, утверждение 3) очевидным образом следует из 1) и 2).

Лемма доказана.

Пусть $X$ — множество порождающих кольца Кэли — Диксона $K$ (как $\Phi$-алгебры). Считая множество $X$ упорядоченным, обозначим через $r_1^{\text{пр}}(X)$ множество всех правильных $r_1$-слов от $X$.

Алгебру Кэли — Диксона $C$ мы можем рассматривать как $\Phi$-алгебру, полагая $\lambda \cdot (z^{-1}k) = z^{-1}(\lambda k)$ для $\lambda \in \Phi$,

$z \in Z^*$, $k \in K$. Обозначим через $T(K)$ Ф-подалгебру центра $Z_1$ алгебры $C$, порожденную множеством $t(K) \cup n(K)$ всех следов и норм элементов из $K$. Заметим, что если $Z_1$ — поле характеристики $\neq 2$, то алгебра $T(K)$ порождается множеством $t(K)$, так как для любого $x \in K$, ввиду (2.18), норма и след связаны формулой $2n(x) = (t(x))^2 - t(x^2)$.

Лемма 18. *В качестве множества порождающих Ф-алгебры $T(K)$ можно взять множество $Y = Y_1 \cup Y_2$, где $Y_1 = t(r_1^{\text{пр}}(X))$ — множество всех следов элементов из $r_1^{\text{пр}}(X)$, а $Y_2 = n(X)$ — множество всех норм элементов из $X$.*

Доказательство. Обозначим Ф-алгебру, порожденную множеством $Y$, через $T_0$. Нам нужно доказать, что $n(k)$, $t(k) \in T_0$ для любого $k \in K$. Ввиду соотношения $n(xy) = n(x)n(y)$, мы получаем, что $n(v) \in T_0$ для любого неассоциативного слова $v$ от элементов множества $X$. Так как $n(x+y) = n(x) + n(y) + f(x, y)$ и по (2.8) $f(x, y) = t(x)t(y) - t(xy)$, нам остается доказать, что $t(k) \in T_0$ для любого $k \in K$.

Мы докажем, что для любого неассоциативного слова $v$ от элементов множества $X$ имеет место равенство

$$v = \pm\langle v\rangle + \sum_i \alpha_i v_i + \alpha, \qquad (1)$$

где $\alpha$, $\alpha_i \in T_0$, $v_i$ — правильные $r_1$-слова длины меньшей, чем $v$. Напомним, что $\langle v\rangle$ обозначает для полилинейного слова $v$ правильное $r_1$-слово того же состава, что и $v$; если же $v$ не полилинейно, то $\langle v\rangle = 0$. Ясно, что из (1) будет вытекать нужное нам утверждение.

Будем доказывать соотношение (1) индукцией по длине $d(v)$ слова $v$. Очевидно основание индукции: $d(v) = 1$. Пусть теперь $d(v) = n > 1$, и все слова меньшей длины допускают представление в виде (1). Будем писать $v \equiv v'$, если $d(v) = d(v')$ и $v - v' = \sum_i \alpha_i v_i + \alpha$, где $\alpha$, $\alpha_i \in T_0$, $v_i$ — правильные $r_1$-слова длины меньшей, чем $n$. Рассмотрим вначале случай, когда $v$ является $r_1$-словом: $v = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\rangle$. Если $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$, то $v = \langle v\rangle$, и доказывать нечего. Пусть теперь $x_{i_{k+1}} \leqslant x_{i_k}$ для некоторого $k < n$. Если $x_{i_{k+1}} = x_{i_k}$, то, ввиду (2.18),

мы имеем

$$v=\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\rangle=\langle x_{i_1}, \ldots, x^2_{i_k}, \ldots, x_{i_n}\rangle=$$
$$=t(x_{i_k})\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n}\rangle-$$
$$-n(x_{i_k})\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}\rangle,$$

откуда по предположению индукции $v\equiv 0$. Так как в данном случае $\langle v\rangle=0$, то $v$ представимо в виде (1). Если же $x_{i_{k+1}}<x_{i_k}$, то, ввиду (2.21), мы имеем

$$v=\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}\circ x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}\rangle-$$
$$-\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}}, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n}\rangle=$$
$$=t(x_{i_k})\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}\rangle+$$
$$+t(x_{i_{k+1}})\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}\rangle+$$
$$+(t(x_{i_{k+1}}x_{i_k})-t(x_{i_{k+1}})t(x_{i_k}))\times$$
$$\times\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+2}}, \ldots, x_{i_n}\rangle-$$
$$-\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}}, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n}\rangle,$$

откуда по предположению индукции

$$v\equiv-\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k+1}}, x_{i_k}, \ldots, x_{i_n}\rangle.$$

Повторяя, если необходимо, данный процесс, ввиду его строгой монотонности, мы через конечное число шагов получим, что $v\equiv\pm\langle v\rangle$, т. е. $v$ представимо в виде (1).

Пусть теперь слово $v$ произвольно, $v=v_1v_2$. По предположению индукции $v_1\equiv\pm\langle v_1\rangle$, $v_2\equiv\pm\langle v_2\rangle$ и $v\equiv\equiv\pm\langle v_1\rangle\langle v_2\rangle$. Представим слово $\langle v_1\rangle$ в виде: $\langle v_1\rangle==u_1x_i$, где $x_i\in X$, $u_1$ — либо правильное $r_1$-слово длины $d(v_1)-1$, либо $u_1=1$ (если $d(v_1)=1$). В силу (2.21) мы имеем

$$(u_1x_i)\langle v_2\rangle=-(u_1\langle v_2\rangle)x_i+u_1(\langle v_2\rangle\circ x_i)=$$
$$=-(u_1\langle v_2\rangle)x_i+t(\langle v_2\rangle)u_1x_i+t(x_i)u_1\langle v_2\rangle+$$
$$+(t(\langle v_2\rangle x_i)-t(\langle v_2\rangle)t(x_i))u_1.$$

Так как $\langle v_2x_i\rangle$ — $r_1$-слово, то по доказанному выше и по предположению индукции $t(\langle v_2\rangle x_i)\in T_0$. Следовательно, по предположению индукции имеем

$$v\equiv\pm(u_1x_i)\langle v_2\rangle\equiv\mp(u_1\langle v_2\rangle)x_i\equiv\pm\langle u_1\langle v_2\rangle\rangle x_i,$$

откуда по доказанному выше слово $v$ представимо в виде (1).

Лемма доказана.

Следствие. *Если кольцо Кэли — Диксона $K$ является конечнопорожденной $\Phi$-алгеброй, то $\Phi$-алгебра $T(K)$ также конечнопорождена.*

Действительно, в этом случае, ввиду конечности множества $X$, множество $r_1^{\text{пр}}(X)$ также конечно.

Представим теперь алгебру Кэли — Диксона $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma)$ в виде $\boldsymbol{C}(\mu, \beta, \gamma) = \boldsymbol{K}(\mu) + \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$, (см. § 2.5); тогда каждый элемент $k \in K$ можно записать в виде $k = \lambda_0 + \lambda_1 v_1 + k'$, где $\lambda_0, \lambda_1 \in Z_1$, $k' \in \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$, $v_1$ — базисный элемент алгебры Кэли — Диксона такой, что $v_1^2 = v_1 + \mu$.

Лемма 19. *Существует такой элемент $\alpha \in Z^*$, что для любого $k \in K$, представленного в виде $k = \lambda_0 + \lambda_1 v_1 + k'$, верно включение $\alpha\lambda_0 \in T(K)$.*

Доказательство. Пусть $v_1 = z^{-1}k$ для некоторых элементов $z \in Z^*$, $k \in K$. Покажем, что в качестве искомого элемента $\alpha$ можно взять $z^2(1 + 4\mu)$. Мы имеем $z^2 v_1 \in K$ и $z^2 v_1^2 \in K$, откуда и $z^2\mu \in K$. Пусть теперь $k$ — произвольный элемент из $K$, $k = \lambda_0 + \lambda_1 v_1 + k'$, где $\lambda_0, \lambda_1 \in Z_1$, $k' \in \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$. Мы имеем $t(k) = 2\lambda_0 + \lambda_1$. Далее, $kv_1 = \lambda_0 v_1 + \lambda_1(v_1 + \mu) + k'v_1$, откуда $t(kv_1) = \lambda_0 + \lambda_1(1 + 2\mu)$. Из полученных соотношений легко следует, что $(1 + 4\mu)\lambda_0 = (1 + 2\mu)t(k) - t(kv_1)$. Следовательно,

$$\alpha\lambda_0 = z^2(1 + 4\mu)\lambda_0 = z^2(1 + 2\mu)t(k) - z^2 t(kv_1) = \\ = t((z^2 + 2z^2\mu)k) - t(k(z^2 v_1)) \in T(K).$$

Лемма доказана.

Положим теперь $T(\alpha) = \alpha[a, b]^4 T(K)$, где $\alpha$ — элемент из леммы 19 и $a, b$ — фиксированные элементы из $K$, для которых $[a, b]^2 \neq 0$ (а следовательно, и $[a, b]^4 \neq 0$). Ввиду леммы 17, $[a, b]^4 T(K) \subseteq K$, поэтому $T(\alpha) \subseteq \alpha K$. Кроме того, по лемме 19 $\alpha[a, b]^4 \in T(K)$, поэтому $T(\alpha) \subseteq T(K)$ и, как легко видеть, $T(\alpha)$ является ненулевым идеалом $\Phi$-алгебры $T(K)$. Обозначим теперь через $K(\alpha)$ идеал $\Phi$-алгебры $\alpha K$, порожденный множеством $T(\alpha)$; тогда $K(\alpha) = T(\alpha)\cdot(\alpha K)^{\#}$.

Лемма 20. $Z(K(\alpha)) = T(\alpha)$.

Доказательство. Ясно, что $T(\alpha) \subseteq Z(K(\alpha))$. Пусть теперь $x \in Z(K(\alpha))$, $x = \sum_i \tau_i(\alpha k_i) + \sum_i \tau'_i$, где $\tau_i$, $\tau'_i \in T(\alpha)$, $k_i \in K$. Так как $\sum_i \tau'_i \in T(\alpha)$, то нам остается рассмотреть элемент $x' = \sum_i \tau_i(\alpha k_i)$. Заметим, что $x' = x - \sum_i \tau'_i \in Z(K(\alpha))$.

По следствию 1 теоремы 9.4 и теореме 9.3 мы имеем включения $Z(K(\alpha)) \subseteq Z(\alpha K) \subseteq Z(K) = Z \subseteq Z_1$, откуда $x' \in Z_1$. Представим элементы $k_i$ в виде $k_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}v_1 + k'_i$, где $\lambda_{i0}$, $\lambda_{i1} \in Z_1$, $k'_i \in \boldsymbol{K}(\mu)^{\perp}$; тогда $x' = \sum_i \tau_i(\alpha\lambda_{i0}) + [\sum_i \tau_i(\alpha\lambda_{i1})]v_1 + \sum_i \tau_i(\alpha k'_i)$. Так как $x' \in Z_1$, то мы имеем $\sum_i \tau_i(\alpha\lambda_{i1}) = \sum_i \tau_i(\alpha k'_i) = 0$ и $x' = \sum_i \tau_i(\alpha\lambda_{i0})$. По лемме 19 $\alpha\lambda_{i0} \in T(K)$ для всех $i$, откуда $\tau_i(\alpha\lambda_{i0}) \in T(\alpha)$ и $x' \in T(\alpha)$. Лемма доказана.

Напомним, что коммутативное ассоциативное кольцо с единицей Ф называется *кольцом Джекобсона*, если любой его простой идеал является пересечением некоторого семейства максимальных идеалов. Класс колец Джекобсона весьма широк, ибо всякая конечнопорожденная Ф-алгебра с единицей, где Ф — кольцо Джекобсона, будет снова кольцом Джекобсона. (Этот результат, используемый нами в доказательстве следующей теоремы, содержится с полным доказательством в книге Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, «Мир», 1971, стр. 419.) Ввиду того, что кольцо целых чисел $\boldsymbol{Z}$ есть кольцо Джекобсона, то и всякое конечнопорожденное ассоциативно-коммутативное кольцо будет кольцом Джекобсона. Отметим, что в кольцах Джекобсона радикал Джекобсона совпадает с нижним ниль-радикалом.

Теорема 6 (Жевлаков). *Всякое кольцо Кэли — Диксона $K$, конечнопорожденное как Ф-алгебра над кольцом Джекобсона Ф, является $\mathcal{Y}$-полупростым.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Y}(K) \neq (0)$. Рассмотрим в кольце $K$ идеал $\alpha K$ и в кольце $\alpha K$ идеал $K(\alpha)$, где $\alpha$ — элемент из леммы 19. По предложению 9.3 кольца $\alpha K$ и $K(\alpha)$ также являются кольцами Кэли — Диксона. В силу наследственности радикала Жевлакова и первич-

ности колец $K$ и $\alpha K$ мы имеем $\mathcal{J}(\alpha K) = \mathcal{J}(K) \cap \alpha K \neq (0)$ и $\mathcal{J}(K(\alpha)) = K(\alpha) \cap \mathcal{J}(\alpha K) \neq (0)$. По предложению 9.3 мы вновь получаем, что $\mathcal{J}(K(\alpha))$ — кольцо Кэли — Диксона. Но тогда $Z(\mathcal{J}(K(\alpha)) = \mathcal{J}(K(\alpha)) \cap Z(K(\alpha)) \neq (0)$ и $Z(\mathcal{J}(K(\alpha)))$ — ненулевой идеал в $Z(K(\alpha)) = T(\alpha)$. В силу следствия предложения 4 этот идеал $\mathcal{J}$-радикален, поэтому $\mathcal{J}(T(\alpha)) \neq (0)$. В силу наследственности радикала $\mathcal{J}$ мы теперь имеем $\mathcal{J}(T(K)) \supseteq \mathcal{J}(T(\alpha)) \neq (0)$, так как $T(\alpha)$ — идеал Ф-алгебры $T(K)$. По следствию леммы 18 алгебра $T(K)$ является конечнопорожденной алгеброй над кольцом Джекобсона Ф и, следовательно, как отмечалось выше, сама есть кольцо Джекобсона. Отсюда следует, что $\mathcal{J}(T(K))$ — ниль-идеал, и поэтому $\mathcal{N}(T(\alpha)) = \mathcal{N}(Z(K(\alpha))) \neq (0)$. Однако центр $Z(K(\alpha))$ кольца Кэли — Диксона $K(\alpha)$ не содержит нильпотентных элементов. Полученное противоречие доказывает теорему.

В заключение этого параграфа мы выясним, как устроен радикал матричной алгебры Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}(\Phi)$ над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом Ф.

Теорема 7. $\mathcal{J}(\boldsymbol{C}(\Phi)) = \boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi))$.

Доказательство. Пусть $x$ — произвольный элемент из $\boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi))$, $x = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ii}e_{ii} + \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{12}^{(k)}e_{12}^{(k)} + \alpha_{21}^{(k)}e_{21}^{(k)})$, где $\alpha_{ii}$, $\alpha_{ij}^{(k)} \in \mathcal{J}(\Phi)$, $e_{ii}$, $e_{ij}^{(k)}$ — матричные единицы Кэли — Диксона. Непосредственная проверка показывает, что $x^2 = t(x)x - n(x)$, где $t(x) = \alpha_{11} + \alpha_{22}$, $n(x) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \sum_{k=1}^{3} \alpha_{12}^{(k)}\alpha_{21}^{(k)}$. Следовательно, алгебра $\boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi))$ квадратична над своим центром $\mathcal{J}(\Phi)$. По лемме 14 отсюда следует, что алгебра $\boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi))$ квазирегулярна. Так как $\boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi))$ — идеал алгебры $\boldsymbol{C}(\Phi)$, то тем самым доказано, что $\boldsymbol{C}(\mathcal{J}(\Phi)) \subseteq \mathcal{J}(\boldsymbol{C}(\Phi))$.

С другой стороны, пусть $x \in \mathcal{J}(\boldsymbol{C}(\Phi))$, $x = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ii}e_{ii} + \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{12}^{(k)}e_{12}^{(k)} + \alpha_{21}^{(k)}e_{21}^{(k)})$. Нам нужно доказать, что тогда $\alpha_{ii}$, $\alpha_{ij}^{(k)} \in \mathcal{J}(\Phi)$. Докажем вначале, что $\alpha_{ii} \in \mathcal{J}(\Phi)$. Пусть $\alpha$, $\beta$ — произвольные элементы из Ф. Рассмотрим элемент

$(\alpha e_{ii})\,x\,(\beta e_{ii}) = (\alpha\alpha_{ii}\beta)\,e_{ii}$. Так как $x \in \mathcal{Y}(C(\Phi))$, то и $(\alpha\alpha_{ii}\beta)\,e_{ii} \in \mathcal{Y}(C(\Phi))$. Если $x'$ — квазиобратный элемент для $(\alpha\alpha_{ii}\beta)\,e_{ii}$, то легко видеть, что $x' = \gamma_{ii}e_{ii}$, где $\gamma_{ii}$ — квазиобратный элемент для $\alpha\alpha_{ii}\beta$ в кольце $\Phi$. Таким образом, элемент $\alpha\alpha_{ii}\beta$ является квазирегулярным для любых $\alpha,\ \beta \in \Phi$, т. е. элемент $\alpha_{ii}$ порождает в кольце $\Phi$ квазирегулярный идеал. Значит, $\alpha_{ii} \in \mathcal{Y}(\Phi)$. Далее, для любого $\alpha \in \Phi$ мы имеем $x\,(\alpha e_{ji}^{(k)}) = \alpha_{ij}^{(k)}\alpha e_{ii} + \alpha_{jj}\alpha e_{ji}^{(k)} + \sum_{k=1}^{3} \beta_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)}$ для некоторых $\beta_{ij}^{(k)} \in \Phi$. Так как $x\,(\alpha e_{ji}^{(k)}) \in \mathcal{Y}(C(\Phi))$, то по доказанному выше $\alpha_{ij}^{(k)}\alpha \in \mathcal{Y}(\Phi)$, откуда $\alpha_{ij}^{(k)}\Phi \subseteq \mathcal{Y}(\Phi)$ и $\alpha_{ij}^{(k)} \in \mathcal{Y}(\Phi)$. Тем самым доказано, что $x \in C(\mathcal{Y}(\Phi))$.

Теорема доказана.

Следствие. *Существует $\mathcal{Y}$-радикальное кольцо Кэли — Диксона.*

Действительно, пусть $\Phi$ — квазирегулярное кольцо без делителей нуля (например, кольцо формальных степенных рядов без свободных членов). Тогда матричная алгебра Кэли — Диксона $C(\Phi)$ является кольцом Кэли — Диксона — мы предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно,— и при этом $\mathcal{Y}(C(\Phi)) = C(\mathcal{Y}(\Phi)) = C(\Phi)$.

**Упражнения**

**1.** Пусть $K$ — кольцо Кэли — Диксона с центром $Z$. Доказать, что $\mathcal{Y}(K) = (0)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{Y}(Z) = (0)$.

Указание. Если $0 \neq z \in \mathcal{Y}(Z)$ и $I$ — квадратичный над $Z$ идеал кольца $K$, то идеал $zI$ квадратичен над квазирегулярным кольцом $zZ \subseteq \mathcal{Y}(Z)$.

**2.** Пусть $K$ — кольцо Кэли — Диксона. Доказать, что множество

$$I = \{a \in K \mid t\,(ak) \in K \quad \text{для любого} \quad k \in K^{\#}\}$$

является наибольшим квадратичным над центром идеалом кольца $K$.

Указание. При доказательстве того, что $I$ — идеал, воспользоваться соотношениями (2.22).

**3.** В условиях предыдущего упражнения доказать, что $[x, y]^2$, $[[x, y], z] \in I$ для любых элементов $x, y, z \in K$.

ЛИТЕРАТУРА

Джекобсон [46], Жевлаков [72—75], Желябин [81], Клейнфелд [95], Маккриммон [132], Смайли [215], Шестаков [269, 271, 273].

*ГЛАВА 11*

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

Теория представлений алгебр состоит из двух взаимосвязанных частей: теории правых и левых представлений и теории бипредставлений. В хорошо развитой теории ассоциативных алгебр роль представлений несомненно значительнее роли бипредставлений, в то время как в неассоциативном случае до недавнего времени в основном использовалась концепция бипредставления алгебр, восходящая к Эйленбергу. Исключения составляют различные многообразия коммутативных и антикоммутативных алгебр, где, по сути дела, понятия представления и бипредставления совпадают.

В настоящей главе мы вводим понятия правого представления и правого модуля для алгебр произвольного многообразия $\mathfrak{M}$. Основной нашей целью является получение характеризации радикала Жевлакова произвольной альтернативной алгебры в терминах теории представлений, аналогичной известной характеризации радикала Джекобсона в ассоциативном случае. Мы изучаем свойства неприводимых правых альтернативных представлений и модулей. Оказывается, что каждый такой модуль является либо «ассоциативным справа», либо «ассоциативным слева». Это позволяет нам охарактеризовать примитивные альтернативные алгебры как алгебры, обладающие точными неприводимыми модулями. В силу результатов предыдущей главы отсюда легко выводится нужная нам характеризация радикала Жевлакова.

Результаты данной главы получены Жевлаковым, Слинько и Шестаковым.

## § 1. Определения и предварительные результаты

Пусть $V$ — некоторый Ф-модуль. Через $T(V)$ мы будем обозначать тензорную алгебру Ф-модуля $V$ (см. Ленг С., Алгебра, стр. 470):

$$T(V) = \Phi\cdot 1 \oplus V^{(1)} \oplus \ldots \oplus V^{(r)} \oplus \ldots,$$

где $V^{(r)} = V \otimes \ldots \otimes V$ (тензорное произведение, взятое $r$ раз). Напомним, что всякий гомоморфизм Ф-модулей $\varphi\colon V \to W$ индуцирует однозначно определенный гомоморфизм тензорных алгебр $T(\varphi)\colon T(V) \to T(W)$ такой, что $T(\varphi)(1) = 1$ и $T(\varphi)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = \varphi(v_1) \otimes \ldots \otimes \varphi(v_r)$ для любых $v_1, \ldots, v_r \in V$. Отсюда, в частности, следует, что всякое Ф-линейное отображение $\varphi\colon V \to B$ модуля $V$ в ассоциативную алгебру $B$ с единицей 1 индуцирует однозначный гомоморфизм ассоциативных алгебр $T(\varphi)\colon T(V) \to B$ такой, что $T(\varphi)(1) = 1$ и $T(\varphi)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = \varphi(v_1) \ldots \varphi(v_r)$ для любых $v_1, \ldots, v_r \in V$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Ф-алгебр и $\Phi_{\mathfrak{M}} = \Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ — свободная алгебра в многообразии $\mathfrak{M}$ от счетного множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим тензорную алгебру $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$ модуля $\Phi_{\mathfrak{M}}$. Элементы алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$ мы будем обозначать буквами $f, g, h, \ldots$, а элементы тензорной алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$ — буквами $F, G, H, \ldots$ Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in T(\Phi_{\mathfrak{M}})$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \alpha\cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Если $A$ — некоторая алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$, то через $F(a_1, \ldots, a_n)$ мы будем обозначать следующий элемент тензорной алгебры $T(A)$:

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \\ = \alpha\cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}(a_1, \ldots, a_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(a_1, \ldots, a_n).$$

Если $\varphi\colon \Phi_{\mathfrak{M}} \to A$ — гомоморфизм Ф-алгебр такой, что $\varphi(x_i) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $T(\varphi)\colon T(\Phi_{\mathfrak{M}}) \to T(A)$ — индуцированный гомоморфизм тензорных алгебр, то легко видеть, что $F(a_1, \ldots, a_n) = T(\varphi)(F(x_1, \ldots, x_n))$.

Пусть теперь $\rho$: $A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ — некоторое Ф-линейное отображение алгебры $A$ в алгебру эндоморфизмов Ф-модуля $M$ и $T(\rho)$: $T(A) \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ — индуцированный гомоморфизм тензорной алгебры $T(A)$. Элемент $F(x_1, \ldots, x_n)$ тензорной алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$ будем называть *тождеством отображения* $\rho$, если $T(\rho)(F(a_1, \ldots, a_n)) = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$. Иначе говоря, элемент $F(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)$ является тождеством отображения $\rho$, если для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\alpha E_M + \sum_i [f_1^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)]^\rho \ldots [f_{n_i}^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)]^\rho = 0,$$

где $E_M$ — тождественный эндоморфизм модуля $M$. В этом случае будем также говорить, что отображение $\rho$ удовлетворяет тождеству $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Например, если $F(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2 - x_1x_2$, то отображение $\rho$: $A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ удовлетворяет тождеству $F(x_1, x_2)$, если $a^\rho b^\rho - (ab)^\rho = 0$ для любых $a, b \in A$.

Рассмотрим теперь Ф-линейное отображение $R$ алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$ в алгебру эндоморфизмов Ф-модуля $\Phi_{\mathfrak{M}}$, ставящее в соответствие элементу $f \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ оператор правого умножения $R_f$. Пусть $T(R)$: $T(\Phi_{\mathfrak{M}}) \to \mathrm{End}(\Phi_{\mathfrak{M}})$ — индуцированный гомоморфизм тензорной алгебры. Ядро $\mathrm{Ker}\ T(R)$ этого гомоморфизма обозначим через $I_{\mathfrak{M}}$ и назовем *идеалом R-тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$. Элементы идеала $I_{\mathfrak{M}}$ будем называть *R-тождествами* многообразия $\mathfrak{M}$.

Если Ф-линейное отображение $\rho$: $A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ удовлетворяет всем $R$-тождествам многообразия $\mathfrak{M}$, то будем называть $\rho$ *правым представлением алгебры A в многообразии* $\mathfrak{M}$ (*правым* $\mathfrak{M}$-*представлением*). В этом случае Ф-модуль $M$ с билинейной композицией $m \cdot a = ma^\rho$, $m \in M$, $a \in A$, будем называть *правым модулем для алгебры A* (*A-модулем*) *в многообразии* $\mathfrak{M}$.

*Ядром* представления $\rho$ называется множество $\mathrm{Ker}_\rho(A) = \{a \in A \mid a^\rho = 0\}$. Через $K_\rho(A)$ мы обозначим наибольший идеал алгебры $A$, содержащийся в $\mathrm{Ker}_\rho(A)$. Представление $\rho$ (модуль $M$) называется *точным*, если $\mathrm{Ker}_\rho(A) = (0)$, и *почти точным*, если $K_\rho(A) = (0)$.

Естественным образом, как и в ассоциативном случае [46], определяются также понятия *подмодуля* и *неприводимого модуля* (*представления*), а для алгебр с единицей — понятие *унитального модуля* (*представления*).

Пусть по-прежнему $A$ — алгебра многообразия $\mathfrak{M}$. Обозначим через $I_{\mathfrak{M}}[A]$ идеал тензорной алгебры $T(A)$, состоящий из элементов вида $F(a_1, \ldots, a_n)$, где $F(x_1, \ldots, x_n) \in I_{\mathfrak{M}}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A) = T(A)/I_{\mathfrak{M}}[A]$ и отображение $\mathscr{R}: A \to \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A)$, переводящее $a \in A$ в смежный класс $a + I_{\mathfrak{M}}[A] \in \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A)$. Образ элемента $a$ при отображении $\mathscr{R}$ будем обозначать через $\mathscr{R}_a$. Единицу алгебры $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A)$ обозначим через $\mathbf{1}$.

Предложение 1. *Отображение* $\rho: A \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$ *является правым* $\mathfrak{M}$*-представлением алгебры* $A$ *в том и только в том случае, когда существует гомоморфизм* $\varphi: \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A) \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$ *такой, что* $\varphi(\mathbf{1}) = E_M$ *и* $\mathscr{R} \circ \varphi = \rho$, *т. е. следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} & \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A) & \\ {}^{\mathscr{R}}\nearrow & & \searrow^{\varphi} \\ A & \xrightarrow[\rho]{} & \mathrm{End}_{\Phi}(M) \end{array}$$

Доказательство. Ясно, что всякое отображение вида $A \xrightarrow{\mathscr{R}} \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_{\Phi}(M)$, где $\varphi$ — гомоморфизм, является правым $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $A$. Обратно, пусть $\rho: A \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$ — некоторое правое $\mathfrak{M}$-представление. Отображение $\rho$ индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр $T(\rho): T(A) \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$, при котором $T(\rho)(1) = E_M$. По определению правого представления имеем $I_{\mathfrak{M}}[A] \subseteq \mathrm{Ker}\, T(\rho)$, т. е. отображение $T(\rho)$ постоянно на каждом смежном классе по $I_{\mathfrak{M}}[A]$. Полагая теперь $\varphi(F + I_{\mathfrak{M}}[A]) = T(\rho)(F)$ для любого $F \in T(A)$, мы получим искомый гомоморфизм $\varphi: \mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A) \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$. Предложение доказано.

Алгебру $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A)$ назовем *универсальной алгеброй для правых представлений алгебры* $A$ *в многообразии* $\mathfrak{M}$.

Предложение 1 дает нам возможность свести изучение представлений неассоциативной алгебры $A$ к изучению представлений ассоциативной алгебры $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A)$. Мы можем всякий правый $A$-модуль в многообразии $\mathfrak{M}$ рассматривать как правый ассоциативный $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A)$-модуль. При этом легко видеть, что правое $\mathfrak{M}$-представление

$$\rho\colon\ A \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_{\Phi}(M)$$

неприводимо тогда и только тогда, когда $\varphi$ — неприводимое представление алгебры $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A)$.

Докажем одно важное свойство $\mathfrak{M}$-представлений.

Лемма 1. *Пусть $A$ — алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$ и $\rho\colon A \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$ — правое $\mathfrak{M}$-представление алгебры $A$. Пусть, далее, $B$ — идеал алгебры $A$, содержащийся в $\mathrm{Ker}_{\rho}(A)$. Тогда отображение $\bar{\rho}\colon \bar{A} \to \mathrm{End}_{\Phi}(M)$ алгебры $\bar{A} = A/B$, определенное по правилу $\bar{\rho}(a+B) = \rho(a)$, является правым $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $\bar{A}$.*

Доказательство. Нужно проверить, что отображение $\bar{\rho}$ удовлетворяет всем тождествам из $I_{\mathfrak{M}}$. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in I_{\mathfrak{M}}$,

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \alpha \cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$, ввиду того, что отображение $\rho$ удовлетворяет тождеству $F(x_1, \ldots, x_n)$, мы имеем

$$T(\bar{\rho})\ (F(a_1+B, \ldots, a_n+B)) = \\ = \alpha E_M + \sum_i [f_1^{(i)}(a_1+B, \ldots, a_n+B)]^{\bar{\rho}} \ldots \\ \ldots [f_{n_i}^{(i)}(a_1+B, \ldots, a_n+B)]^{\bar{\rho}} = \\ = \alpha E_M + \sum_i [f_1^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)+B]^{\bar{\rho}} \ldots \\ \ldots [f_{n_i}^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)+B]^{\bar{\rho}} = \\ = \alpha E_M + \sum_i [f_1^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)]^{\rho} \ldots [f_{n_i}^{(i)}(a_1, \ldots, a_n)]^{\rho} = \\ = T(\rho)\ (F(a_1, \ldots, a_n)) = 0,$$

т. е. отображение $\bar{\rho}$ удовлетворяет тождеству $F(x_1, \ldots, x_n)$. Лемма доказана.

Для того чтобы узнать, является ли отображение $\rho\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ правым $\mathfrak{M}$-представлением, совсем не обязательно проверять для отображения $\rho$ все $R$-тождества многообразия $\mathfrak{M}$. Нужно проверить лишь те $R$-тождества, из которых все остальные следуют. Рассмотрим эту ситуацию с формальной точки зрения.

Пусть $\Omega_0$ — множество всех эндоморфизмов алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$. Каждый эндоморфизм $\varphi$ из $\Omega_0$ индуцирует единственный эндоморфизм $T(\varphi)$ тензорной алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$. Обозначим через $\Omega$ множество всех эндоморфизмов алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$ вида $T(\varphi)$, где $\varphi \in \Omega_0$. Идеал алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$, переходящий в себя при всех эндоморфизмах из $\Omega$, называется *$\Omega$-характеристическим идеалом*.

Предложение 2. *Идеал $I_{\mathfrak{M}}$ является $\Omega$-характеристическим идеалом алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$.*

Доказательство. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) = \alpha\cdot 1 + \sum_i f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \in I_{\mathfrak{M}}$ и $T(\varphi)$ — эндоморфизм алгебры $T(\Phi_{\mathfrak{M}})$, индуцированный эндоморфизмом $\varphi$ алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$. Пусть $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нам нужно показать, что $T(\varphi)(F(x_1, \ldots, x_n)) = F(y_1, \ldots, y_n) \in I_{\mathfrak{M}}$. Так как $I_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Ker}\, T(R)$, то мы имеем

$$0 = T(R)(F(x_1, \ldots, x_n)) = \alpha E_{\Phi_{\mathfrak{M}}} + \sum_i R_{f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)} \ldots R_{f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Ввиду того, что $\Phi_{\mathfrak{M}}$ — свободная алгебра, а $x_1, \ldots, x_n$ — свободные порождающие, из этого равенства следует, что

$$T(R)(F(y_1, \ldots, y_n)) = \alpha E_{\Phi_{\mathfrak{M}}} + \sum_i R_{f_1^{(i)}(y_1, \ldots, y_n)} \ldots R_{f_{n_i}^{(i)}(y_1, \ldots, y_n)} = 0,$$

т. е. $F(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Ker}\, T(R) = I_{\mathfrak{M}}$. Предложение доказано.

Всякую систему порождающих идеала $I_{\mathfrak{M}}$ как $\Omega$-характеристического идеала мы назовем *системой определяющих $R$-тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$.

Предложение 3. *Подмножество $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\} \subseteq I_{\mathfrak{M}}$ является системой определяющих $R$-тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда для всякой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ любое $\Phi$-линейное отображение $\rho\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$, удовлетворяющее всем тождествам из $\{F_\alpha\}$, является правым $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $A$.*

Доказательство. Пусть $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$ — система определяющих $R$-тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, т. е. идеал $I_{\mathfrak{M}}$ как $\Omega$-характеристический идеал порождается множеством $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$. Легко видеть, что $I_{\mathfrak{M}}$ как обыкновенный идеал порождается элементами вида $F_\alpha(y_1, \ldots, y_{n_\alpha})$, где $y_1, \ldots, y_{n_\alpha}$ — произвольные элементы алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$. Если отображение $\rho$ удовлетворяет всем тождествам из $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$, то оно удовлетворяет и всем тождествам вида $F_\alpha(y_1, \ldots, y_{n_\alpha})$, а следовательно, и всем тождествам из $I_{\mathfrak{M}}$. Значит, $\rho$ является правым $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $A$.

Обратно, пусть всякое отображение, удовлетворяющее всем тождествам из $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$, является правым $\mathfrak{M}$-представлением. Предположим, что $\Omega$-характеристический идеал $\mathcal{F}$, порожденный множеством $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$, строго содержится в $I_{\mathfrak{M}}$. Рассмотрим алгебру $A = T(\Phi_{\mathfrak{M}})/\mathcal{F}$ и отображение

$$\rho\colon \Phi_{\mathfrak{M}} \xrightarrow{T} T(\Phi_{\mathfrak{M}}) \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{i} \mathrm{End}_\Phi(M),$$

где $T$ — вложение, $\tau$ — канонический гомоморфизм, а $i$ — некоторое изоморфное представление ассоциативной алгебры $A$. Отображение $\rho$ удовлетворяет всем тождествам из $\{F_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha})\}$ и по условию является правым $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$. Однако этого не может быть, так как отображение $\rho$ не удовлетворяет некоторым тождествам из $I_{\mathfrak{M}}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{F} = I_{\mathfrak{M}}$.

Предложение доказано.

Вопрос о нахождении системы определяющих $R$-тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ часто оказывается довольно сложным, даже если нам известны определяющие тождества многообразия $\mathfrak{M}$. Например, до сих пор неизвестно ни одной системы определяющих $R$-тождеств для многообразия альтернативных алгебр. Неизвестно даже, существует ли такая конечная система. Вообще неясно, обладает ли всякое конечно базируемое многообразие (т. е. многообразие, заданное конечным числом определяющих тождеств) конечной системой определяющих $R$-тождеств.

В случае многообразия Ass ассоциативных алгебр легко видеть, что $I_{\mathrm{Ass}}$ как $\Omega$-характеристический идеал порождается одним элементом $F(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2 - x_1x_2$. Легко находится также система определяющих $R$-тождеств для всякого многообразия $\mathfrak{M}$ коммутативных или антикоммутативных алгебр, если нам известны определяющие тождества многообразия $\mathfrak{M}$ (см. упражнения).

Покажем теперь, что всякая алгебра из многообразия $\mathfrak{M}$ обладает достаточно большим запасом правых $\mathfrak{M}$-представлений.

Пусть алгебра $A$ является подалгеброй некоторой алгебры $B$ из многообразия $\mathfrak{M}$. Обозначим через $R_1^B(A)$ подалгебру алгебры $\mathrm{End}_\Phi(B)$, порожденную множеством $R^B(A)$ и тождественным эндоморфизмом $E_B$.

Предложение 4. *Пусть отображение* $R^B\colon A \to R_1^B(A)$ *переводит* $a \in A$ *в оператор правого умножения* $R_a^B = R_a \in R^B(A)$, $\varphi$ — *произвольный гомоморфизм алгебры* $R_1^B(A)$ *в алгебру* $\mathrm{End}_\Phi(M)$ *такой, что* $\varphi(E_B) = E_M$, $\rho = R^B \circ \varphi$ — *композиция отображений* $R^B$ *и* $\varphi$:

$$\rho\colon A \xrightarrow{R^B} R_1^B(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_\Phi(M).$$

*Тогда* $\rho$ *является правым* $\mathfrak{M}$-*представлением алгебры* $A$.

Доказательство. Достаточно проверить, что отображение $R^B$ удовлетворяет всем $R$-тождествам многообразия $\mathfrak{M}$. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot 1 + \sum\limits_i f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) \in I_{\mathfrak{M}}$. По определению идеала $I_{\mathfrak{M}}$ это значит, что в алгебре $\mathrm{End}(\Phi_{\mathfrak{M}})$ верно соотношение

$$\alpha E_{\Phi_{\mathfrak{M}}} + \sum_i R_{f_1^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)} \ldots R_{f_{n_i}^{(i)}(x_1, \ldots, x_n)} = 0.$$

Так как $\Phi_{\mathfrak{M}}$ — свободная алгебра и $x_1, \ldots, x_n$ — свободные порождающие, из этого равенства следует, что для любых $b_1, \ldots, b_n \in B$ в алгебре $\mathrm{End}_\Phi(B)$ верно соотношение

$$\alpha E_B + \sum_i R_{f_1^{(i)}(b_1,\ldots,b_n)} \ldots R_{f_{n_i}^{(i)}(b_1,\ldots,b_n)} = 0.$$

Иначе говоря, отображение $R\colon B \to \mathrm{End}_\Phi(B)$, ставящее в соответствие элементу $b \in B$ оператор правого умножения $R_b$, удовлетворяет тождеству $F$. Так как отображение $R^B\colon A \to R_1^B(A)$ является ограничением отображения $R$ на $A$, то оно также удовлетворяет тождеству $F$. Предложение доказано.

Правые представления алгебры $A$, определенные в предложении 4, будем называть *правыми регулярными $\mathfrak{M}$-представлениями*.

Соответствующая универсальная алгебра существует и для класса правых регулярных $\mathfrak{M}$-представлений. Для произвольной алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ рассмотрим алгебру $C = C(A) \in \mathfrak{M}$, являющуюся свободным $\mathfrak{M}$-произведением (см. Мальцев А. И., Алгебраические системы, стр. 306) алгебры $A$ и свободной однорожденной алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[x]$ многообразия $\mathfrak{M}$: $C = \Phi_{\mathfrak{M}}[x] *_{\mathfrak{M}} A$. Обозначим подалгебру $R_1^C(A)$ через $R_{\mathfrak{M}}^*(A)$, отображение $R^C$ через $R^*$ и тождественный эндоморфизм $E_C$ — через $\mathbf{1}$.

Предложение 5. *Отображение $\rho\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ является правым регулярным $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $A$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\varphi\colon R_{\mathfrak{M}}^*(A) \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ такой, что $\varphi(\mathbf{1}) = E_\Phi$ и $\rho = R^* \circ \varphi$, т. е. следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} & R_{\mathfrak{M}}^*(A) & \\ {}^{R^*}\nearrow & & \searrow^{\varphi} \\ A & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{End}_\Phi(M) \end{array}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для всякой алгебры $B$ из $\mathfrak{M}$, содержащей $A$ в качестве подалгебры, существует гомоморфизм $\psi\colon R_1^C(A) \to \mathrm{End}_\Phi(B)$ такой, что $\psi(E_C) = E_B$ и $R^B = R^C \circ \psi$. Искомый гомоморфизм $\psi$ будет существовать, если из

справедливости в $\mathrm{End}_\Phi(C)$ соотношения

$$\alpha E_C + \sum_i R^C_{a_{i1}} R^C_{a_{i2}} \ldots R^C_{a_{ik_i}} = 0 \qquad (1)$$

всегда следует справедливость в $\mathrm{End}_\Phi(B)$ соотношения

$$\alpha E_B + \sum_i R^B_{a_{i1}} R^B_{a_{i2}} \ldots R^B_{a_{ik_i}} = 0, \qquad (2)$$

где $\alpha \in \Phi$, $a_{ij} \in A$. Докажем, что это условие всегда выполнено.

Соотношение (1) влечет справедливость в $C$ равенства

$$\alpha x + x \sum_i R^C_{a_{i1}} R^C_{a_{i2}} \ldots R^C_{a_{ik_i}} = 0. \qquad (3)$$

Далее, для любого $b \in B$ существует гомоморфизм алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[x]$ в $B$, переводящий $x$ в $b$. По определению свободного $\mathfrak{M}$-произведения тогда существует гомоморфизм $\vartheta$ алгебры $C$ в $B$, который тождествен на $A$ и переводит $x$ в $b$. Применяя гомоморфизм $\vartheta$ к равенству (3), мы получаем равенство

$$\alpha b + b \sum_i R^B_{a_{i1}} R^B_{a_{i2}} \ldots R^B_{a_{ik_i}} = 0,$$

откуда в силу произвольности $b$ следует (2).

Предложение доказано.

Алгебра $R^*_{\mathfrak{M}}(A)$, как легко видеть, единственна с точностью до изоморфизма. Назовем ее *универсальной алгеброй правых умножений* алгебры $A$ в многообразии $\mathfrak{M}$. Образ элемента $a \in A$ при отображении $R^*$ будем обозначать через $R^*_a$.

Следствие. *Следующие два условия эквивалентны:*

1) *всякое правое $\mathfrak{M}$-представление алгебры $A$ регулярно*;

2) *алгебры $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}}(A)$ и $R^*_{\mathfrak{M}}(A)$ изоморфны.*

Доказательство очевидно, ввиду предложений 1 и 5.

Во многих классических многообразиях алгебр все правые представления являются регулярными. Например, если $\mathfrak{M} = \mathrm{Ass}$ — многообразие ассоциативных алгебр, то легко видеть, что $\mathscr{R}_{\mathrm{Ass}}(A) \cong R^*_{\mathrm{Ass}}(A) \cong A^{\#}$ для любой алгебры $A \in \mathrm{Ass}$. Все правые $\mathfrak{M}$-представления являются регулярными и в случае, когда $\mathfrak{M}$ — какое-либо многообразие коммутативных или антикоммутатив-

ных алгебр (см. упражнения). В то же время в многообразии Alt альтернативных алгебр существуют правые представления, не являющиеся регулярными (см. [214]). Заметим еще, что для регулярных представлений аналог леммы 1, вообще говоря, неверен (см. [214]).

В заключение этого параграфа мы покажем, что еще одним из источников правых $\mathfrak{M}$-представлений являются $\mathfrak{M}$-бипредставления.

Пара отображений $(\mu, \nu)$ алгебры $A$ из многообразия $\mathfrak{M}$ в алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}_\Phi(M)$ модуля $M$ называется *бипредставлением* алгебры $A$ в многообразии $\mathfrak{M}$ (*$\mathfrak{M}$-бипредставлением*), если *расщепляемое нулевое расширение* $S = A + M$ алгебры $A$ с ядром $M$, т. е. прямая сумма модулей $A$ и $M$ с умножением

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = m_1 a_2^\nu + m_2 a_1^\mu + a_1 a_2,$$

принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$. В этом случае модуль $M$ с билинейными композициями $a \cdot m = ma^\mu$, $m \cdot a = ma^\nu$, $m \in M$, $a \in A$, называется *бимодулем* для алгебры $A$ (*$A$-бимодулем*) в многообразии $\mathfrak{M}$. Отображение $\mu\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ называется *левой компонентой бипредставления* $(\mu, \nu)$, а $\nu$ — *правой компонентой*.

Предложение 6. *Для всякого $\mathfrak{M}$-бипредставления $(\mu, \nu)$ алгебры $A$ из многообразия $\mathfrak{M}$ правая компонента $\nu$ этого бипредставления является правым регулярным $\mathfrak{M}$-представлением алгебры $A$.*

Доказательство. Пусть $(\mu, \nu)$ — бипредставление алгебры $A$ в алгебре $\mathrm{End}_\Phi(M)$, и пусть $S = A + M$ — соответствующее расщепляемое нулевое расширение. По условию алгебра $S$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$; кроме того, $A$ является подалгеброй алгебры $S$. Наконец, для любых $a \in A$, $m \in M$ мы имеем $ma^\nu = m \cdot a = mR_a^S$, откуда легко следует, что существует гомоморфизм $\varphi\colon R^S(A) \to \mathrm{End}_\Phi(M)$, для которого $\nu = R^S \circ \varphi$. Тем самым все доказано.

**Упражнения**

1. Доказать, что если многообразие $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто, то отображение $\mathcal{R}\colon A \to \mathcal{R}_\mathfrak{M}(A)$ является инъективным для всякой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$.

**2.** Доказать, что если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то существует эпиморфизм $\varphi\colon \mathcal{R}_{\mathfrak{M}_2}(A) \to \mathcal{R}_{\mathfrak{M}_1}(A)$, для которого $\varphi(1) = 1$ и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{E_A} & A \\ \mathcal{R}_2\downarrow & & \mathcal{R}_1\downarrow \\ \mathcal{R}_{\mathfrak{M}_2}(A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{R}_{\mathfrak{M}_1}(A) \end{array}$$

**3.** Доказать, что для всякого гомоморфизма $\tau\colon A \to A'$ алгебр из многообразия $\mathfrak{M}$ существуют единственные гомоморфизмы $\mathcal{R}(\tau)\colon \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A) \to \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A')$ и $R^*(\tau)\colon R^*_{\mathfrak{M}}(A) \to R^*_{\mathfrak{M}}(A')$ соответствующих универсальных алгебр такие, что $\mathcal{R}(\tau)(1) = 1$, $R^*(\tau)(1) = 1$ и следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tau} & A' \\ \mathcal{R}\downarrow & & \mathcal{R}\downarrow \\ \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A) & \xrightarrow{\mathcal{R}(\tau)} & \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tau} & A' \\ R^*\downarrow & & R^*\downarrow \\ R^*_{\mathfrak{M}}(A) & \xrightarrow{R^*(\tau)} & R^*_{\mathfrak{M}}(A') \end{array}$$

**4.** Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие Ф-алгебр. Доказать, что для всякой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ и для любого расширения $K$ кольца операторов Ф имеет место следующий изоморфизм:

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(K \otimes_\Phi A) \cong K \otimes_\Phi \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}(A).$$

**5.** Алгебра $A$ называется *правоальтернативной*, если в алгебре $A^{\#}$ верно тождество

$$[(xy)\,z]\,y = x\,[(yz)\,y].$$

Пусть $A$ — правоальтернативная алгебра, $\rho\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ — Ф-линейное отображение, удовлетворяющее тождествам

$$F(x_1) = x_1 \otimes x_1 - x_1^2, \tag{4}$$

$$G(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 - (x_1x_2)\,x_1. \tag{5}$$

Доказать, что $\rho$ является правым регулярным правоальтернативным представлением алгебры $A$.

Указание. Доказать, что пара отображений $(0, \rho)$ является правоальтернативным бипредставлением алгебры $A$.

**6.** Доказать, что в качестве системы определяющих $R$-тождеств для многообразия R Alt правоальтернативных алгебр можно взять тождества (4), (5).

**7.** Доказать, что для всякой конечномерной правоальтернативной алгебры $A$ универсальная алгебра $\mathcal{R}(A)$ для правых правоальтернативных представлений алгебры $A$ также конечномерна.

**8.** Пусть $A$ — ассоциативная алгебра. Доказать, что всякий левый ассоциативный $A$-модуль является правым правоальтернативным $A$-модулем.

9. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое однородное многообразие коммутативных или антикоммутативных алгебр. Тогда для всякой алгебры $A$ из $\mathfrak{M}$ и для любого $\mathfrak{M}$-представления $\rho$ алгебры $A$ пара отображений $(\rho, \rho)$ в коммутативном случае и $(-\rho, \rho)$ в антикоммутативном случае является $\mathfrak{M}$-бипредставлением алгебры $A$.

10. Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый однородный элемент свободной коммутативной или свободной антикоммутативной алгебры $F$. Произвольную частичную линеаризацию первой степени элемента $f$ можно записать в виде

$$f_i^{(1)}(x_1, \ldots, x_n; x_j) = x_j \sum_k R_{m_{i1}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)} \ldots R_{m_{in_k}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)}$$

для подходящих элементов $m_{ij}^{(s)}(x_1, \ldots, x_n)$ свободной алгебры $F$. Сопоставим элементу $f$ следующие $n$ элементов $T_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$, тензорной алгебры $T(F)$, полагая

$$T_i(f) = \sum_k m_{i1}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) \otimes \ldots \otimes m_{in_k}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть теперь некоторое однородное многообразие $\mathfrak{M}$ коммутативных или антикоммутативных алгебр задано системой однородных тождеств $\{f_\alpha(x_1, \ldots, x_{n_\alpha}) \mid \alpha \in A\}$. Тогда в качестве системы определяющих $R$-тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ можно взять систему $\{T_i(f_\alpha) \mid i = 1, \ldots, n_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

## § 2. Представления композиционных алгебр

В этом параграфе мы будем изучать свойства неприводимых альтернативных модулей над композиционными алгебрами.

Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться унитальными модулями.

Лемма 2. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с единицей 1. Тогда всякое неприводимое альтернативное представление алгебры $A$ унитально.*

Доказательство. Заметим вначале, что, ввиду тождества правой альтернативности и правого тождества Муфанг, идеал $I_{\mathrm{Alt}}$ альтернативных $R$-тождеств содержит следующие тождества:

$$F(x_1) = x_1 \otimes x_1 - x_1^2, \tag{4}$$

$$G(x_1, x_2) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 - x_1x_2x_1. \tag{5}$$

Пусть теперь $\rho$ — неприводимое представление алгебры $A$ и $M$ — соответствующий неприводимый $A$-модуль. Рассмотрим множество $M_0 = \{m - m\cdot 1 \mid m \in M\}$. Из $R$-тождества (4) и его линеаризации следует, что для любых

$a, b \in A$ мы имеем $(a^\rho)^2 = (a^2)^\rho$, $a^\rho \circ b^\rho = (a \circ b)^\rho$. Теперь для любого $a \in A$ мы имеем $(m - m\cdot 1)\cdot a = m\cdot a + (m\cdot a)\cdot 1 - m\cdot(a \circ 1) = (m\cdot a)\cdot 1 - m\cdot a \in M_0$, откуда следует, что $M_0$ является подмодулем модуля $M$. Если $M$ не унитален, то $M_0 \neq (0)$ и, ввиду неприводимости, $M_0 = M$. Далее, $(m - m\cdot 1)\cdot 1 = m\cdot 1 - m\cdot 1^2 = 0$ для любого $m \in M$, поэтому $M\cdot 1 = (0)$. Наконец, ввиду $R$-тождества (5), для любых $a, b \in A$ мы имеем $(aba)^\rho = a^\rho b^\rho a^\rho$, поэтому $m\cdot a = m\cdot(1a1) = ((m\cdot 1)\cdot a)\cdot 1 = 0$ для любых $m \in M$, $a \in A$. Значит, $M\cdot A = (0)$, что противоречит неприводимости $M$. Лемма доказана.

Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $M$ — альтернативный $A$-модуль. Для $a, b \in A$, $m \in M$ мы положим

$$(m, a, b) = (m\cdot a)\cdot b - m\cdot(ab),$$

$$\{m, a, b\} = (m\cdot a)\cdot b - m\cdot(ba).$$

Многие из доказываемых в этом параграфе утверждений справедливы одновременно и для композиции $(m, a, b)$, и для композиции $\{m, a, b\}$. В связи с этим мы введем общее обозначение $[m, a, b]$ для этих трилинейных композиций. Естественно, что все выражения $[m, a, b]$, встречающиеся в одной формуле или на протяжении одного фиксированного доказательства, означают только какую-то одну из композиций $(m, a, b)$, $\{m, a, b\}$.

Лемма 3. *Для любых $a, b \in A$, $m \in M$ верны соотношения*

$$[m, a, a] = 0, \tag{6}$$

$$\{(m, a, b), a, b\} = 0, \tag{7}$$

$$(\{m, a, b\}, a, b) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Соотношение (6) вытекает из $R$-тождества (4). Соотношения (7) и (8) можно вывести из известных нам тождеств, справедливых в альтернативных алгебрах (см. лемму 7.9), но мы докажем их сейчас независимо. Докажем, например, (8). Ввиду линеаризованного соотношения (6), нам достаточно доказать, что $(\{m, a, b\}, b, a) = 0$. В силу $R$-тождеств (4) и (5) и их линеаризаций, для представления $\rho$, соответствующего

модулю $M$, мы имеем

$$(a^\rho b^\rho - (ba)^\rho)(b^\rho a^\rho - (ba)^\rho) =$$
$$= a^\rho b^\rho b^\rho a^\rho - (ba)^\rho b^\rho a^\rho - a^\rho b^\rho (ba)^\rho + (ba)^\rho (ba)^\rho =$$
$$= (ab^2a)^\rho - ((ba)ba + ab(ba))^\rho + (baba)^\rho = 0,$$

откуда следует (8). Аналогично доказывается (7). Лемма доказана.

Модуль $M$ мы назовем *ассоциативным справа* (*слева*), если $M$ обладает такой системой порождающих элементов $\{m_i\}$, что $(m_i, a, b) = 0$ (соответственно $\{m_i, a, b\} = 0$) для любого $m_i \in \{m_i\}$ и любых $a, b \in A$.

Мы хотим доказать, что всякий неприводимый альтернативный модуль над композиционной алгеброй либо ассоциативен справа, либо ассоциативен слева.

Далее в этом параграфе всюду $A$ — композиционная алгебра над полем $F$, $M$ — неприводимый альтернативный $A$-модуль. Заметим, что по лемме 2 модуль $M$ является унитальным $A$-модулем.

Лемма 4. *Для любых $a, b \in A$, $m \in M$ верны соотношения*

$$[m, a, ab] = \alpha [m, a, b]\cdot a + \beta t(a) [m, a, b], \qquad (9)$$
$$[m, a, ba] = \alpha' [m, a, b]\cdot a + \beta' t(a) [m, a, b], \qquad (10)$$

*где $t(a)$ — след элемента $a$; $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ — некоторые элементы поля $F$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $[,,]$ есть $(,,)$. По тождеству Муфанг имеем $(m, a, ab) = (m, a, b)\cdot a$, что доказывает (9). Далее, $(m, a, ba) = -(m, a, ab) + (m, a^2, b) = -(m, a, b)\cdot a + (m, a^2, b)$. В силу квадратичности $A$ над $F$ для любого $a \in A$ имеем

$$a^2 = t(a)\, a - n(a)\cdot 1, \qquad (11)$$

где $t(a)$ — след элемента $a$, $n(a)$ — норма элемента $a$, $n(a), t(a) \in F$. Следовательно, $(m, a^2, b) = t(a)(m, a, b) - n(a)(m, 1, b) = t(a)(m, a, b)$ и $(m, a, ba) = -(m, a, b)\cdot a + t(a)(m, a, b)$, что доказывает (10).

Пусть теперь $[,,]$ означает операцию $\{,,\}$. Тогда имеем $\{m, a, ab\} = (m\cdot a)\cdot(ab) - m\cdot(aba) = -[m\cdot(ab)]\cdot a + m\cdot[a \circ (ab)] - m\cdot(aba) = \{m, b, a\}\cdot a - [(m\cdot b)\cdot a]\cdot a +$

$+ m\cdot(a^2b) = -\{m, a, b\}\cdot a - (m\cdot b)\cdot a^2 + m\cdot(a^2b) = -\{m, a, b\}\cdot a - \{m, b, a^2\} = -\{m, a, b\}\cdot a - t(a)\{m, b, a\} + n(a)\{m, b, 1\} = -\{m, a, b\}\cdot a + t(a)\{m, a, b\}$, т. е. (9) доказано. Далее, $\{m, a, ba\} = (m\cdot a)\cdot(ba) - m\cdot(ba^2) = -[m\cdot(ba)]\cdot a + m\cdot[a\circ(ba)] - m\cdot(ba^2) = \{m, a, b\}\cdot a - [(m\cdot a)\cdot b]\cdot a + m\cdot(aba) = \{m, a, b\}\cdot a$, что доказывает (10).

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $[m, a, b] = 0$. *Тогда* $[m, a, ab] = [m, a, ba] = 0$.

Следствие 2. *Пусть* $a, v_1, v_2, v_3 \in A$, $m \in M$. *Тогда, если* $[m, v_i, v_j] = 0$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, 3\}$, *то*

$$[m, v_i, v_jv_k] = \pm[m, v_1, v_2v_3], \tag{12}$$

*а если* $[m, a, v_i] = [m, a, v_iv_j] = 0$ *для любых* $i, j \in \{1, 2, 3\}$, *то*

$$[m, a, (v_iv_j)v_k] = \pm[m, a, (v_1v_2)v_3], \tag{13}$$

$$[m, a, v_i(v_jv_k)] = \pm[m, a, (v_1v_2)v_3] \tag{14}$$

*для любой перестановки* $(ijk)$ *символов* 1, 2, 3.

Доказательство. Соотношение (12) легко вытекает из линеаризованных соотношений (9), (10) и условий следствия. Для доказательства соотношений (13) и (14) предварительно заметим, что в алгебре $A$ верно соотношение

$$bcb = t(bc)b + n(b)c - t(c)n(b)\cdot 1. \tag{15}$$

Действительно, в силу (11) и (2.21) имеем

$$bcb = (b\circ c)b - cb^2 =$$
$$= [t(b)c + t(c)b - t(b)t(c) + t(bc)]b - c[t(b)b - n(b)] =$$
$$= t(c)b^2 - t(b)t(c)b + t(bc)b + n(b)c =$$
$$= t(bc)b + n(b)c - t(c)n(b)\cdot 1.$$

Теперь из (11) и (15) следует

$$[m, a, b^2] = t(b)[m, a, b],$$
$$[m, a, bcb] = t(bc)[m, a, b] + n(b)[m, a, c].$$

Линеаризуя эти соотношения, ввиду условий следствия, мы получаем

$$[m,\ a,\ v_i \circ (v_j v_k)] = 0,$$

$$[m,\ a,\ \{v_i v_j v_k\}] = 0,$$

откуда в силу предложения 5.3 легко следуют соотношения (13) и (14).

Следствие доказано.

Л е м м а 5. *Пусть* $A = Q(\mu, \beta)$ — *алгебра обобщенных кватернионов. Тогда* $M$ *либо ассоциативен справа, либо ассоциативен слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам достаточно доказать, что в $M$ найдется ненулевой элемент $m$, для которого $[m, A, A] = (0)$. Действительно, тогда множество $m \cdot A = \{m \cdot a \mid a \in A\}$ будет являться ненулевым подмодулем в $M$, совпадающим с $M$ в силу его неприводимости, и в качестве соответствующей системы порождающих элементов можно взять систему, состоящую из одного элемента $m$. В алгебре $A = Q(\mu, \beta)$ существуют такие элементы $v_1$, $v_2$, что базис $A$ над $F$ состоит из элементов 1, $v_1$, $v_2$, $v_1 v_2$ (см. § 2.4). Пусть $m \in M$, $m \neq 0$. Если $(m, v_1, v_2) = 0$, то по следствию 1 леммы 4 $(m, A, A) = (0)$, и все доказано. Пусть теперь $m_1 = (m, v_1, v_2) \neq 0$. Тогда по соотношению (7) имеем $\{m_1, v_1, v_2\} = 0$, откуда вновь по следствию 1 леммы 4 $\{m_1, A, A\} = (0)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $A = C(\mu, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли — Диксона. В этом случае в $A$ можно выбрать такие элементы $v_1$, $v_2$, $v_3$, что базис $A$ над $F$ составляют элементы 1, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_1 v_2$, $v_1 v_3$, $v_2 v_3$, $(v_1 v_2) v_3$ (см. § 2.4).

Л е м м а 6. *Пусть для некоторого* $0 \neq m \in M$ *и любых* $i, j \in \{1, 2, 3\}$ *выполнены соотношения* $[m, v_i, v_j] = 0$. *Тогда* $M$ *ассоциативен справа либо слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два возможных случая.

1. $[m, v_1, v_2 v_3] = 0$.

Покажем, что в этом случае $[m, A, A] = (0)$. В силу (12) и по следствию 1 леммы 4 имеем $[m, v_i, v_j v_k] = 0$. Теперь, ввиду соотношения (6), нам достаточно установить

равенства

$$[m, v_i, (v_1v_2) v_3] = 0, \quad (16)$$

$$[m, v_iv_j, v_iv_k] = 0, \quad (17)$$

$$[m, v_iv_j, (v_1v_2) v_3] = 0. \quad (18)$$

В силу (13) и следствия 1 леммы 4 имеем

$$[m, v_i, (v_1v_2) v_3] = \pm [m, v_i, (v_jv_k) v_i] = 0,$$

т. е. (16) доказано. Далее, ввиду линеаризованного соотношения (10), имеем

$$[m, v_iv_j, v_iv_k] = -[m, v_k, v_i(v_iv_j)] = -[m, v_k, v_i^2v_j] =$$
$$= -t(v_i)[m, v_k, v_iv_j] + n(v_i)[m, v_k, v_j] = 0,$$

т. е. и (17) доказано. Наконец, применяя (17), (13) и следствие 1 леммы 4, получаем

$$[m, v_iv_j, (v_1v_2) v_3] = \pm[m, v_iv_j, (v_iv_j) v_k] = 0,$$

что доказывает (18). Итак, в случае 1 имеем $[m, A, A] = (0)$, откуда, как и при доказательстве леммы 5, следует утверждение леммы.

2. $[m, v_1, v_2v_3] = m_1 \neq 0$.

Покажем, что в этом случае $[m_1, A, A]' = (0)$, где через $[\ ,\ ,]'$ обозначена та из трилинейных композиций $(\ ,\ ,)$, $\{\ ,\ ,\}$, которая отлична от $[\ ,\ ,]$. В силу (12) и линеаризованных (7), (8) имеем

$$[m_1, v_i, v_j]' = [[m, v_1, v_2v_3], v_i, v_j]' =$$
$$= \pm[[m, v_i, v_jv_k], v_i, v_j]' =$$
$$= \mp[[m, v_i, v_j], v_i, v_jv_k]' = 0.$$

Далее, ввиду (7) и (8), получаем

$$[m_1, v_1, v_2v_3]' = [[m, v_1, v_2v_3], v_1, v_2v_3]' = 0.$$

Теперь по уже рассмотренному случаю 1 имеем $[m_1, A, A]' = (0)$, откуда следует утверждение леммы и в случае 2.

Лемма доказана.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. *Всякий неприводимый альтернативный модуль над композиционной алгеброй либо ассоциативен справа, либо ассоциативен слева.*

Доказательство. Из соотношения (6) и унитальности модуля $M$ легко следует, что в случаях $A = F$ и $A = K(\mu)$ модуль $M$ является правым ассоциативным модулем. Ввиду леммы 5, нам остается рассмотреть случай, когда $A = C(\mu, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли — Диксона. Выберем в $A$ элементы $v_1, v_2, v_3$, для которых множество $\{1, v_1, v_2, v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, (v_1v_2)v_3\}$ образует базис $A$ над $F$. По лемме 6 достаточно доказать, что найдется ненулевой элемент $m \in M$ такой, что $[m, v_i, v_j] = 0$ для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Пусть $m \in M$, $m \neq 0$. Если $(m, v_i, v_j) = 0$ для всех $i, j$, то доказывать нечего, поэтому можно считать, например, что $m_1 = (m, v_1, v_2) \neq 0$. Заметим, что в силу (7)

$$\{m_1, v_1, v_2\} = \{(m, v_1, v_2), v_1, v_2\} = 0. \tag{19}$$

Если $\{m_1, v_1, v_3\} = \{m_1, v_2, v_3\} = 0$, то все доказано, поэтому мы можем считать, например, что $m_2 = \{m_1, v_1, v_3\} \neq 0$. В силу (8) и его линеаризации и ввиду (19) имеем

$$(m_2, v_1, v_3) = (\{m_1, v_1, v_3\}, v_1, v_3) = 0, \tag{20}$$

$$(m_2, v_1, v_2) = (\{m_1, v_1, v_3\}, v_1, v_2) = \\ = -(\{m_1, v_1, v_2\}, v_1, v_3) = 0. \tag{21}$$

Если еще и $(m_2, v_2, v_3) = 0$, то все доказано. Предположим, что $m_3 = (m_2, v_2, v_3) \neq 0$. Применяя соотношение (7) и его линеаризацию, в силу (20) и (21) мы получаем

$$\{m_3, v_2, v_3\} = \{(m_2, v_2, v_3), v_2, v_3\} = 0,$$

$$\{m_3, v_1, v_2\} = \{(m_2, v_2, v_3), v_1, v_2\} = \\ = -\{(m_2, v_2, v_1), v_3, v_2\} = 0,$$

$$\{m_3, v_1, v_3\} = \{(m_2, v_2, v_3), v_1, v_3\} = \\ = -\{(m_2, v_1, v_3), v_2, v_3\} = 0.$$

Итак, в любом случае модуль $M$ содержит ненулевой элемент $m$, удовлетворяющий условию леммы 6. Теорема доказана.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что всякий ассоциативный слева правый модуль над ассоциативной алгеброй $A$ является левым ассоциативным $A$-модулем. (Это в какой-то мере объясняет введенный нами термин «ассоциативный слева».)

**2.** Доказать, что алгебра обобщенных кватернионов $Q(\mu, \beta)$ обладает в точности двумя неизоморфными неприводимыми правыми альтернативными модулями. Оба эти модуля регулярны, причем один из них ассоциативен справа, а другой — ассоциативен слева.

Указание. Для построения ассоциативного слева модуля над алгеброй $Q(\mu, \beta)$ применить к алгебре $Q(\mu, \beta)$ процесс Кэли — Диксона и рассмотреть подпространство $vQ(\mu, \beta)$.

**3.** Пусть $C = C(\mu, \beta, \gamma)$ — алгебра Кэли — Диксона. Обозначим через $\mathrm{Reg}\, C$ и $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$ правые $C$-модули, получающиеся введением на векторном пространстве $M = C$ соответственно следующих действий алгебры $C$: если $m \in M$, $c \in C$, то

$$m \cdot c = mc \quad \text{для модуля} \quad \mathrm{Reg}\, C,$$

$$m \cdot c = m\bar{c} \quad \text{для модуля} \quad \overline{\mathrm{Reg}}\, C,$$

где через $ma$ обозначено произведение элементов $m$ и $a$ в алгебре Кэли — Диксона $C$. Доказать, что $\mathrm{Reg}\, C$ и $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$ являются неприводимыми неизоморфными правыми правоальтернативными $C$-модулями (см. упражнение 5 к § 1); при этом $\mathrm{Reg}\, C$ ассоциативен справа, а $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$ — ассоциативен слева.

Ясно, что модуль $\mathrm{Reg}\, C$ является регулярным альтернативным $C$-модулем. Является ли альтернативным модуль $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$, неизвестно. Используя описание альтернативных $C$-бимодулей, можно доказать, что модуль $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$ не является регулярным альтернативным $C$-модулем.

**4.** Доказать, что всякий неприводимый правый правоальтернативный $C$-модуль изоморфен либо $\mathrm{Reg}\, C$, либо $\overline{\mathrm{Reg}}\, C$.

## § 3. Неприводимые альтернативные модули

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных неприводимых альтернативных модулей. Ниже всюду $A$ — альтернативная алгебра, $\mathcal{J}(A)$ — ее радикал Жевлакова, $\rho$ — правое альтернативное представление алгебры $A$, $M$ — ассоциированный с представлением $\rho$ правый $A$-модуль.

Лемма 7. *Если представление* $\rho$ *неприводимо, то фактор-алгебра* $A/K_\rho(A)$ *первична.*

Доказательство. Пусть сначала $B$, $C$ — идеалы алгебры $A$ такие, что $BC + CB \subseteq K_\rho(A)$ и $B \nsubseteq K_\rho(A)$. Рассмотрим множество $M \cdot B = \{\sum_i \alpha_i m_i \cdot b_i \mid \alpha_i \in \Phi,\ m_i \in M,\ b_i \in B\}$. Для любого $a \in A$ мы имеем $(m_i \cdot b_i) \cdot a = -(m_i \cdot a) \cdot b_i + m_i \cdot (a \circ b_i) \in M \cdot B$, откуда следует, что $M \cdot B$ — подмодуль $A$-модуля $M$. Так как $B \nsubseteq K_\rho(A)$, то $M \cdot B \neq (0)$, откуда, ввиду неприводимости $M$, следует, что $M \cdot B = M$. Допустим теперь, что

$C \nsubseteq K_\rho(A)$. Тогда найдутся элементы $b \in B$, $c \in C$ такие, что $(M\cdot b)\cdot c \neq (0)$. Заметим, что $(m\cdot b)\cdot c = -(m\cdot c)\cdot b + m\cdot(c\circ b) = -(m\cdot c)\cdot b$ для любого $m \in M$, т. е. $(M\cdot b)\cdot c = (M\cdot c)\cdot b$. Далее, в силу линеаризованного $R$-тождества (5) для любых $a \in A$ и $m \in M$ мы имеем

$$[(m\cdot b)\cdot c]\cdot a = -[(m\cdot a)\cdot c]\cdot b + m\cdot[(bc)\,a + (ac)b] = -[(m\cdot a)\cdot c]\cdot b,$$

откуда следует, что $(M\cdot b)\cdot c = (M\cdot c)\cdot b$ есть $A$-подмодуль модуля $M$. Ввиду неприводимости $M$, имеем $M = (M\cdot b)\cdot c$. Однако по тождеству Муфанг

$$M = (M\cdot b)\cdot c = \{[(M\cdot b)\cdot c]\cdot b\}\cdot c = [M\cdot(bcb)]\cdot c = (0),$$

что противоречит неприводимости $M$. Значит, если $BC + CB \subseteq K_\rho(A)$, то либо $B \subseteq K_\rho(A)$, либо $C \subseteq K_\rho(A)$.

Пусть теперь $BC \subseteq K_\rho(A)$. Тогда $(B \cap C)^2 \subseteq K_\rho(A)$ и по доказанному $B \cap C \subseteq K_\rho(A)$. Но тогда и $CB \subseteq B \cap C \subseteq K_\rho(A)$. Таким образом, $BC + CB \subseteq K_\rho(A)$ и, следовательно, либо $B \subseteq K_\rho(A)$, либо $C \subseteq K_\rho(A)$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если алгебра $A$ обладает почти точным неприводимым модулем $M$, то либо $A$ — ассоциативная первичная алгебра, либо $A$ является кольцом Кэли — Диксона.*

Доказательство. По предыдущей лемме алгебра $A$ первична. Если $3A \neq (0)$, то все ясно, ввиду следствия теоремы 9.9. Пусть теперь $3A = (0)$. В силу теоремы 9.11 нам достаточно доказать, что $\mathscr{L}(A) = (0)$. Без ограничения общности мы можем считать, что $3\Phi = (0)$, откуда $2\cdot 2 = 1$ в $\Phi$, т. е. в кольце $\Phi$ есть $1/2$. Следовательно, мы можем рассмотреть алгебру $A^{(+)}$ с умножением $a \odot b = 1/2\,(ab + ba)$. Рассмотрим также отображение $\mathscr{R}\colon A \to \mathscr{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$ алгебры $A$ в универсальную алгебру $\mathscr{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$. Для любых $a, b \in A$ в силу $R$-тождества (4) мы имеем $\mathscr{R}_a \odot \mathscr{R}_b = \frac{1}{2}\mathscr{R}_a \circ \mathscr{R}_b = \frac{1}{2}\mathscr{R}_{a\circ b} = \mathscr{R}_{a\odot b}$, откуда следует, что отображение $\mathscr{R}$ является гомоморфизмом алгебр $\mathscr{R}\colon A^{(+)} \to (\mathscr{R}_{\mathrm{Alt}}(A))^{(+)}$; при этом образом алгебры $A^{(+)}$ будет множество $\mathscr{R}_A = \{\mathscr{R}_a \mid a \in A\}$. В частности, множество $\mathscr{R}_A$ является подалгеброй специальной йордановой алгебры $(\mathscr{R}_{\mathrm{Alt}}(A))^{(+)}$, т. е. $\mathscr{R}_A$ — специальная йорданова алгебра. Ясно также, что

ассоциативной обертывающей для йордановой алгебры $\mathcal{R}_A$ будет алгебра $\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$.

Заметим теперь, что локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A$ является локально нильпотентным идеалом алгебры $A^{(+)}$. Значит, его образ $\mathcal{R}_{\mathcal{L}(A)}$ при эпиморфизме $\mathcal{R}$: $A^{(+)} \to \mathcal{R}_A$ лежит в локально нильпотентном радикале $\mathcal{L}(\mathcal{R}_A)$ йордановой алгебры $\mathcal{R}_A$. По теореме 4.5 $\mathcal{L}(\mathcal{R}_A) = \mathcal{R}_A \cap \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A))$, откуда следует, что $\mathcal{R}_a \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A))$ для любого $a \in \mathcal{L}(A)$.

Далее, пусть $\rho$ — неприводимое почти точное представление алгебры $A$, соответствующее $A$-модулю $M$. По предложению 1 существует гомоморфизм $\varphi$ ассоциативной алгебры $\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$ в алгебру $\mathrm{End}_\Phi(M)$ такой, что $\rho = \mathcal{R} \circ \varphi$; при этом $M$ является неприводимым ассоциативным $\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$-модулем. Хорошо известно, что в этом случае $\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)) \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$. В частности, $\mathcal{R}_a \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ для любого $a \in \mathcal{L}(A)$, откуда $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathrm{Ker}_\rho(A)$ и $\mathcal{L}(A) \subseteq K_\rho(A) = (0)$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $A$ — ассоциативно-коммутативная алгебра. Тогда всякий неприводимый $A$-модуль $M$ является правым ассоциативным $A$-модулем.*

Доказательство. В силу линеаризованных $R$-тождеств (4) и (5) мы имеем для любых $m \in M$, $a, b, c \in A$

$$(m, a, b)\cdot c = [(m\cdot a)\cdot b]\cdot c - [m\cdot(ab)]\cdot c =$$
$$= -[(m\cdot c)\cdot b]\cdot a + 2m\cdot(abc) + (m\cdot c)\cdot(ab) - 2m\cdot(abc) =$$
$$= -(m\cdot c, b, a) = (m\cdot c, a, b),$$

откуда следует, что подмножество $(M, a, b)$ является подмодулем $A$-модуля $M$. Если модуль $M$ не является ассоциативным, то $(M, a, b) \neq (0)$ для некоторых $a, b \in A$ и, ввиду неприводимости, $(M, a, b) = M$. Заметим, что для любых $m \in M$, $a, b \in A$ верно равенство $(m, a, b) = \{m, a, b\}$, поэтому в силу (7) или (8) имеем

$$((m, a, b), a, b) = 0.$$

Но тогда $M = (M, a, b) = ((M, a, b), a, b) = (0)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Обозначим через $ZN_{\mathrm{Alt}}$ идеал $ZN(\mathrm{Alt}[X])$ свободной альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ от счетного множества порождающих $X = \{x_i\}$, а для произвольной альтерна-

тивной алгебры $A$ через $ZN_{\mathrm{Alt}}[A]$ — идеал алгебры $A$, состоящий из элементов вида $f(a_1, \ldots, a_n)$, где $f(x_1, \ldots, x_n) \in ZN_{\mathrm{Alt}}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Как легко видеть, $ZN_{\mathrm{Alt}}[A] = [N_{\mathrm{Alt}}[A], A] A^{\#}$.

Лемма 10. *Если модуль $M$ неприводим и не является ассоциативным справа, то $ZN_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq K_\rho(A)$. В частности, в этом случае $[N_{\mathrm{Alt}}[A], A] \subseteq K_\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $u$ — произвольный элемент из $ZN_{\mathrm{Alt}}$, $x_i$ — порождающие, не входящие в $u$. По лемме 7.5 в алгебре $\mathrm{Alt}[X]$ верно тождество

$$((x_1u, x_2, x_3), x_4, x_5) = 0.$$

Отсюда следует, что для любых элементов $a \in ZN_{\mathrm{Alt}}[A]$, $b_1, \ldots, b_4 \in A$

$$a^\rho (b_1^\rho b_2^\rho - (b_1b_2)^\rho)(b_3^\rho b_4^\rho - (b_3b_4)^\rho) = 0. \tag{22}$$

Если $ZN_{\mathrm{Alt}}[A] \nsubseteq K_\rho(A)$, то существует такой элемент $a \in ZN_{\mathrm{Alt}}[A]$, что $m \cdot a \neq 0$ для некоторого $m \in M$. Возьмем элемент $m \cdot a$ в качестве порождающего элемента $A$-модуля $M$. Возможны два случая:

а) $(m \cdot a, b, c) = 0$ для любых $b, c \in A$;

б) существуют $b, c \in A$, для которых $m_1 = (m \cdot a, b, c) \neq 0$.

Выбирая во втором случае в качестве порождающего элемента модуля $M$ элемент $m_1$, мы получаем, ввиду (22), что в любом случае модуль $M$ ассоциативен справа. Полученное противоречие доказывает, что $ZN_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq K_\rho(A)$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть алгебра $A$ обладает почти точным неприводимым модулем $M$, не являющимся ассоциативным справа. Тогда $Z = Z(A) \neq (0)$, $Z$ не содержит делителей нуля алгебры $A$ и кольцо частных $A_1 = (Z^*)^{-1}A$ является либо алгеброй обобщенных кватернионов, либо алгеброй Кэли — Диксона над полем частных $Z_1$ кольца $Z$.*

Доказательство. По лемме 8 алгебра $A$ является либо ассоциативной алгеброй, либо кольцом Кэли — Диксона. Так как для кольца Кэли — Диксона утверждение леммы справедливо, остается рассмотреть случай, когда $A$ — первичная ассоциативная алгебра.

Заметим, что, ввиду леммы 9, алгебра $A$ некоммутативна. Кроме того, легко видеть, что алгебра $A$ невырождена. Следовательно, по теореме 9.6 $N_{\mathrm{Alt}}[A] \neq (0)$. Так

как по лемме 10 $[N_{\mathrm{Alt}}[A], A] \subseteq K_\rho(A) = (0)$, то мы получаем $(0) \neq N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq Z(A)$, откуда $Z = Z(A) \neq \neq (0)$. Ввиду первичности алгебры $A$, центр $Z$ не содержит делителей нуля алгебры $A$, и мы можем образовать кольцо частных $A_1 = (Z^*)^{-1}A$. По предложению 9.2 $A_1$ является первичной ассоциативной алгеброй и алгебра $A$ изоморфно вкладывается в $A_1$. Далее, условие $N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq \subseteq Z(A)$ эквивалентно выполнению в алгебре $A$ совокупности тождеств вида $[n(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}] = 0$, где $n(x_1, \ldots, x_m)$ — произвольный элемент из $N_{\mathrm{Alt}}$. Легко видеть, что $N_{\mathrm{Alt}}$ — однородная подалгебра свободной алгебры $\mathrm{Alt}[X]$, поэтому по предложению 9.2 все эти тождества справедливы и в алгебре $A_1$. Значит, $N_{\mathrm{Alt}}[A_1] \subseteq \subseteq Z(A_1) = Z_1$. Пусть теперь $I$ — произвольный ненулевой идеал алгебры $A_1$. По следствию 1 теоремы 9.4 $I$ также будет первичной алгеброй. Если бы алгебра $I$ была коммутативной, то мы бы имели $(0) \neq I = Z(I) = I \cap Z_1 \subseteq \subseteq Z_1$, что невозможно, так как $Z_1$ — поле и $A_1 \neq Z_1$, ввиду некоммутативности подалгебры $A \subseteq A_1$. Значит, $I$ — некоммутативная первичная ассоциативная алгебра. Ясно, что алгебра $I$ невырождена, поэтому по теореме 9.6 мы получаем $(0) \neq N_{\mathrm{Alt}}[I] \subseteq N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq Z_1$, откуда $I \cap \cap Z_1 \neq (0)$ и $I = A_1$. Ввиду произвольности идеала $I$, тем самым доказано, что алгебра $A_1$ проста. Так как $N_{\mathrm{Alt}}[A_1] \subseteq Z(A_1) = Z_1$, то по теореме 7.5 алгебра $A_1$ является алгеброй обобщенных кватернионов над полем $Z_1$.

Лемма доказана.

Теперь может быть доказана

Теорема 2. *Пусть $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Тогда всякий неприводимый альтернативный $A$-модуль либо ассоциативен справа, либо ассоциативен слева.*

Доказательство. Так как всякий неприводимый $A$-модуль $M$ является почти точным неприводимым $\bar{A}$-модулем, где $\bar{A} = A/K_\rho(A)$, и при этом $M$ ассоциативен справа (слева) как $A$-модуль тогда и только тогда, когда $M$ ассоциативен справа (слева) как $\bar{A}$-модуль, то нам достаточно рассмотреть почти точные неприводимые $A$-модули. Пусть $M$ — почти точный неприводимый альтернативный $A$-модуль. Можно считать, что $M$ не является ассоциативным справа, так как иначе доказывать нечего. Тогда по лемме 11 $Z = Z(A) \neq (0)$, и алгебра $A$ изоморф-

но вкладывается в кольцо частных $A_1 = (Z^*)^{-1}A$, которое является либо алгеброй обобщенных кватернионов, либо алгеброй Кэли — Диксона над полем частных $Z_1$ кольца $Z$.

Рассмотрим множество $N_{\mathrm{Alt}}[A]$. Для любого элемента $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in N_{\mathrm{Alt}}$ мы имеем

$$f \otimes x_{n+1} - fx_{n+1}, \quad x_{n+1} \otimes f - x_{n+1}f \in I_{\mathrm{Alt}},$$

откуда для любых элементов $n \in N_{\mathrm{Alt}}[A]$, $a \in A$

$$n^\rho a^\rho - (na)^\rho = a^\rho n^\rho - (an)^\rho = 0.$$

Так как $N_{\mathrm{Alt}}[A] \subseteq Z(A)$, то окончательно получаем

$$n^\rho a^\rho = (na)^\rho = (an)^\rho = a^\rho n^\rho.$$

Таким образом, $(N_{\mathrm{Alt}}[A])^\rho \subseteq \mathfrak{z}(M)$, где

$$\mathfrak{z}(M) = \{\sigma \in \mathrm{End}_\Phi(M) \mid [\sigma, a^\rho] = 0 \text{ для всех } a \in A\}.$$

Множество $\mathfrak{z}(M)$ называется *централизатором* $A$-модуля $M$. Как легко видеть, ввиду неприводимости модуля $M$, множество $\mathfrak{z}(M)$ является телом (относительно операций алгебры $\mathrm{End}_\Phi(M)$). По следствию 2 теоремы 7.4 для любых элементов $a, b \in A$ мы имеем $([a, b]^4)^\rho \in \mathfrak{z}(M)$ и $(n_2(a, b))^\rho \in \mathfrak{z}(M)$, где $n_2(x, y) = [x, y]^2([x, y] \circ [x, yx])$.

Покажем теперь, что в центре $Z$ алгебры $A$ содержится идеал $I$ такой, что $I^\rho \subseteq \mathfrak{z}(M)$. Пусть вначале характеристика тела $\mathfrak{z}(M)$ не равна двум. Выберем в алгебре $A$ пару элементов $a, b$, для которых $[a, b]^4 \neq 0$ (см. доказательство леммы 10.16). Для любого $z \in Z$ мы имеем $2[a, b]^4 z = n_2(a + z, b) - n_2(a, b)$, откуда $([a, b]^4 z)^\rho \in \mathfrak{z}(M)$, и в качестве идеала $I$ можно взять идеал, порожденный элементом $[a, b]^4$. Если же характеристика тела $\mathfrak{z}(M)$ равна двум, то выберем в $A$ элементы $a, b$, для которых $n_2(a, b) \neq 0$. Такие элементы всегда существуют, так как композиционная алгебра $A_1$, как легко видеть, не удовлетворяет тождеству $n_2(x, y) = 0$. Мы имеем $n_2(a + az, b) = n_2(a, b) + 5zn_2(a, b) + 10z^2 n_2(a, b) + 10z^3 n_2(a, b) + 5z^4 n_2(a, b) + z^5 n_2(a, b)$ для любого $z \in Z$. Так как $z^4 n_2(a, b) = n_2(a, zb)$ и $z^5 n_2(a, b) = n_2(za, b)$, то, ввиду условия на характеристику, отсюда следует, что $[zn_2(a, b)]^\rho \in \mathfrak{z}(M)$, и в качестве искомого идеала $I$ в данном случае можно взять идеал, порожденный элементом $n_2(a, b)$.

Заметим, что ограничение отображения $\rho$ на множестве $I$ является гомоморфизмом алгебры $I$ в $\mathfrak{z}(M)$. Далее, как легко видеть, для любого $i \in I \cap \mathrm{Ker}_\rho(A)$ мы имеем $iA \subseteq K_\rho(A) = (0)$, откуда $i = 0$ в силу первичности алгебры $A$. Значит, $I \cap \mathrm{Ker}_\rho(A) = (0)$, и мы можем отождествить $I$ с его образом $I^\rho$ в $\mathfrak{z}(M)$. Так как $\mathfrak{z}(M)$ — тело, то поле частных $I_1$ кольца $I$ также содержится в $\mathfrak{z}(M)$. Однако, как легко видеть, $I_1 = Z_1$. Следовательно, $Z_1 \subseteq \mathfrak{z}(M)$, и $M$ можно рассматривать как векторное пространство над полем $Z_1$. Если мы теперь положим $(z^{-1}a)^\rho = z^{-1}a^\rho$, то, как нетрудно проверить, мы получим альтернативное представление алгебры $A_1$ в той же алгебре $\mathrm{End}_\Phi(M)$. Ясно, что $M$ неприводим и как $A_1$-модуль. По теореме 1 модуль $M$ ассоциативен слева как $A_1$-модуль, а следовательно, и как $A$-модуль.

Теорема доказана.

Докажем теперь, что примитивные альтернативные алгебры — это в точности алгебры, обладающие точными неприводимыми альтернативными модулями.

Лемма 12. *Пусть альтернативная алгебра $A$ обладает почти точным неприводимым альтернативным модулем $M$. Тогда $A$ примитивна.*

Доказательство. По теореме 2 модуль $M$ либо ассоциативен справа, либо ассоциативен слева. Допустим первое. Пусть $m$ — порождающий элемент модуля $M$ такой, что $(m, x, y) = 0$ для любых $x, y \in A$. Рассмотрим множество $(0:m) = \{x \in A \mid m \cdot x = 0\}$. Как легко видеть, $(0:m)$ — правый идеал алгебры $A$. Далее, $m \cdot A = M$, поэтому в $A$ существует элемент $e$, для которого $m \cdot e = m$. Пусть $a$ — произвольный элемент алгебры $A$; тогда $m \cdot (a - ea) = m \cdot a - (m \cdot e) \cdot a = m \cdot a - m \cdot a = 0$, т. е. $a - ea \in (0:m)$. Тем самым доказана модулярность правого идеала $(0:m)$. Пусть теперь $I$ — правый идеал алгебры $A$, строго содержащий $(0:m)$. Тогда $m \cdot I$ — ненулевой подмодуль модуля $M$ и, следовательно, $M = m \cdot I$. Отсюда вытекает наличие в $I$ такого элемента $i$, что $m \cdot i = m$. Мы имеем $m \cdot (e - i) = 0$, т. е. $e - i \in (0:m) \subseteq I$, откуда $e \in I$ и $I = A$. Следовательно, правый идеал $(0:m)$ максимален. Заметим, наконец, что всякий двусторонний идеал, содержащийся в $(0:m)$, аннулирует модуль $M$. Так как модуль $M$ почти точен, таких ненулевых идеалов не существует, и алгебра $A$ примитивна.

Пусть теперь модуль $M$ не является ассоциативным справа. Тогда он ассоциативен слева, а алгебра $A$ по лемме 11 изоморфно вкладывается либо в алгебру обобщенных кватернионов, либо в алгебру Кэли — Диксона. В модуле $M$ существует порождающий элемент $m$ такой, что $\{m, x, y\} = 0$ для любых $x, y \in A$. Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, легко проверить, что множество $(0:m)$ является в этом случае максимальным модулярным левым идеалом, не содержащим ненулевых двусторонних идеалов алгебры $A$, т. е. в данном случае алгебра $A$ примитивна слева. По теореме 10.1 тогда $A$ есть либо алгебра Кэли — Диксона, либо примитивная слева ассоциативная алгебра. В первом случае по следствию леммы 10.3 алгебра $A$ примитивна. Во втором случае $A$ является подалгеброй алгебры обобщенных кватернионов и по следствию леммы 2.8 удовлетворяет существенному полиномиальному тождеству $[[x, y]^2, z] = 0$. Хорошо известно (см., например, [252, стр. 151]), что тогда $A$ является конечномерной простой алгеброй над своим центром. В частности, $A$ примитивна справа.

Лемма доказана.

Следствие. *Всякий почти точный неприводимый альтернативный модуль является точным.*

Доказательство. Пусть $M$ — почти точный неприводимый альтернативный модуль для альтернативной алгебры $A$. Тогда $M$ ассоциативен справа либо слева и имеет вид $M = m \cdot A$ для некоторого элемента $m \in M$, а алгебра $A$ есть либо алгебра Кэли — Диксона $C$, либо ассоциативная примитивная алгебра. Так как алгебра $C$ не содержит собственных односторонних идеалов, то в первом случае мы имеем $(0:m) = (0)$, откуда следует, что $a \in \mathrm{Ker}_\rho\,(C)$ тогда и только тогда, когда $Ca = (0)$ или $aC = (0)$, в зависимости от того, ассоциативен $M$ справа или слева. Так как таких элементов в алгебре $C$ нет, то мы получаем в этом случае, что $\mathrm{Ker}_\rho\,(C) = (0)$, и модуль $M$ точен. Если же алгебра $A$ ассоциативна, то $M$ является обычным правым или левым ассоциативным $A$-модулем. В каждом из этих случаев ядро $\mathrm{Ker}_\rho\,(A)$ является идеалом алгебры $A$, поэтому $\mathrm{Ker}_\rho\,(A) = K_\rho\,(A) = (0)$, и модуль $M$ точен. Следствие доказано.

Теорема 3. *Альтернативная алгебра $A$ является примитивной тогда и только тогда, когда $A$ обладает*

*точным неприводимым регулярным альтернативным модулем.*

Доказательство. Ввиду леммы 12, нам остается показать, что всякая примитивная альтернативная алгебра $A$ обладает точным неприводимым регулярным альтернативным модулем. Пусть $I$ — максимальный модулярный правый идеал алгебры $A$ такой, что $\check{I} = (0)$. Тогда $A$ и $I$ являются правыми регулярными альтернативными $A$-модулями (относительно обычного умножения справа на элементы из $A$), и таковым же является фактор-модуль $M = A/I$. Ввиду максимальности правого идеала $I$, модуль $M$ неприводим. Если $a \in A$, то $M \cdot a = (0)$ тогда и только тогда, когда $Aa \subseteq I$, откуда по предложению 10.2 $\mathrm{Ker}_\rho (A) = (I:A) = \check{I} = (0)$, и модуль $M$ точен. Теорема доказана.

Теперь мы можем доказать основной результат этой главы.

Теорема 4 (Жевлаков, Слинько, Шестаков). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $\mathcal{J}(A)$ — ее радикал Жевлакова. Пусть, далее $\mathrm{P}_1$ — множество всех неприводимых правых альтернативных представлений алгебры $A$, $\mathrm{P}_2$ — множество всех регулярных представлений из $\mathrm{P}_1$. Тогда*

$$\mathcal{J}(A) = \bigcap_{\rho \in \mathrm{P}_1} \mathrm{Ker}_\rho (A) = \bigcap_{\rho \in \mathrm{P}_2} \mathrm{Ker}_\rho (A).$$

Доказательство. Пусть $\rho \in \mathrm{P}_1$; тогда по лемме 12 и ее следствию $\mathrm{Ker}_\rho (A) = K_\rho (A)$, и фактор-алгебра $A/\mathrm{Ker}_\rho (A)$ примитивна. Значит, $\mathrm{Ker}_\rho (A)$ является примитивным идеалом алгебры $A$. По теоремам 10.5 и 10.2 радикал $\mathcal{J}(A)$ равен пересечению всех примитивных идеалов алгебры $A$. Таким образом,

$$\mathcal{J}(A) \subseteq \bigcap_{\rho \in \mathrm{P}_1} \mathrm{Ker}_\rho (A).$$

Пусть теперь $I$ — примитивный идеал алгебры $A$. Алгебра $\bar{A} = A/I$ примитивна и по теореме 3 обладает точным неприводимым регулярным модулем $M$. Пусть $\varphi: A \to \bar{A}$ — канонический гомоморфизм и $\rho: \bar{A} \to \mathrm{End}_\Phi (M)$ — представление алгебры $\bar{A}$, соответствующее модулю $M$. Тогда легко видеть (см. упражнение 3

к § 1), что отображение $\varphi \circ \rho$: $A \to \mathrm{End}_\Phi(M)$ является регулярным неприводимым альтернативным представлением алгебры $A$; при этом $\mathrm{Ker}_{\varphi\circ\rho}(A) = I$. Мы доказали, что всякий примитивный идеал алгебры $A$ является ядром некоторого неприводимого регулярного представления. Следовательно,

$$\bigcap_{\rho \in P_2} \mathrm{Ker}_\rho(A) \subseteq \mathcal{Y}(A).$$

Окончательно мы получаем

$$\mathcal{Y}(A) \subseteq \bigcap_{\rho \in P_1} \mathrm{Ker}_\rho(A) \subseteq \bigcap_{\rho \in P_2} \mathrm{Ker}_\rho(A) \subseteq \mathcal{Y}(A),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. *Следующие включения для альтернативной алгебры $A$ эквивалентны:*

1) $a \in \mathcal{Y}(A)$;
2) $R_a^* \in \mathcal{Y}(R_{\mathrm{Alt}}^*(A))$;
3) $\mathcal{R}_a \in \mathcal{Y}(\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A))$.

Для доказательства достаточно напомнить, что альтернативный $A$-модуль $M$ (регулярный $A$-модуль $M$) является неприводимым тогда и только тогда, когда $M$ — неприводимый ассоциативный $\mathcal{R}_{\mathrm{Alt}}(A)$-модуль (соответственно $R_{\mathrm{Alt}}^*(A)$-модуль).

**Упражнения**

Регулярное представление $\rho$ алгебры $A$ вида

$$\rho: A \xrightarrow{R} R_1^A(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{End}_\Phi(M)$$

назовем *вполне регулярным*.

1. Доказать, что для любой альтернативной алгебры $A$

$$\mathcal{Y}(A) = \bigcap_{\rho \in P_3} \mathrm{Ker}_\rho(A),$$

где $P_3$ — множество всех вполне регулярных представлений алгебры $A$.

2. Доказать, что включения $a \in \mathcal{Y}(A)$ и $R_a \in \mathcal{Y}(R(A))$ эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

Джекобсон [44, 46], Жевлаков [76], Маккриммон [118], Слинько и Шестаков [214], Шестаков [273], Эйленберг [282].

Результаты о представлениях йордановых алгебр: Джекобсон [44, 47], Осборн [165].

*ГЛАВА 12*

# АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ С УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

Один из классических разделов теории алгебр — структурная теория алгебр с различными условиями конечности. Первым крупным успехом этой теории и отправной точкой для всех дальнейших исследований явились структурные теоремы Веддербёрна, описывающие строение конечномерных ассоциативных алгебр над произвольным полем. В дальнейшем наблюдалось две тенденции. Одна из них привела к отказу от ассоциативности и созданию Цорном и Шафером структурной теории конечномерных альтернативных алгебр. В рамках другой осуществлялся переход к бесконечномерным ассоциативным алгебрам и кольцам с различными условиями на структуру идеалов. Так, Артин распространил теоремы Веддербёрна на кольца с условиями максимальности и минимальности для правых (левых) идеалов. Затем Нётер и Гопкинс показали, что для справедливости доказанных Артином теорем достаточно одного условия минимальности. Эти результаты давно стали классическими и вошли в ряд монографий.

В дальнейшем обе теории были объединены Жевлаковым в одну единую теорию — теорию альтернативных алгебр с условием минимальности, включающую в качестве частных случаев теории Цорна — Шафера и Артина — Нётер — Гопкинса. В этой главе мы получим результаты Жевлакова, применив развитую в предыдущих главах общую теорию.

## § 1. Альтернативные алгебры с условием минимальности для двусторонних идеалов

Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $X$ и $Y$ — ее подалгебры. Введем обозначения: $(X, Y)_1 = X \cdot Y$ и $(X, Y)_{k+1} = (X, Y)_k \cdot Y$.

Лемма 1. *Пусть $B$ и $I$ — идеалы альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для идеалов, содержащихся в $B$. Тогда существует такое число $k$, что*

$$(B,\ I)_k \subseteq BI^2.$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку идеалов

$$B \supseteq (B,\ I)_1 \supseteq \ldots \supseteq (B,\ I)_m \supseteq \ldots$$

Все ее члены, начиная с некоторого, который мы обозначим через $B'$, равны между собой, т. е.

$$(B,\ I)_n = (B,\ I)_{n+1} = \ldots = B'.$$

Пусть $B' \nsubseteq BI^2$. Тогда множество идеалов $\{J\}$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

$$\text{а) } J \subseteq B, \text{ б) } JI = J, \text{ в) } J \nsubseteq BI^2,$$

непусто, так как $B' \in \{J\}$. В силу условия минимальности в этом множестве существует минимальный идеал $C$. Ввиду того, что $CI = C$, найдется такой элемент $r \in I$, что $Cr \nsubseteq BI^2$. Зафиксируем этот элемент $r$ и рассмотрим множество $D = Cr + BI^2$. Докажем, что $D$ — идеал в $A$.

Будем писать $x \equiv y$, если $x - y \in BI^2$. Пусть $c \in C$, $x \in I$, $a \in A$. Тогда

$$[(cx)\,r]\,a = -[(ca)\,r]\,x + c\,[(xr)\,a + (ar)\,x] \equiv$$
$$\equiv -[(ca)\,r]\,x = [(ca)\,x]\,r - (ca)\,(xr + rx) \equiv$$
$$\equiv [(ca)\,x]\,r \in Cr,$$

т. е. $[(CI)\,r]\,a \subseteq Cr + BI^2$. Но $CI = C$, и потому $D$ — правый идеал в $A$.

Далее, для любых $c \in C$, $x$, $y \in I$

$$y\,(cx)\,y \equiv -y\,[(cy)\,x] = -(ycy)\,x + (y,\ cy,\ x) =$$
$$= -y\,[c\,(yx)] + (y,\ c,\ xy) \equiv 0,$$

поэтому

$$xcx \equiv 0,$$
$$(xc)\,y + (yc)\,x = x\,(cy) + y\,(cx) \equiv 0.$$

Отсюда для всех $c \in C$, $x$, $y \in I$, $a \in A$ имеем

$$a\{[(cy)x]r\} \equiv -a\{[(cy)r]x\} = $$
$$= a[(xr)(cy)] - \{[a(cy)]r\}x - [(ax)r](cy) \equiv$$
$$\equiv -a\{y[c(xr)]\} + \{[a(cy)]x\}r + y\{c[(ax)r]\} \equiv$$
$$\equiv \{[a(cy)]x\}r \in Cr.$$

Так как $(CI)I = C$, то $a(Cr) \subseteq Cr + BI^2$ и $D$ — левый идеал в $A$.

Итак, $D$ — идеал в $A$. В то же время $Dr \subseteq BI^2$. Следовательно, $D' = D \cap C \neq C$. Поэтому идеал $D'$ не содержится во множестве $\{J\}$. Из трех условий, характеризующих множество $\{J\}$, условия а) и в) выполнены для $D'$. Следовательно, $D'$ не удовлетворяет условию б). Таким образом, имеем строго убывающую на первом шаге цепочку идеалов

$$D' \supset (D', I)_1 \supseteq \ldots \supseteq (D', I)_m \supseteq \ldots$$

Начиная с некоторого места, в этой цепочке встречаются только равенства

$$(D', I)_k = (D', I)_{k+1} = \ldots$$

Для идеала $(D', I)_k$ выполнены условия а) и б), но $(D', I)_k$ строго содержится в $C$, и потому условие в) для этого идеала не имеет места, т. е. $(D', I)_k \subseteq BI^2$. А это, в частности, означает, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_k \in I$ имеет место включение

$$CR_rR_{x_1}\ldots R_{x_k} \subseteq BI^2.$$

Но отсюда следует, что

$$CR_{x_1}\ldots R_{x_k}R_r \subseteq BI^2,$$

или, что то же самое,

$$Cr = (C, I)_k r \subseteq BI^2.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость включения

$$(B, I)_n \subseteq BI^2.$$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *В условиях леммы для любого натурального числа $k$ существует такое число $f(k)$, что*

$$(B, I)_{f(k)} \subseteq BI^{(k)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы 1 дает основание для индукции. Допустим, что для любой пары идеалов $\widetilde{B}$ и $\widetilde{I}$ алгебры $A$, удовлетворяющей условиям леммы 1, существует зависящее от этой пары число $\widetilde{f}(k-1)$ такое, что

$$(\widetilde{B}, \widetilde{I})_{\widetilde{f}(k-1)} \subseteq \widetilde{B}\widetilde{I}^{(k-1)}.$$

В частности, для некоторого числа $f(k-1)$

$$(B, I)_{f(k-1)} \subseteq BI^{(k-1)}.$$

Применив предположение индукции $p$ раз, получим, что существует число $g(p)$ такое, что

$$(B, I)_{g(p)} \subseteq (B, I^{(k-1)})_p.$$

Если мы теперь применим лемму 1 к паре идеалов $B$ и $I^{(k-1)}$, то получим, что для некоторого числа $t$ справедливы включения

$$(B, I)_{g(t)} \subseteq (B, I^{(k-1)})_t \subseteq BI^{(k)},$$

а это значит, что в качестве $f(k)$ можно взять число $g(t)$. Следствие доказано.

Следствие 2 (Слейтер). *Если альтернативная алгебра $A$ удовлетворяет условию минимальности для идеалов, содержащихся в некотором ее идеале $B$, то для любого числа $k$ существует число $h(k)$ такое, что*

$$B^{h(k)} \subseteq B^{(k)}.$$

*В частности, всякий разрешимый идеал $B$ альтернативной алгебры $A$ с условием минимальности для идеалов, содержащихся в $B$, нильпотентен.*

Доказательство. В силу предыдущего следствия существует такое число $f(k)$, что

$$B^{\langle f(k)+1\rangle} = (B, B)_{f(k)} \subseteq BB^{(k)} \subseteq B^{(k)},$$

и так как в силу следствия теоремы 5.5

$$B^{n^2} \subseteq B^{\langle n\rangle}$$

для любого числа $n$, то в качестве $h(k)$ можно взять число $(f(k)+1)^2$. Следствие доказано.

Л е м м а 2. *Пусть $B$ — радикальный в смысле Андрунакиевича идеал альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для идеалов, содержащихся в $B$, и $I$ — минимальный идеал алгебры $A$. Тогда $BI = IB = (0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать лемму для случая, когда $I \subseteq B$; в противном случае утверждение леммы тривиально.

В силу наследственности радикала Андрунакиевича (следствие леммы 8.13) идеал $I$ не может быть простой алгеброй, поэтому по теореме Жевлакова (8.10) $I^2 = (0)$. В этом случае $C = \mathrm{Ann}_r(I) \neq (0)$. Пусть $B \not\subseteq C$ или, что то же самое, $B_1 = C \cap B \neq B$.

Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A} = A/B_1$. В алгебре $\bar{A}$ образ $\bar{B}$ идеала $B$ отличен от нуля. Поэтому в нем содержится минимальный идеал $\bar{D}$ алгебры $\bar{A}$. Те же соображения, что и выше, показывают, что он тривиален: $\bar{D}^2 = (\bar{0})$. Следовательно, его полный прообраз $D$ удовлетворяет соотношениям

$$B \supseteq D \supset B_1, \quad D^2 \subseteq B_1.$$

Идеал $ID$ содержится в $I$ и отличен от нуля. Стало быть, $ID = I$. Однако по лемме 1 существует такое число $k$, что

$$I = (I, D)_k \subseteq ID^2 \subseteq IB_1 \subseteq IC = (0).$$

Полученное противоречие доказывает, что $IB = (0)$. Аналогично, $BI = (0)$.

Лемма доказана.

Напомним, что для идеала $I$ альтернативной алгебры $A$ через $P(I)$ обозначается подмодуль, порожденный совокупностью элементов вида $iai$, где $i \in I$, $a \in A^{\#}$. Согласно следствию предложения 5.2 $P(I)$ — идеал алгебры $A$.

Л е м м а 3. *Пусть $B$ — идеал альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для идеалов, содержащихся в $B$. Тогда для некоторого числа $m$ имеет место включение*

$$B^m \subseteq P(B).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим цепочку идеалов

$$B \supseteq B^{\langle 2\rangle} \supseteq \ldots \supseteq B^{\langle n\rangle} \supseteq \ldots$$

Начиная с некоторого ее члена, встречаются одни только равенства: $B^{\langle n\rangle} = B^{\langle n+1\rangle} = \ldots$ Предположим, что $B^{\langle n\rangle} \nsubseteq P(B)$. Тогда множество $\{J\}$ идеалов $J$ алгебры $A$, обладающих свойствами

$$\text{а) } J \subseteq B,\quad \text{б) } JB = J,\quad \text{в) } J \nsubseteq P(B),$$

непусто. Пусть идеал $C$ — минимальный элемент в этом множестве. В силу б) и в) для некоторого $a \in B$ имеем $Ca \nsubseteq P(B)$. Рассмотрим множество $D = Ca + P(B)$ и докажем, что оно является идеалом в $A$. Будем писать $x \equiv y$, если $x - y \in P(B)$. Легко видеть, что для любых $x, y \in B$, $c \in C$, $r \in A$ имеют место сравнения

$$(cx)\, y \equiv -(cy)\, x,$$

$$[(cx)\, r]\, y \equiv -[(cy)\, r]\, x.$$

Поэтому

$$[(cx)\, a]\, r \equiv -[(ca)\, x]\, r = [(ca)\, r]\, x - (ca)\,(x \circ r) \equiv$$

$$\equiv [(cx)\, r]\, a + [c\,(x \circ r)]\, a \in Ca.$$

В силу б) отсюда следует, что $D$ — правый идеал алгебры $A$. Далее, в тех же обозначениях

$$r\,[(cx)\, a] \equiv -r\,[a\,(cx)] \equiv r\,[x\,(ca)] =$$

$$= -x\,[r\,(ca)] + (x \circ r)\,(ca) \equiv (ca)\,(rx) - a\,[c\,(x \circ r)] \equiv$$

$$\equiv -[c\,(rx)]\, a + [c\,(x \circ r)]\, a = [c\,(xr)]\, a \in Ca.$$

Так как $CB = C$, отсюда вытекает, что $D$ — левый идеал. Таким образом, $D$ — идеал в $A$. Для идеала $D$ справедливо соотношение $Da \subseteq P(B)$. Поэтому $D' = D \cap C \neq C$. Следовательно, существует такое число $k$, что

$$(D',\, B)_k \subseteq P(B).$$

Это означает, однако, что для любых $b_1, \ldots, b_k \in B$

$$CR_aR_{b_1} \ldots R_{b_k} \subseteq P(B).$$

Но отсюда следует, что

$$CR_{b_1} \ldots R_{b_k}R_a \subseteq P(B),$$

т. е. $(C,\, B)_k a \subseteq P(B)$. Ввиду условия б), это означает, что $Ca \subseteq P(B)$. Полученное противоречие доказывает, что

$B^{\langle n \rangle} \subseteq P(B)$. В силу следствия теоремы 5.5 мы имеем $B^{n^2} \subseteq P(B)$, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае алгебр над кольцом Ф, содержащим элемент 1/2, лемма 3 является излишней, так как по лемме 6.8 $B^4 \subseteq P(B)$ даже в отсутствие условия минимальности. Однако в общем случае без нее обойтись нельзя.

Теорема 1 (Жевлаков). *Пусть $B$ — идеал альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для идеалов, содержащихся в $B$, и $B \subseteq \mathcal{A}(A)$. Тогда $B$ — нильпотентная алгебра.*

Доказательство. Рассмотрим следующую убывающую цепочку:

$$B \supseteq B^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq B^{(n)} \supseteq \ldots$$

Пусть $k$ — такое целое число, что

$$B^{(k)} = B^{(k+1)} = \ldots = B'.$$

Если $B' = (0)$, то идеал $B$ нильпотентен в силу следствия 2 леммы 1. Допустим, что $B' \neq (0)$. Рассмотрим аннулятор $\mathrm{Ann}_l(B')$ и фактор-алгебру по нему $\bar{A} = A/\mathrm{Ann}_l(B')$. Так как $B' = B'^2$, то $B' \nsubseteq \mathrm{Ann}_l(B')$ и $B'$ имеет в $\bar{A}$ ненулевой образ $\bar{B}'$. Пусть $\bar{C}$ — минимальный идеал алгебры $\bar{A}$, содержащийся в $\bar{B}'$, и $C$ — его полный прообраз в алгебре $A$. Тогда $CB' \neq (0)$, так как $C \supset \mathrm{Ann}_l(B')$, но по лемме 2 $CB' \subseteq \mathrm{Ann}_l(B')$, и потому $(CB')B' = (0)$. Однако в силу леммы 3 существует такое число $t$, что

$$CB'^t \subseteq C \cdot P(B') \subseteq (CB')B' = (0).$$

Так как $CB' \neq (0)$ и $B' = B'^2 = \ldots = B'^t$, получили противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 1 (Слейтер). *Если $B$ — локально нильпотентный идеал альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для идеалов, содержащихся в $B$, то этот идеал нильпотентен.*

Доказательство. Так как простых локально нильпотентных алгебр не существует (предложение 7.1), то локально нильпотентный радикал содержится в антипростом, что и доказывает следствие.

Следствие 2. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с условием минимальности для идеалов. Тогда ее радикал Андрунакиевича $\mathscr{A}(A)$ нильпотентен, а фактор-алгебра $A/\mathscr{A}(A)$ есть подпрямая сумма конечного числа алгебр, каждая из которых является либо алгеброй Кэли — Диксона над своим центром, либо ассоциативной подпрямо неразложимой алгеброй с простой сердцевиной.*

Доказательство. Радикал Андрунакиевича $\mathscr{A}(A)$ нильпотентен в силу теоремы 1. В силу теоремы 8.14 он является пересечением всех $\mathfrak{P}$-идеалов алгебры $A$. Воспользовавшись условием минимальности, можно выбрать конечное число $\mathfrak{P}$-идеалов, которые в пересечении дают $\mathscr{A}(A)$. Для завершения доказательства остается сослаться теперь на теорему 8.12, описывающую структуру подпрямо неразложимых альтернативных алгебр с простой сердцевиной.

## § 2. Альтернативные артиновы алгебры

Алгебра называется *артиновой* (*справа*), если она удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов.

Теорема 2 (Жевлаков). *Пусть $B$ — квазирегулярный идеал альтернативной алгебры $A$, удовлетворяющей условию минимальности для правых идеалов, содержащихся в $B$. Тогда $B$ нильпотентен.*

Доказательство. Если $B \subseteq \mathscr{A}(A)$, то $B$ нильпотентен по теореме 1. Пусть $B \nsubseteq \mathscr{A}(A)$. Тогда в $\mathscr{A}$-полупростой фактор-алгебре $\overline{A} = A/\mathscr{A}(A)$ образ $\overline{B}$ идеала $B$ не равен нулю. Пусть $\overline{C}$ — минимальный правый идеал алгебры $\overline{A}$, содержащийся в $\overline{B}$. В силу полупервичности алгебры $\overline{A}$ мы имеем $\overline{C}\overline{A} \neq (\overline{0})$. Поэтому $\overline{C}$ является неприводимым правым альтернативным $\overline{A}$-модулем. Радикал Жевлакова $\mathscr{J}(\overline{A})$ лежит в ядре каждого неприводимого $\overline{A}$-модуля и, следовательно, $\overline{C}\cdot\mathscr{J}(\overline{A}) = (\overline{0})$. Так как $C \subseteq \mathscr{J}(\overline{A})$, имеем противоречие с полупервичностью алгебры $\overline{A}$. Теорема доказана.

Теорема 3 (Жевлаков). *Всякая альтернативная полупервичная артинова алгебра $A$ разложима в прямую сумму конечного числа своих минимальных идеалов $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, каждый из которых есть либо полная*

*матричная алгебра над некоторым телом, либо алгебра Кэли — Диксона над своим центром. Это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.*

Доказательство. По теореме 2 алгебра $A$ является $\mathscr{Y}$-полупростой. Поэтому пересечение всех примитивных идеалов в алгебре $A$ равно нулю. В силу условия минимальности можно найти конечное множество $B_1, \ldots, B_n$ примитивных идеалов таких, что $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = (0)$ и $C_j = \bigcap_{i \neq j} B_i \neq (0)$ для любого $j = 1, 2, \ldots, n$. Как хорошо известно, примитивная ассоциативная артинова алгебра является простой, алгебра Кэли — Диксона также проста, поэтому в силу теоремы 10.1 фактор-алгебры $A/B_i$ просты и идеалы $B_i$ максимальны. Поэтому $B_i + C_i = A$, откуда, ввиду того, что $B_i \cap C_i = (0)$, получаем $A = B_i \oplus C_i$. Положим $D_r = B_1 \cap \ldots \cap B_r$. Покажем по индукции, что

$$A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus D_k.$$

Для $k = 1$, как мы только что доказали, это верно. Пусть это верно для $k = m$. Рассмотрим идеал $D_m$. По второй теореме о гомоморфизмах мы имеем

$$D_m/D_m \cap B_{m+j} \cong D_m + B_{m+j}/B_{m+j} = A/B_{m+j},$$

где $j = 1, 2, \ldots, n - m$. Следовательно, идеалы $D_m \cap B_{m+j}$ максимальны в $D_m$. Кроме того,

$$\bigcap_{j=1}^{n-m} (D_m \cap B_{m+j}) = (0),$$

и никакое собственное подмножество не имеет нулевого пересечения. Следовательно, как и ранее, получаем

$$D_m = D_{m+1} \oplus \bigcap_{j=2}^{n-m} (D_m \cap B_{m+j}) = D_{m+1} \oplus C_{m+1}.$$

Поэтому $A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_{m+1} \oplus D_{m+1}$, и утверждение для $k = m + 1$ доказано. Значит, требуемое разложение в прямую сумму имеет место для всех $k$. В частности, для $k = n$ получим

$$A = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n.$$

Так как $C_i \cong A/B_i$, то $C_i$ есть простая артинова алгебра, т. е. либо полная матричная алгебра над некоторым телом, либо алгебра Кэли — Диксона. Легко видеть, что идеалы $C_i$ являются минимальными и что других минимальных идеалов в алгебре $A$ нет. Отсюда следует единственность разложения.

Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 в совокупности дают представление о строении произвольной альтернативной артиновой алгебры.

Следствие. *Радикал $\mathcal{Y}(A)$ альтернативной артиновой алгебры $A$ является ее наибольшим нильпотентным идеалом. Фактор-алгебра $A/\mathcal{Y}(A)$ изоморфна конечной прямой сумме полных матричных алгебр над телами и алгебр Кэли — Диксона.*

Приступим теперь к изучению ниль-подколец альтернативных артиновых алгебр.

Предложение 1. *Пусть $B$ — ниль-подкольцо кольца $A$ всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства $V$ над телом $\Delta$. Тогда $B$ нильпотентно и в $V$ можно выбрать базис, в котором все преобразования из $B$ нильтреугольны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $b \in B$ и цепочку подпространств

$$V \supset Vb \supset \ldots \supset Vb^n = (0).$$

Ясно, что $n \leqslant \dim_\Delta V$, т. е. $B$—ниль-кольцо ограниченного индекса. Следовательно, $B$ локально нильпотентно.

Пусть $U$ — подпространство в $V$ с базисом $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Допустим, что $UB = U$. Тогда существуют элементы $b_{ij} \in B$ такие, что

$$e_i = \sum_{j=1}^{k} e_j b_{ji}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Итерация этих соотношений приводит к противоречию с нильпотентностью подкольца $B_0$, порожденного элементами $b_{ij}$.

Теперь очевидно, что цепочка подпространств

$$V \supset VB \supset VB^2 \supset \ldots$$

является строго убывающей, и потому $B^n = (0)$ для $n = \dim_\Delta V$. Выбирая базис в $VB^{n-1}$, дополняя его до базиса $VB^{n-2}$ и т. д., мы получим базис пространства $V$, в котором все преобразования из $B$ нильтреугольны. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $B$ — ниль-подкольцо алгебры Кэли — Диксона $C$ над полем $F$. Тогда $F$-подалгебра $D$, порожденная множеством $B$, нильпотентна.*

Доказательство. Так как $C$ квадратична над $F$, то индекс нильпотентности каждого элемента $b \in B$ равен двум: $b^2 = 0$. По следствию 2 теоремы 5.6 кольцо $B$ локально нильпотентно. Ввиду того, что любой элемент из $D$ есть конечная $F$-линейная комбинация элементов из $B$, алгебра $D$ также локально нильпотентна. Однако она конечномерна и, следовательно, нильпотентна. Предложение доказано.

Теорема 4 (Жевлаков). *Всякое ниль-подкольцо альтернативной артиновой алгебры нильпотентно.*

Доказательство. Пусть $A$ — альтернативная артинова алгебра, $R$ — ее радикал, $B$ — ниль-подкольцо в $A$. Рассмотрим фактор-алгебру $\overline{A} = A/R$. По теореме 3 она разлагается в прямую сумму своих минимальных идеалов $\overline{A} = \overline{A}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{A}_s$. Пусть $\overline{B}$ — образ $B$ в $\overline{A}$ и $\overline{B}_i$ — проекции $\overline{B}$ на $\overline{A}_i$. Если $\overline{A}_i$ ассоциативна, то $\overline{A}_i$ изоморфна алгебре матриц $\Delta^{(i)}_{n_i}$ над некоторым телом $\Delta^{(i)}$ и в силу предложения 1 $\overline{B}_i$ содержится в подалгебре $\overline{C}_i$, которая при некотором изоморфизме алгебры $\overline{A}_i$ на $\Delta^{(i)}_{n_i}$ переходит в алгебру нильтреугольных матриц. Если $\overline{A}_i$ — алгебра Кэли — Диксона, то через $\overline{C}_i$ обозначим нильпотентную подалгебру, которую подкольцо $\overline{B}_i$ в ней порождает. Пусть

$$\overline{C} = \overline{C}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{C}_s$$

и $C$ — полный прообраз $\overline{C}$ в $A$. Ясно, что $C$ — ниль-подкольцо и $C \supset B$. Так что достаточно доказать, что $C$ нильпотентно.

Если $R = (0)$, то $C$ нильпотентно в силу предложений 1 и 2, а также теоремы 3. Это дает нам основание для индукции по индексу нильпотентности радикала. Допустим, что

теорема верна, когда индекс нильпотентности радикала не превосходит $k - 1$. Пусть также $R^k = (0)$ и $R^{k-1} \neq (0)$.

При каноническом гомоморфизме $A$ на $\widetilde{A} = A/R^{k-1}$ образ $\widetilde{R}$ радикала $R$, очевидно, будет радикалом алгебры $\widetilde{A}$. Так как $\widetilde{R}^{k-1} = (0)$, образ $\widetilde{C}$ подкольца $C$ в $\widetilde{A}$ является нильпотентным. Другими словами, существует такое натуральное число $n$, что

$$C^n \subseteq R^{k-1} \cap C.$$

Обозначим $R^{k-1} \cap C$ через $P$. Так как правая нильпотентность и нильпотентность эквивалентны, то для нильпотентности подкольца $C$ достаточно показать существование такого натурального числа $m$, что

$$(P, C)_m = (0). \tag{1}$$

Обозначим через $A_i$ полный прообраз в $A$ минимального идеала $\overline{A}_i$, а через $C_i$ — полный прообраз $\overline{C}_i$. Заметим, что если $x \in A_i$, $y \in A_j$ и $i \neq j$, то $xy \in R$ и для любого $p \in P$ имеет место равенство

$$pR_xR_y = -pR_yR_x.$$

Поэтому существование чисел $m_i$ таких, что

$$(P, C_i)_{m_i} = (0),$$

влечет существование такого числа $m$, что

$$(P, C)_m = (0);$$

достаточно положить $m = m_1 + \ldots + m_s$.

Докажем существование числа $m_1$. Рассмотрим два случая: 1) $\overline{A}_1$ — алгебра матриц над телом $\Delta$; 2) $\overline{A}_1$ — алгебра Кэли — Диксона над полем $F$.

Пусть сначала $\overline{A}_1 \cong \Delta_n$. Тогда $\overline{C}_1$ можно отождествить с алгеброй нильтреугольных матриц. Любой элемент $x \in \overline{C}_1$ представляется в виде

$$x = \sum_{i<j} \alpha_{ij} e_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \Delta.$$

Полный прообраз множества $\Delta \cdot e_{ij}$ обозначим через $T_{ij}$. Элементы, принадлежащие к одному множеству $T_{ij}$, назовем *однотипными*.

Пусть $\overline{A}_1$ — алгебра Кэли — Диксона над полем $F$. Выберем в $\overline{C}_1$ базис $\{e_1, \ldots, e_l\}$ следующим образом. Если $t$ — индекс нильпотентности алгебры $\overline{C}_1$, то выбираем сначала базис в $\overline{C}_1^{t-1}$, дополняем его до базиса $\overline{C}_1^{t-2}$ и т. д. Полный прообраз множества $F \cdot e_i$ обозначим через $T_i$. Элементы, принадлежащие к одному $T_i$, назовем *однотипными*.

Отметим, что в каждом из случаев число типов конечно. Кроме того, для любых $i$ и $j$ имеем включения

$$T_{ij}^2 \subseteq R, \quad T_i^2 \subseteq R. \tag{2}$$

Лемма 4. *Если элементы $c_1, c_2, c_3 \in C_1$ однотипны, то*

$$PR_{c_1}R_{c_2}R_{c_3} = (0).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c_i = d_i c$, где $c$ — прообраз элемента $e_{ij}$ или $e_i$, а $d_i$ — прообраз элемента $\alpha_i \cdot 1$, где $\alpha_i \in \Delta$ или соответственно $\alpha_i \in F$. Очевидно, элементы $d_i$ таковы, что

$$[c, d_i] \in R, \quad (c, d_i, d_j) \in R. \tag{3}$$

Пусть $r \in R^{k-1}$. Рассмотрим элемент $(rc_1) c_2$. В силу центрального тождества Муфанг, (2) и (3) имеем

$$(rc_1) c_2 = [r (cd_1)] c_2 = \\ = - [c_2 (cd_1)] r + (rc)(d_1 c_2) + (c_2 c)(d_1 r) = \\ = (rc)(d_1 c_2) = (rc)(cd_4),$$

где $d_4$ — прообраз элемента $\alpha_1\alpha_2 \cdot 1$. Обозначим теперь $rc$ через $r_1$ и рассмотрим $[r_1 (cd_4)] c_3$. Аналогично предыдущему, получим

$$[r_1 (cd_4)] c_3 = (r_1 c)(cd_5).$$

Но в силу (2) $r_1 c = (rc) c = rc^2 = 0$ и, следовательно,

$$rR_{c_1}R_{c_2}R_{c_3} = 0,$$

что и доказывает лемму.

Определим теперь для элементов из $C_1$ понятие веса. *Весом* $\rho(c)$ элемента $c \in C_1 \setminus R$ назовем наибольшее число $v$ такое, что смежный класс $c + R$ лежит в $\overline{C}_1^v$ и не лежит в $\overline{C}_1^{v+1}$. Элементам радикала $R$ припишем бесконечный вес.

Функция веса обладает следующим свойством: для любых $c,\ c' \in C_1$ имеет место неравенство

$$\rho(cc') \geqslant \rho(c) + \rho(c'). \tag{4}$$

Весом слова $w = R_{c_1} \ldots R_{c_m}$ будем называть число $\rho(w) = \sum_{i=1}^{m} \rho(c_i)$.

Однотипные элементы имеют один и тот же вес, поэтому мы можем говорить о весе типа. Упорядочим типы так, чтобы тип большего веса был больше. Введем теперь частичный порядок на элементах множества $T = \bigcup T_{ij}$ (соответственно $T = \bigcup T_i$). Будем говорить, что $c > c'$, если тип элемента $c$ больше типа элемента $c'$. Однотипные элементы будем считать несравнимыми.

Слово $w = R_{c_1} \ldots R_{c_m}$ назовем *правильным*, если 1) $c_i \in T$, $i = 1, \ldots, m$; 2) либо $\rho(w) = \infty$, либо $c_t < c_{t+1}$ для каждого $t \in \{1, \ldots, m-1\}$ или $c_t$ и $c_{t+1}$ несравнимы.

Лемма 5. *Всякое слово* $w = R_{c_1} R_{c_2} \ldots R_{c_m}$, $c_i \in C_1$, *представимо в виде суммы правильных слов*

$$w = \sum w_i$$

*так, что* $\rho(w_i) \geqslant \rho(w)$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $c_1, c_2, \ldots, c_m \in T$. Пусть $c_t > c_{t+1}$. Тогда представим слово $w$ следующим образом:

$$w = -R_{c_1} \ldots R_{c_{t+1}} R_{c_t} \ldots R_{c_m} + R_{c_1} \ldots R_{c_t \circ c_{t+1}} \ldots R_{c_m}.$$

В первом слове $c_t$ и $c_{t+1}$ стоят уже в нужном порядке, а вес второго в силу (4) не меньше веса первого, причем оно имеет меньше операторов. Доказательство леммы завершается очевидной индукцией.

Закончим теперь доказательство теоремы. Пусть $t$ — индекс нильпотентности подалгебры $\overline{C_1}$ и $n$ — количество типов. Тогда для любого правильного слова $w$ веса более чем $\Sigma(t-1)n$ мы имеем

$$Pw = (0).$$

В силу леммы 5 это означает, что для $m_1 = 2(t-1)n$

$$(P,\ C_1)_{m_1} = (0).$$

Итак, число $m_1$ найдено, а это, как мы видели, доказывает теорему.

**Упражнения**

1 (Ж е в л а к о в). Пусть $A$ — альтернативная артинова алгебра, $C$ — ее правый идеал, $B$ — подкольцо. Тогда, если для любого элемента $b \in B$ существует натуральное число $n = n(b)$ такое, что $b^n \in C$, то и $B^N \subseteq C$ для некоторого натурального числа $N$.

Подмножество $S$ алгебры $A$ называется *слабозамкнутой подсистемой*, если для любых $a, b \in S$ существует такой элемент $\gamma(a, b) \in \Phi$, что $ab + \gamma(a, b)\, ba \in S$. Подалгебра $S^*$, порожденная слабозамкнутой подсистемой $S$, называется *обертывающей алгеброй* для $S$.

**2.** Если $S$ — слабозамкнутая ниль-подсистема алгебры Кэли — Диксона $C$ и $\gamma(a, b) \neq 1$ для любых $a, b \in S$, то обертывающая алгебра $S^*$ этой подсистемы нильпотентна. Привести пример слабозамкнутой ниль-подсистемы в $C$, обертывающая которой не является нильпотентной.

3 (М а р к о в и ч е в). Пусть $A$ — альтернативная артинова алгебра, $S$ — ее слабозамкнутая ниль-подсистема такая, что $\gamma(a, b) \neq 1$ ни для каких $a, b \in S$. Тогда обертывающая алгебра $S^*$ этой подсистемы нильпотентна.

4 (М а р к о в и ч е в). Радикал альтернативной артиновой алгебры совпадает с пересечением всех ее максимальных нильпотентных подалгебр.

## § 3. Альтернативные алгебры с условием максимальности

Альтернативная алгебра называется *нётеровой* (*справа*), если она удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов. Хорошо известна теорема Левицкого о том, что в ассоциативной нётеровой алгебре любой односторонний ниль-идеал нильпотентен [252, стр. 40]. В этом параграфе мы докажем аналогичную теорему для альтернативных алгебр с одним небольшим ограничением на характеристику.

Основные технические трудности вбирает в себя

Л е м м а 6. *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $B$ и $I$ — ее идеалы, $B^2 \subseteq I$ и идеал $I$ нильпотентен. Тогда, если алгебра $A$ удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов, содержащихся в $B$, то $B$ — нильпотентный идеал.*

Доказательство. Индукцией по $k$ докажем существование такого числа $f(k)$, что

$$B^{f(k)} \subseteq I^k.$$

Лемма таким образом будет доказана, так как $I^n = (0)$ для некоторого $n$ и, следовательно, $B^{f(n)} = (0)$.

Основание для индукции имеется: $f(1) = 2$. Допустим, что число $f(k)$ существует. Докажем существование числа $f(k+1)$. Предположим, что его не существует, и приведем это предположение к противоречию.

Введем некоторые обозначения. Пусть $P$ — некоторый идеал в $A$. Положим

$$E_0(P) = \{x \in B \mid Px \subseteq I^{k+1}\},$$
$$E_i(P) = E_0((P, B)_i).$$

Легко видеть, что $E_i(P)$ — идеалы в $A$. Идеал, на котором стабилизируется возрастающая цепочка

$$E_0(P) \subseteq E_1(P) \subseteq \ldots \subseteq E_i(P) \subseteq \ldots,$$

обозначим через $E(P)$.

Так как $B^{f(k)} \subseteq I^k$, то сделанное нами предположение об отсутствии числа $f(k+1)$ влечет

$$E(I^k) \neq B.$$

Пусть $E(C)$ — максимальный элемент множества идеалов $\{E(C_\alpha) \mid C_\alpha \subseteq I^k,\ E(C_\alpha) \neq B\}$. Рассматривая вместо $C$, если нужно, идеал $(C, B)_i$ для подходящего $i$, мы можем считать, что

$$E_0(C) = E_1(C) = \ldots = E(C).$$

Кроме того, взяв идеал $C + I^{k+1}$ вместо $C$, мы можем еще дополнительно предполагать, что $C \supseteq I^{k+1}$.

Пусть $b \in B \setminus E(C)$. Тогда $(CB)\,b \nsubseteq I^{k+1}$. Рассмотрим множество $D = (CB)\,b + I^{k+1}$. Докажем, что $D$ — идеал в $A$.

Будем писать $u \equiv v$, если $u - v \in I^{k+1}$.

В силу правой альтернативности и тождества Муфанг для любых $c \in C$, $x$, $y \in B$ и $a \in A$ справедливы соотношения

$$(cx)\,y \equiv -(cy)\,x, \tag{5}$$
$$[(cx)\,y]\,a \equiv -[(ca)\,y]\,x. \tag{6}$$

Поэтому

$$[(cx)\,b]\,a \equiv -[(ca)\,b]\,x \equiv [(ca)\,x]\,b = (c_1x)\,b,$$

где $c_1 \in C$. Это доказывает, что $D$ — правый идеал. Далее,

$$a\,[(cx)\,b] \equiv -a\,[(cb)\,x] =$$
$$= a\,[(xb)\,c] - [(ac)\,b]\,x - [(ax)\,b]\,c \equiv -[(ac)\,b]\,x \equiv$$
$$\equiv [(ac)\,x]\,b = (c_2x)\,b,$$

где $c_2 \in C$. Это означает, что $D$ — левый идеал в $A$, т. е. идеал.

Так как $D \subseteq C$, то $E(D) \supseteq E(C)$. Однако $b \in E(D)$, и потому $E(D) \neq E(C)$. Следовательно, $E(D) = B$. Это означает, что

$$(D,\ B)_q \subseteq I^{k+1}$$

для некоторого $q$. Но тогда в силу (5)

$$(C,\ B)_q b \subseteq I^{k+1},$$

что противоречит выбору элемента $b$.

Лемма доказана.

Теорема 5 (Жевлаков). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с условием максимальности для двусторонних идеалов. Тогда ее радикал Бэра $\mathscr{B}(A)$ нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $B$ — максимальный разрешимый идеал алгебры $A$. Так как фактор-алгебра $A/B$ не имеет ненулевых тривиальных идеалов, то $B = \mathscr{B}(A)$. Рассмотрим цепочку

$$B \supset B^{(1)} \supset \ldots \supset B^{(n)} = (0).$$

Ясно, что $B^{(n-1)}$ — нильпотентный идеал. По лемме 6 мы можем теперь заключить, что идеал $B^{(n-2)}$ также нильпотентен. Применяя лемму 6 еще несколько раз, получим, что идеал $B$ нильпотентен.

Теорема доказана.

Теорема 6 (Жевлаков). *Пусть $A$ — альтернативная нётерова алгебра над кольцом $\Phi$, содержащим элемент $1/3$. Тогда всякий ее односторонний ниль-идеал нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $B$ — односторонний ниль-идеал в $A$. Покажем, что $B \subseteq \mathscr{B}(A)$, и воспользоваться

зуемся теоремой 5. Фактор-алгебра $A/\mathscr{B}(A)$ есть подпрямая сумма первичных альтернативных нётеровых алгебр, причем в силу ограничения на характеристику среди них нет исключительных первичных алгебр характеристики 3. Остальные же ненулевых односторонних ниль-идеалов иметь не могут. Следовательно, $B \subseteq \mathscr{B}(A)$, и теорема доказана.

**Упражнения**

**1.** Доказать, что в ассоциативном нётеровом кольце всякое ниль-подкольцо нильпотентно.

Указание. Воспользоваться теоремами 4 и 5, а также теоремой Голди [252].

**2.** Пусть $A$ — альтернативная нётерова алгебра над кольцом Ф, содержащим 1/3. Тогда всякое ее ниль-подкольцо разрешимо. Будет ли оно нильпотентным, неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

Андрунакиевич [16—18], Жевлаков [67, 68, 71, 77, 78], Марковичев [143], Ословский [166], Слейтер [200, 202, 204], Херстейн [252], Цорн [258, 259], Шафер [261].

Результаты об алгебрах с условиями конечности в других многообразиях алгебр: Пчелинцев [174], Роомельди [183], Тэди [234]. См. также литературу к главе 15.

*ГЛАВА 13*

# СВОБОДНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

В теории любого многообразия алгебр важную роль играют свободные алгебры. Настоящая глава посвящена свободным альтернативным алгебрам. Сначала мы рассмотрим многообразия, порожденные свободными конечно-порожденными альтернативными алгебрами. Затем мы покажем, что свободные альтернативные алгебры могут содержать ненулевые квазирегулярные и нильпотентные идеалы, и получим ряд характеризаций радикала Жевлакова свободной альтернативной алгебры. Третья тема данной главы — это центры и подалгебры специального вида свободных альтернативных алгебр.

## § 1. Тождества конечнопорожденных альтернативных алгебр

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Ф-алгебр. Обозначим через $\mathfrak{M}_n$ многообразие, порожденное $\mathfrak{M}$-свободной алгеброй $\Phi_{\mathfrak{M}}[x_1, \ldots, x_n]$ от $n$ свободных порождающих. Идеал тождеств этого многообразия совпадает с идеалом тождеств алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[x_1, \ldots, x_n]$. Как легко видеть, справедливы следующие включения:

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}.$$

Ясно также, что $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_n \mathfrak{M}_n$. Наименьшее значение $n$, при котором $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}$, называется *базисным рангом* многообразия $\mathfrak{M}$ и обозначается через $r_b(\mathfrak{M})$. Иначе говоря, $r_b(\mathfrak{M})$ — такое наименьшее число $k$, что каждая алгебра из $\mathfrak{M}$ удовлетворяет всем тождествам, выполняющимся в $\mathfrak{M}$-свободной алгебре от $k$ свободных порождающих (или $\aleph_0$, если такого числа не существует).

По лемме 3.6 свободная ассоциативная алгебра от счетного множества порождающих вкладывается в свободную 2-порожденную ассоциативную алгебру. Отсюда, очевидно, следует, что $r_b$ (Ass) $= 2$, где Ass — многообразие ассоциативных алгебр. Аналогично из теоремы Ширшова (теорема 3.7) следует, что $r_b$ (SJord) $= 2$, где SJord — многообразие, порожденное всеми специальными йордановыми алгебрами. Ширшов доказал также, что и для многообразия Lie алгебр Ли $r_b$ (Lie) $= 2$. В 1958 г. он сформулировал вопрос о нахождении точного значения базисного ранга многообразия Alt альтернативных колец. Из теоремы Артина следует, что $r_b$ (Alt) $\geqslant 3$. В 1963 г. Дорофеев доказал, что $r_b$ (Alt) $\geqslant 4$, а в 1977 г. Шестаков доказал, что $r_b$ (Alt) $= \aleph_0$. Таким образом, всякое конечнопорожденное альтернативное кольцо удовлетворяет некоторому тождеству, не выполняющемуся в свободном альтернативном кольце от счетного множества порождающих. Доказательству этого результата и посвящен данный параграф.

Пусть $S_n$ — симметрическая группа $n$-й степени. Для всякого разбиения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ числа $n$ рассмотрим в $S_n$ подгруппы $S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_k}$, где $S_{n_j}$ — группа всех подстановок множества из $n_j$ элементов $\{n_1 + \ldots + n_{j-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_{j-1} + n_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Ясно, что множество $S^n_{n_1, n_2 \ldots, n_k} = S_{n_1}S_{n_2} \ldots S_{n_k}$ является подгруппой группы $S_n$. Через $V^n_{n_1, n_2 \ldots, n_k}$ мы обозначим какую-либо полную систему представителей левых смежных классов группы $S_n$ по подгруппе $S^n_{n_1, n_2 \ldots, n_k}$.

Если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый неассоциативный многочлен и $\sigma \in S_n$, то мы положим

$$f^\sigma = [f(x_1, \ldots, x_n)]^\sigma = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Определим в произвольной альтернативной алгебре по индукции счетное семейство кососимметрических функций. Положим $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, и если уже определена кососимметрическая функция $f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{2n-1})$, то

$$f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \sum_{\sigma \in V^{2n+1}_{3,2n-2}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_{2n+1})]^\sigma.$$

Заметим, что, ввиду кососимметричности функций $f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{2n-1})$ и $(x_1, x_2, x_3)$, значение суммы в правой части не зависит от выбора множества $V^{2n+1}_{3,\,2n-2}$. В дальнейшем мы в аналогичных ситуациях не будем специально оговаривать этот факт. Из определения видно, что функция $f_n$ является кососимметрической функцией своих аргументов.

Лемма 1. *Всякая альтернативная алгебра удовлетворяет тождеству*

$$f_n(xyx, y, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = f_n(x, yxy, x_1, \ldots, x_{2n-1}). \quad (1)$$

Доказательство. Докажем вначале, что во всякой альтернативной алгебре верно тождество

$$(r, s, xyx) = x(r, s, y)x + \{xy(r, s, x)\}, \quad (2)$$

где $\{xyz\} = (xy)z + (zy)x = x(yz) + z(yx)$. Пусть $f(x, y, z, t)$ — функция Клейнфелда. Ввиду тождества Муфанг $(r, s, x^2) = x \circ (r, s, x)$ и его линеаризации, получаем

$$\begin{aligned}(r, s, xyx) &= -(r, s, x^2y) + (r, s, (xy)\circ x) = \\ &= (x^2y, s, r) + x\circ(r, s, xy) + (xy)\circ(r, s, x) = \\ &= f(x^2, y, s, r) + y[x\circ(x, s, r)] + (y, s, r)x^2 + \\ &\qquad + x\circ(r, s, xy) + (xy)\circ(r, s, x).\end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}f(x^2, y, s, r) &= ([x^2, y], s, r) + (x^2, y, [s, r]) = \\ &= (x\circ[x, y], s, r) + x\circ(x, y, [s, r]) = \\ &= x\circ([x, y], s, r) + [x, y]\circ(x, s, r) + x\circ(x, y, [s, r]) = \\ &= x\circ f(x, y, s, r) + [x, y]\circ(x, s, r) = \\ &= x\circ(xy, s, r) - x\circ(y(x, s, r)) - x\circ((y, s, r)x) + \\ &\qquad + [x, y]\circ(x, s, r).\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение для $f(x^2, y, s, r)$ в предыдущее равенство, мы получим (2).

Будем доказывать равенство (1) индукцией по $n$. Справедливость основания индукции при $n = 1$ вытекает из тождества (7.17). Пусть уже доказано, что

$$f_{n-1}(xyx, y, x_1, \ldots, x_{2n-3}) = f_{n-1}(x, yxy, x_1, \ldots, x_{2n-3}). \quad (3)$$

Линеаризуя это тождество по $y$, мы получим

$$f_{n-1}(xyx, z, x_1, \ldots, x_{2n-3}) + f_{n-1}(xzx, y, x_1, \ldots, x_{2n-3}) = f_{n-1}(x, \{zxy\}, x_1, \ldots, x_{2n-3}). \quad (4)$$

Теперь по определению функции $f_n$

$$f_n(xyx, y, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \sum_{\sigma \in V_{1,2n-2}^{2n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, xyx, y), x_2, \ldots, x_{2n-1})]^\sigma - \sum_{\sigma \in V_{2,2n-3}^{2n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, x_2, y), xyx, x_3, \ldots, x_{2n-1})]^\sigma + \sum_{\sigma \in V_{2,2n-3}^{2n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, x_2, xyx), y, x_3, \ldots, x_{2n-1})]^\sigma + \sum_{\sigma \in V_{3,2n-4}^{2n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, x_2, x_3), xyx, y, x_4, \ldots, x_{2n-1})]^\sigma = S_1(x, y) - S_2(x, y) + S_3(x, y) + S_4(x, y);$$

при этом мы считаем, что $x^\sigma = x$, $y^\sigma = y$. В силу (7.17) и (3) мы имеем

$$f_{n-1}((x_1, xyx, y), x_2, \ldots, x_{2n-1}) = -f_{n-1}((x_1, yxy, x), x_2, \ldots, x_{2n-1}),$$

$$f_{n-1}((x_1, x_2, x_3), xyx, y, x_4, \ldots, x_{2n-1}) = -f_{n-1}((x_1, x_2, x_3), yxy, x, x_4, \ldots, x_{2n-1}),$$

откуда

$$S_1(x, y) + S_4(x, y) = -S_1(y, x) - S_4(y, x).$$

Далее, согласно (4) и (2) получаем

$$-f_{n-1}((x_1, x_2, y), xyx, x_3, \ldots, x_{2n-1}) + f_{n-1}((x_1, x_2, xyx), y, x_3, \ldots, x_{2n-1}) =$$
$$= -f_{n-1}(x(x_1, x_2, y)x, y, x_3, \ldots, x_{2n-1}) - f_{n-1}(\{yx(x_1, x_2, y)\}, x, x_3, \ldots, x_{2n-1}) +$$
$$+ f_{n-1}(x(x_1, x_2, y)x, y, x_3, \ldots, x_{2n-1}) + f_{n-1}(\{xy(x_1, x_2, x)\}, y, x_3, \ldots, x_{2n-1}) =$$
$$= -f_{n-1}(\{yx(x_1, x_2, y)\}, x, x_3, \ldots, x_{2n-1}) + f_{n-1}(\{xy(x_1, x_2, x)\}, y, x_3, \ldots, x_{2n-1}),$$

откуда

$$-S_2(x, y) + S_3(x, y) = S_2(y, x) - S_3(y, x).$$

Таким образом,

$$f_n(xyx, y, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = -f_n(yxy, x, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \\ = f_n(x, yxy, x_1, \ldots, x_{2n-1}).$$

Лемма доказана.

Предложение 1 (Шестаков). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $M$ — некоторый $\Phi$-модуль, и пусть отображение $f$ для фиксированного натурального числа поставит в соответствие элементам $a_1, \ldots, a_n \in A^{\#}$ некоторый подмодуль $f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq M$, причем $f$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) $f(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = f(a_1, \ldots, a_n)$ *для любой перестановки* $\sigma \in S_n$;

б) $f(a, a, a_1, \ldots, a_{n-2}) = (0)$;

в) $f(1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = (0)$;

г) $f(\alpha a + \beta b, a_1, \ldots, a_{n-1}) \subseteq f(a, a_1, \ldots, a_{n-1}) + f(b, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $\alpha, \beta \in \Phi$;

д) $f(aba, a_1, \ldots, a_{n-1}) \subseteq f(a, a_1, \ldots, a_{n-1}) + f(b, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

*Тогда для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ имеет место включение*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \sum_i f(u_1^{(i)}, \ldots, u_n^{(i)}), \tag{5}$$

*где $u_j^{(i)}$ — всевозможные правильные $r_1$-слова от некоторого фиксированного упорядоченного множества $X$ порождающих алгебры $A$. Если, кроме того, отображение $f$ удовлетворяет условию*

е) $f(a, ba, a_1, \ldots, a_{n-2}) \subseteq f(a, b, a_1, \ldots, a_{n-2})$,

*то для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \sum_i f(x_1^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}, u^{(i)}), \tag{6}$$

*где $x_j^{(i)} \in X$, $u^{(i)}$ — правильные $r_1$-слова, не содержащие элементов $x_1^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}$.*

Доказательство. Обозначим сумму всех подмодулей вида $f(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_1, \ldots, u_n$ — правильные $r_1$-слова, через $M_0$. Ввиду условия г), для доказательства

включения (5) достаточно показать, что $f(v_1, \ldots, v_n) \subseteq M_0$ для любых неассоциативных слов $v_1, \ldots, v_n$ от порождающих алгебры $A$. Будем доказывать это утверждение индукцией по числу $m(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) + k(v_1, \ldots, v_n)$, где $k(v_1, \ldots, v_n)$ — число слов среди $v_1, \ldots, v_n$, не являющихся правильными $r_1$-словами. Очевидно основание индукции: $m(v_1, \ldots, v_n) = n$. Пусть теперь $m(v_1, \ldots, v_n) > n$. Если все $v_i$ являются правильными $r_1$-словами, то доказывать нечего. Пусть, например, слово $v_1$ не является правильным $r_1$-словом. Тогда мы имеем согласно предложению 5.3

$$v_1 = \pm \langle v_1 \rangle + \sum_i \alpha_i a_i b_i a_i + \sum_j \beta_j \{a_j' b_j' a_j''\},$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \Phi$, $a_i, a_j', a_j''$ — неассоциативные слова длины меньшей, чем $v_1$, $b_i, b_j'$ либо равны 1, либо также есть неассоциативные слова длины меньшей, чем $v_1$. Заметим теперь, что в силу условия г) справедлива следующая линеаризованная форма условия д):

д′) $$f(\{abc\}, a_1, \ldots, a_{n-1}) \subseteq f(a, a_1, \ldots, a_{n-1}) + f(b, a_1, \ldots, a_{n-1}) + f(c, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

Согласно г), д), д′) мы получаем

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subseteq f(\langle v_1 \rangle, v_2, \ldots, v_n) + \sum_i f(a_i, v_2, \ldots, v_n) + \sum_i f(b_i, v_2, \ldots, v_n) + \sum_j f(a_j', v_2, \ldots, v_n) + \sum_j f(a_j'', v_2, \ldots, v_n) + \sum_j f(b_j', v_2, \ldots, v_n),$$

откуда по предположению индукции и ввиду условия в) имеем

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subseteq M_0.$$

Тем самым включение (5) доказано.

Пусть теперь отображение $f$ удовлетворяет условию е). Обозначим правую часть включения (6) через $M_1$. Нам достаточно показать, что $f(v_1, \ldots, v_n) \subseteq M_1$ для любых неассоциативных слов $v_1, \ldots, v_n$ от множества порож-

дающих $X$ алгебры $A$. Докажем вначале, что $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, v) \subseteq M_1$ для любых элементов $x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ и для любого слова $v$. Проведем индукцию по $d(v)$. Очевидно основание индукции: $d(v) = 1$. Пусть $d(v) > 1$. По доказанному выше без ограничения общности можно считать, что $v$ является правильным $r_1$-словом. Если $v$ не содержит элементов $x_1, \ldots, x_{n-1}$, то все доказано. Пусть, например, $x_1$ входит в $v$, и пусть $v' = v\Delta_1^1$ — слово, полученное вычеркиванием элемента $x_1$ в слове $v$. По предложению 5.3 и ввиду условий г), д), д$'$) и предположения индукции мы тогда получаем

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, v) \subseteq f(x_1, \ldots, x_{n-1}, v'x_1) + M_1,$$

откуда ввиду условия е) и предположения индукции следует, что

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, v) \subseteq M_1.$$

В общем случае мы проведем индукцию по числу $m = \sum_{i=1}^{n-1} d(v_i)$. Основанием индукции при $m = n - 1$ является уже рассмотренный случай. Пусть, например, $d(v_1) > 1$, $v_1 = v_1'v_1''$. В силу а), г) и е) мы получаем

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) &= f(v_1'v_1'', v_n, v_3, \ldots, v_2) = \\ &= f(v_1'(v_1'' + v_n) - v_1'v_n, (v_1'' + v_n) - v_1'', v_3, \ldots, v_2) \subseteq \\ &\subseteq f(v_1', v_1'', v_3, \ldots, v_2) + f(v_1', v_n, v_3, \ldots, v_2) + \\ &+ f(v_1'v_n, v_1'', v_3, \ldots, v_2) = f(v_1', v_2, v_3, \ldots, v_1'') + \\ &+ f(v_1', v_2, v_3, \ldots, v_n) + f(v_1'', v_2, v_3, \ldots, v_1'v_n), \end{aligned}$$

откуда по предположению индукции

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \subseteq M_1.$$

Предложение доказано.

Следствие. *В условиях предложения* 1, *если алгебра $A$ обладает множеством порождающих из $m$ элементов, то $f(a_1, \ldots, a_n) = (0)$ при $n \geqslant 2^m$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$. Если отображение $f$ удовлетворяет и условию* е), *то тогда $f(a_1, \ldots, a_n) = (0)$ при $n \geqslant m + 2$.*

Доказательство. Как легко видеть, в данном случае в алгебре $A$ существует всего не более $2^m - 1$

различных правильных $r_1$-слов от порождающих. Значит, при $n \geqslant 2^m$ среди любых правильных $r_1$-слов $u_1, \ldots, u_n$ найдутся два одинаковых, и по условию б) мы получаем $f(u_1, \ldots, u_n) = (0)$, откуда в силу (5) и $f(a_1, \ldots, a_n) = (0)$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$. Аналогично из (6) следует второе утверждение следствия.

Пусть $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $\mathrm{Alt}[X_m]$ — свободная альтернативная алгебра от множества порождающих $X_m$.

Теорема 1 (Шестаков). *Алгебра* $\mathrm{Alt}[X_m]$ *удовлетворяет тождеству*

$$f_{2^m-1}(y_1, \ldots, y_{2^{m+1}}) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $f$, ставящее в соответствие произвольным элементам $a_1, \ldots, a_{2^m}$ алгебры $\mathrm{Alt}[X_m]$ следующий подмодуль Ф-модуля $\mathrm{Alt}[X_m]$:

$$f(a_1, \ldots, a_{2^m}) = \{f_{2^m-1}(a_1, \ldots, a_{2^m}, y) \mid y \in \mathrm{Alt}[X_m]\}.$$

Ввиду кососимметричности и полилинейности функции $f_{2^m-1}$, отображение $f$ удовлетворяет условиям а), б), г) предложения 1. Кроме того, из определения функций $f_n$ легко следует, что $f_n(1, b_1, \ldots, b_{2n}) = 0$ для любого $n$ и любых элементов $b_1, \ldots, b_{2n} \in \mathrm{Alt}[X_m]$. Следовательно, отображение $f$ удовлетворяет условию в) предложения 1. Наконец, линеаризуя соотношение (1) по $y$, получим тождество

$$f_n(xyx, z, x_1, \ldots, x_{2n-1}) = f_n(x, \{yxz\}, x_1, \ldots, x_{2n-1}) + f_n(y, xzx, x_1, \ldots, x_{2n-1}),$$

откуда, ввиду кососимметричности функции $f_{2^m-1}$, следует, что отображение $f$ удовлетворяет и условию д). По следствию предложения 1 мы получаем, что $f(a_1, \ldots, a_{2^m}) = (0)$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_{2^m} \in \mathrm{Alt}[X_m]$. Но это эквивалентно справедливости в алгебре $\mathrm{Alt}[X_m]$ тождества

$$f_{2^m-1}(y_1, \ldots, y_{2^{m+1}}) = 0.$$

Теорема доказана.

Лемма 2. *Во всякой альтернативной разрешимой индекса 2 алгебре справедливо тождество*

$$f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \\ = \varphi(n) \sum_{\sigma \in V_{3,2n-2}^{2n+1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [(x_1, x_2, x_3) R_{x_4} \ldots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma},$$

*где* $\varphi(n) = (n-1)!\,(2n-3)!!$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, ввиду соотношения $R_x \circ R_y = R_{x \circ y}$, правая часть доказываемого равенства кососимметрична по переменным $x_4, \ldots, x_{2n+1}$, и поэтому значение суммы в правой части не зависит от выбора множества $V_{3,\,2n-2}^{2n+1}$. Будем доказывать лемму индукцией по $n$. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно, так что основание для индукции имеется. Пусть уже доказано, что в альтернативной разрешимой индекса 2 алгебре $A$ верно соотношение

$$f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{2n-1}) = \\ = \varphi(n-1) \sum_{\sigma \in V_{3,2n-4}^{2n-1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [(x_1, x_2, x_3) R_{x_4} \ldots R_{x_{2n-1}}]^{\sigma}.$$

Тогда по определению функции $f_n$ для любых $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{2n+1} \in A$ мы имеем

$$f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = \\ = \sum_{\sigma \in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} [f_{n-1}((x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_{2n+1})]^{\sigma} = \\ = \varphi(n-1) \sum_{\sigma \in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \sum_{\sigma_1 \in V_{3,\,2n-5}^{2n-2}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma_1} \times \\ \times [(x_4, x_5, x_6) R_{x_7} \ldots R_{x_{2n+1}} R_{(x_1, x_2, x_3)}]^{\sigma\sigma_1} + \\ + \varphi'(n-1) \sum_{\sigma \in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \sum_{\sigma_1 \in V_{2,\,2n-4}^{2n-2}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma_1} \times \\ \times [((x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) R_{x_6} \ldots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma\sigma_1};$$

при этом мы воспользовались тем, что $(x_1, x_2, x_3)^{\sigma} = (x_1, x_2, x_3)^{\sigma\sigma_1}$. Как легко видеть, каждое слагаемое первой суммы равно нулю, поэтому нам остается рассмот-

реть вторую сумму. Так как $yR_{xz}=0$ и $y(R_x\circ R_z)=$ $=yR_{x\circ z}=0$ для любого $y\in A^2$, то мы получаем

$$\sum_{\sigma\in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\sum_{\sigma_1\in V_{2,\,2n-4}^{2n-2}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma_1}\times$$
$$\times[((x_1,x_2,x_3),x_4,x_5)R_{x_6}\dots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma\sigma_1}=$$
$$=\sum_{\sigma\in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\sum_{\sigma_1\in V_{2,\,2n-4}^{2n-2}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma_1}\times$$
$$\times[(x_1,x_2,x_3)R_{x_4}R_{x_5}R_{x_6}\dots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma\sigma_1}=$$
$$=\sum_{\sigma\in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\cdot\frac{(2n-2)!}{2!\,(2n-4)!}\times$$
$$\times[(x_1\,x_2,x_3)R_{x_4}\dots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma}=$$
$$=\frac{(2n-2)!}{2!\,(2n-4)!}\sum_{\sigma\in V_{3,\,2n-2}^{2n+1}}(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}[(x_1,x_2,x_3)R_{x_4}\dots R_{x_{2n+1}}]^{\sigma}.$$

Так как $\varphi(n-1)\cdot\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}=(n-2)!\,(2n-5)!!\times$ $\times(n-1)(2n-3)=(n-1)!\,(2n-3)!!=\varphi(n)$, отсюда следует справедливость леммы.

Следствие. *Пусть в аддитивной группе кольца операторов* Φ *нет элементов порядка* $\leqslant 2n-1$. *Тогда в свободной альтернативной* Φ*-алгебре* $\mathrm{Alt}[X_{2n+1}]$ *от порождающих* $x_1,x_2,\dots,x_{2n+1}$ *элемент* $f_n(x_1,x_2,\dots$ $\dots,x_{2n+1})$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть $A$ — разрешимая индекса 2 алгебра над кольцом Φ из примера Дорофеева (§ 6.2). По определению умножения в алгебре $A$ и ввиду леммы 3 мы имеем для элементов $x,e_1,\dots,e_{2n}$ алгебры $A$

$$f_n(x,e_1,\dots,e_{2n})=$$
$$=(n-1)!\,(2n-3)!!\,\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}(x,e_1,e_2)R_{e_3}\dots R_{e_{2n}}=$$
$$=n!\,(2n-1)!!\,xR_1R_2\dots R_{2n}\neq 0.$$

Отсюда вытекает утверждение следствия.

Обозначим через $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ многообразие альтернативных Φ-алгебр, порожденное свободной альтернативной

Ф-алгеброй Alt $[X_m]$ от $m$ порождающих, и через $\mathrm{Alt}_m$ — многообразие альтернативных колец, порожденное свободным альтернативным кольцом от $m$ порождающих. Ясно, что $\mathrm{Alt}_m = \mathrm{Alt}_m(\boldsymbol{Z})$, где $\boldsymbol{Z}$ — кольцо целых чисел. Как легко видеть, справедлива следующая цепочка включений:

$$\mathrm{Alt}_1(\Phi) \subseteq \mathrm{Alt}_2(\Phi) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Alt}_n(\Phi) \subseteq \qquad (*)$$

Первые три включения в этой цепочке являются строгими: строгость включений $\mathrm{Alt}_1(\Phi) \subset \mathrm{Alt}_2(\Phi) \subset \mathrm{Alt}_3(\Phi)$ вытекает из теоремы Артина, а строгость включения $\mathrm{Alt}_3(\Phi) \subset \mathrm{Alt}_4(\Phi)$ была установлена в работах Дорофеева и Хумм и Клейнфелда. Ширшов поставил вопрос о том, стабилизируется ли цепочка (*) при $\Phi = \boldsymbol{Z}$ на конечном шаге. Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным.

Теорема 2 (Шестаков). *Пусть в аддитивной группе кольца* Ф *нет элементов конечного порядка. Тогда для любого натурального* $m$ *включение* $\mathrm{Alt}_m(\Phi) \subset \mathrm{Alt}_{2^m+1}(\Phi)$ *является строгим. В частности, в этом случае цепочка многообразий* (*) *не стабилизируется ни на каком конечном шаге.*

Доказательство вытекает из теоремы 1 и следствия леммы 2.

Полагая $\Phi = \boldsymbol{Z}$, мы получаем

Следствие. $r_b(\mathrm{Alt}) = \aleph_0$.

Остается открытым вопрос о том, могут ли в цепочке (*) на некоторых местах быть равенства.

Интересно также найти какие-либо системы определяющих тождеств многообразий $\mathrm{Alt}_m$, $m \geqslant 3$.

Рассмотрим теперь, как соотносятся понятия разрешимости и нильпотентности в многообразиях $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$. Мы знаем (см. § 6.2), что в многообразии всех альтернативных Ф-алгебр эти понятия не эквивалентны: для любого кольца операторов Ф существует разрешимая альтернативная Ф-алгебра, не являющаяся нильпотентной. Оказывается, что в многообразиях $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ ситуация существенно меняется.

Теорема 3 (Шестаков). *Пусть* Ф — *поле характеристики* 0. *Тогда всякая разрешимая алгебра из многообразия* $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ *нильпотентна.*

Доказательство. Докажем вначале, что всякая разрешимая индекса 2 алгебра $A$ из многообразия $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ нильпотентна. По теореме 1 и лемме 2 в алгебре $A$ выполнено тождество

$$\sum_{\sigma\in V^{2^m+1}_{3,\,2^m-2}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}[(x_1, x_2, x_3)R_{x_4}\ldots R_{x_{2^m+1}}]^\sigma = 0.$$

Полагая здесь $x_{2^m+1} = y_1y_2$, получим тождество

$$\sum_{\sigma\in V^{2^m}_{2,\,2^m-2}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}[(y_1y_2, x_1, x_2)R_{x_3}\ldots R_{x_{2^m}}]^\sigma = 0;$$

при этом мы считаем, что $y_1^\sigma = y_1$, $y_2^\sigma = y_2$. Так как $yR_{xz} = 0$ и $y(R_x\circ R_z) = yR_{x\circ z} = 0$ для любого $y\in A^2$, то наше тождество приводится к следующему виду:

$$2^m(2^m-1)\,y_1y_2R_{x_1}\ldots R_{x_{2^m}} = 0.$$

Следовательно, алгебра $A$ правонильпотентна индекса $2^m+2$. Ввиду следствия теоремы 5.5, мы получаем, что алгебра $A$ нильпотентна индекса $(2^m+2)^2$. Пусть теперь $F$ — свободная алгебра в многообразии $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ от счетного множества порождающих. Из доказанного следует, что $F^{(2^m+2)^2}\subseteq F^{(2)}$. Пусть уже доказано, что для натурального числа $n\geqslant 2$ существует число $f(m, n)$ такое, что $F^{f(m,n)}\subseteq F^{(n)}$. Тогда для любой алгебры $A\in\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ мы имеем $A^{f(n,m)}\subseteq A^{(n)}$. В частности, $(F^2)^{f(m,n)}\subseteq$ $\subseteq (F^2)^{(n)} = F^{(n+1)}$. Заметим, что по следствию 2 теоремы 1.3 многообразие $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$ является однородным. Повторяя теперь дословно рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 8.8 (см. также упражнение 2 к § 8.2), мы получаем, что в качестве $f(m, n+1)$ можно взять число $[f(m, n)]^2$. По индукции заключаем, что числа $f(m, n)$ существуют для любого натурального $n$, откуда следует эквивалентность разрешимости и нильпотентности в многообразии $\mathrm{Alt}_m(\Phi)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $A$ — конечнопорожденная альтернативная алгебра над полем характеристики 0. Тогда всякая разрешимая подалгебра алгебры $A$ нильпотентна.*

Заметим здесь же, что для йордановых алгебр аналогичный результат не справедлив — разрешимая ненильпотентная специальная йорданова алгебра из примера Жевлакова (§ 4.1) по теореме 3.7 вложима в 2-порожденную йорданову алгебру.

**Упражнения**

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 2, определяемое тождеством $x^2 = 0$. Доказать, что $r_b(\mathfrak{M}) = \aleph_0$.

2. Пусть $1/2 \in \Phi$. Обозначим через $\mathrm{Jord}^{(2)}$ многообразие йордановых разрешимых индекса 2 алгебр над Ф. Доказать, что $r_b(\mathrm{Jord}^{(2)}) = \aleph_0$.

3 (Шестаков). Пусть $J$ — конечномерная йорданова алгебра над полем характеристики 0. Доказать, что в многообразии $\mathrm{Var}(J)$, порожденном алгеброй $J$, всякая разрешимая алгебра нильпотентна.

Указание. Достаточно доказать, что для всякой алгебры $A \in \mathrm{Var}(J)$ равенство $(A^3)^3 = (0)$ влечет ее нильпотентность.

4. Доказать, что для многообразия Jord всех йордановых алгебр $r_b(\mathrm{Jord}) \geqslant 3$.

## § 2. Радикалы и нильпотентные элементы свободных альтернативных алгебр

В этом параграфе мы покажем, что, в отличие от свободных ассоциативных или свободных неассоциативных алгебр, свободные альтернативные алгебры над областью целостности могут содержать ненулевые делители нуля и нильпотентные элементы. Множество всех нильпотентных элементов свободной альтернативной алгебры образует в ней двусторонний идеал, совпадающий с радикалом Жевлакова. Мы приведем ряд характеризаций этого радикала и дадим некоторое описание фактор-алгебры по радикалу.

Ниже всюду Ф — произвольная область целостности с единицей 1; $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Напомним, что через $D(A)$ обозначается идеал алгебры $A$, порожденный всеми ее ассоциаторами.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— произвольное однородное подмногообразие многообразия* Alt *всех альтернативных* Ф-*алгебр*; $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ *— свободная в многообразии* $\mathfrak{M}$ *алгебра от множества порождающих* $X$. *Тогда* $\mathcal{Y}(\Phi_{\mathfrak{M}}[X])$ *является ниль-идеалом, т. е.* $\mathcal{Y}(\Phi_{\mathfrak{M}}[X]) = \mathcal{N}(\Phi_{\mathfrak{M}}[X])$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{Y}(\Phi_{\mathfrak{M}}[X])$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Положим $f' = f \cdot x_{n+1}$, тогда $f'$ однороден степени 1 по $x_{n+1}$ и $f' \in \mathcal{Y}(\Phi_{\mathfrak{M}}[X])$. Пусть $g$ — квазиобратный элемент для $f'$, $g = \sum_{i=0}^{m} g_i$, где $g_i$ однороден степени $i$ по $x_{n+1}$. Мы имеем

$$f' + \sum_{i=0}^{m} g_i = \sum_{i=0}^{m} f'g_i,$$

откуда, ввиду однородности многообразия $\mathfrak{M}$,

$$g_0 = 0, \quad f'g_m = 0$$

и, далее,

$$f' + g_1 = 0, \quad g_i = f'g_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, m.$$

Следовательно, $g_i = -(f')^i$, откуда $(f')^{m+1} = 0$. Полагая теперь $x_{n+1} = f$ в тождестве $(f')^{m+1} = 0$, мы получим $f^{2(m+1)} = 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* Ass $[X]$ — *свободная ассоциативная* $\Phi$-*алгебра. Тогда* $\mathcal{Y}$ (Ass $[X]$) $= (0)$.

Действительно, алгебра Ass $[X]$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов.

Следствие 2 (Жевлаков). *Радикал Жевлакова* $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) *свободной альтернативной* $\Phi$-*алгебры* Alt $[X]$ *локально нильпотентен, т. е.* $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $=$ $= \mathcal{L}$ (Alt $[X]$).

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $\not\subseteq \mathcal{L}$ (Alt $[X]$). Тогда образ $\overline{\mathcal{Y}}$ радикала $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) в фактор-алгебре $\bar{A} =$ Alt $[X]/\mathcal{L}$ (Alt $[X]$) отличен от нуля. По теоремам 8.8 и 9.11 алгебра $\bar{A}$ есть подпрямая сумма первичных ассоциативных алгебр без локально нильпотентных идеалов и колец Кэли — Диксона. Так как $\overline{\mathcal{Y}} \neq (0)$, то существует такое подпрямое слагаемое $A_\alpha$, при гомоморфизме алгебры $\bar{A}$ на которое образ идеала $\overline{\mathcal{Y}}$ отличен от нуля. В силу следствия 1 $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $\subseteq D$ (Alt $[X]$), поэтому $\overline{\mathcal{Y}} \subseteq D(\bar{A})$, и при любом гомоморфизме алгебры $\bar{A}$ на ассоциативную алгебру идеал $\overline{\mathcal{Y}}$ отображается в нуль. Остается рассмотреть случай, когда соответствующее слагаемое $A_\alpha$ является кольцом Кэли — Диксона. Ввиду леммы 3, $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) — ниль-идеал, поэтому $\overline{\mathcal{Y}}$ — ниль-идеал алгебры $\bar{A}$, и при

гомоморфизме алгебры $\bar{A}$ на $A_\alpha$ идеал $\overline{\mathcal{Y}}$ должен перейти в ниль-идеал алгебры $A_\alpha$. Но по следствию предложения 9.3 кольцо Кэли — Диксона $A_\alpha$ ниль-полупросто, поэтому при любом гомоморфизме алгебры $A$ на $A_\alpha$ идеал $\overline{\mathcal{Y}}$ отображается в нуль. Полученное противоречие доказывает, что $\overline{\mathcal{Y}} = (0)$, т. е. $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $= \mathcal{L}$ (Alt $[X]$). Следствие доказано.

Обозначим через $\boldsymbol{C}$ матричную алгебру Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}$ (Ф) над основным кольцом операторов Ф и через $T$ ($\boldsymbol{C}$) — подмножество алгебры Alt $[X]$, состоящее из таких тождеств алгебры $\boldsymbol{C}$, у которых все частичные линеаризации также являются тождествами в $\boldsymbol{C}$. Если Ф бесконечно, то по теореме 1.5 множество $T$ ($\boldsymbol{C}$) совпадает с идеалом всех тождеств алгебры $\boldsymbol{C}$. В общем случае $T$ ($\boldsymbol{C}$) равно идеалу тождеств матричной Ф-алгебры Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}$ ($\Phi_1$), где $\Phi_1$ — произвольная бесконечная ассоциативно-коммутативная Ф-алгебра без делителей нуля; например, $\Phi_1 = \Phi[t]$ — кольцо многочленов от переменной $t$. Таким образом, $T$ ($\boldsymbol{C}$) — вполне характеристический идеал алгебры Alt $[X]$. Заметим, что по теоремам 1.4 и 1.6 для любой ассоциативно-коммутативной Ф-алгебры $K$ алгебра $\boldsymbol{C}(K) = K \otimes_\Phi \boldsymbol{C}$ удовлетворяет всем тождествам из $T$ ($\boldsymbol{C}$).

Т е о р е м а 4 (Ш е с т а к о в, С л е й т е р). $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $= T(\boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{D}$ (Alt $[X]$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{Y}$ (Alt $[X]$). По следствию 1 леммы 3 $\mathcal{Y}$ (Ass $[X]$)$=(0)$, поэтому $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $\subseteq \boldsymbol{D}$ (Alt $[X]$). Для доказательства того, что $f \in T(\boldsymbol{C})$, нам достаточно показать, что тождество $f$ справедливо в алгебре $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}(\Phi[t])$. Пусть $f \not\equiv 0$ в $\boldsymbol{C}_1$, т. е. существуют такие элементы $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}_1$, что $f(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq 0$. Ввиду конечной порожденности Ф-алгебры $\boldsymbol{C}_1$, существует гомоморфизм $\varphi$ алгебры Alt $[X]$ на $\boldsymbol{C}_1$ такой, что $\varphi(x_i) = c_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как по следствию 2 леммы 3 $\mathcal{Y}$ (Alt $[X]$) $= \mathcal{L}$ (Alt $[X]$), то мы имеем

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{C}_1) \supseteq \varphi(\mathcal{L}(\text{Alt}[X])) =$$
$$= \varphi(\mathcal{Y}(\text{Alt}[X])) \ni \varphi(f) = f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0,$$

т. е. $\mathcal{L}(\boldsymbol{C}_1) \neq (0)$. Но алгебра $\boldsymbol{C}_1$ является, как легко видеть, кольцом Кэли — Диксона, а по следствию предложения 9.3 всякое кольцо Кэли — Диксона ниль-полу-

просто. В частности, $\mathscr{L}(C_1) = (0)$. Полученное противоречие доказывает, что $f \equiv 0$ в $C_1$, т. е. $f \in T(C)$ и $\mathscr{Y}(\text{Alt}[X]) \subseteq T(C) \cap D(\text{Alt}[X])$.

Пусть теперь $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(C) \cap D(\text{Alt}[X])$. Если $f \notin \mathscr{Y}(\text{Alt}[X])$, то существует гомоморфизм $\varphi$ алгебры $\text{Alt}[X]$ на некоторую примитивную алгебру $A$, при котором

$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \neq 0.$$

Так как $D(A) \supseteq \varphi(D(\text{Alt}[X])) \ni \varphi(f) \neq 0$, то алгебра $A$ неассоциативна. Следовательно, по теореме 10.1 $A$ является алгеброй Кэли — Диксона над некоторым полем $F$. Напомним, что $A$ является также алгеброй над $\Phi$, поэтому и центр $F$ алгебры $A$ является алгеброй над $\Phi$. Если $F_1$ — некоторое расширение поля $F$, то поле $F_1$ и $F_1$-алгебру $A_1 = F_1 \otimes_F A$ также можно очевидным образом рассматривать как алгебры над $\Phi$. Расширяя теперь, если необходимо, поле $F$ до его алгебраического замыкания, по следствию теоремы 2.6 и теореме 2.7 мы получим матричную алгебру Кэли — Диксона $C(F_1)$ над полем $F_1$, в которой $f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ для некоторых элементов $c_1, \ldots, c_n$. Пусть $c_i = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{ij} e_j$, где $\alpha_{ij} \in F_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, 8$; $e_1, \ldots, e_8$ — матричные единицы Кэли — Диксона. Рассмотрим кольцо многочленов $\Phi[t_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, 8$, и матричную алгебру Кэли — Диксона $C(\Phi[t_{ij}])$. Существует гомоморфизм $\Phi$-алгебр $\psi\colon \Phi[t_{ij}] \to F_1$, при котором $\psi(t_{ij}) = \alpha_{ij}$. Пусть $e'_1, \ldots, e'_8$ — матричные единицы Кэли — Диксона алгебры $C(\Phi[t_{ij}])$. Полагая

$$\bar{\psi}\Big(\sum_{i=1}^{8} \lambda_i e'_i\Big) = \sum_{i=1}^{8} \psi(\lambda_i) e_i,$$

мы получаем продолжение гомоморфизма $\psi$ до гомоморфизма $\Phi$-алгебр $\bar{\psi}\colon C(\Phi[t_{ij}]) \to C(F_1)$. Пусть $y_i = \sum_{j=1}^{8} t_{ij} e'_j$, тогда $\bar{\psi}(y_i) = c_i$ и $\bar{\psi}(f(y_1, \ldots, y_n)) = f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$. Отсюда следует, что и $f(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Напомним теперь, что, как было замечено ранее, алгебра $C(\Phi[t_{ij}]) = \Phi[t_{ij}] \otimes_\Phi C$ удовлетворяет

всем тождествам из $T(C)$. В частности, алгебра $C(\Phi[t_{ij}])$ удовлетворяет тождеству $f$. Полученное противоречие доказывает, что $f \in \mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$, т. е. $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X]) \supseteq$ $\supseteq T(C) \cap D(\mathrm{Alt}[X])$.

Теорема доказана.

Теорема 4 дает нам следующий критерий для определения принадлежности элемента $f$ алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ радикалу $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$.

Следствие 1. *Элемент $f$ алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ тогда и только тогда принадлежит радикалу $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$, когда $f$ вместе со всеми своими частичными линеаризациями обращается в нуль в свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{Ass}[X]$ и в алгебре Кэли — Диксона $C$.*

Следствие 2. *Пусть $f \in \mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$. Тогда все частичные линеаризации элемента $f$ также принадлежат $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$.*

В частности, $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$ является однородным идеалом алгебры $\mathrm{Alt}[X]$, т. е. если $f \in \mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$, то и всякая однородная компонента элемента $f$ принадлежит $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$.

Сформулированный в следствии 1 критерий позволяет нам установить, что при некоторых ограничениях на кольцо $\Phi$ радикал $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$ отличен от нуля.

Следствие 3. *Пусть в аддитивной группе кольца операторов $\Phi$ нет элементов порядка, меньшего 8. Тогда $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X]) \neq (0)$.*

Доказательство. Пусть $f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1})$ — кососимметрическая функция, определенная в § 1. Ясно, что $f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in D(\mathrm{Alt}[X])$ при всех $n$. С другой стороны, так как алгебра Кэли — Диксона $C$ является 8-мерным модулем над $\Phi$, то всякая кососимметрическая полилинейная функция от $n \geqslant 9$ аргументов равна нулю на $C$. В частности, $f_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in T(C)$ при $n \geqslant 4$. По следствию леммы 2 мы теперь получаем, что $0 \neq$ $\neq f_4(x_1, \ldots, x_9) \in T(C) \cap D(\mathrm{Alt}[X]) = \mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$, т. е. $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X]) \neq (0)$. Следствие доказано.

В частности, в свободном альтернативном кольце от девяти и более порождающих есть ненулевые нильпотентные элементы.

Замечание. На самом деле $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X]) \neq (0)$ при любом кольце операторов $\Phi$. Например, ввиду следствия леммы 2.8, легко видеть, что элементы $k = ([x, y]^2, r, s)$ и $k_1 = ([x, y] \circ [z, t], r, s)$ принадлежат $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}[X])$.

В то же время для любого кольца Ф существуют альтернативные Ф-алгебры, в которых $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$; соответствующий пример для элемента $k_1$ построил в 1963 г. Дорофеев, а для элемента $k$ — в 1967 г. Хумм и Клейнфелд. Следовательно, элементы $k$ и $k_1$ отличны от нуля в Alt $[X]$. Так как элемент $k$ зависит лишь от четырех переменных, то ненулевые нильпотентные элементы содержатся уже в свободных альтернативных кольцах от четырех (и более) порождающих. Отметим также, что, как показал Шестаков, элемент $k$ является абсолютным делителем нуля в Alt $[X]$.

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{K}[X] = \mathrm{Alt}[X]/T(\boldsymbol{C})$. *Тогда алгебра* $\mathrm{K}[X]$ *не содержит делителей нуля.*

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{Alt}[X]$ и $f_1 \cdot f_2 \in T(\boldsymbol{C})$. Нам нужно показать, что тогда либо $f_1 \in T(\boldsymbol{C})$, либо $f_2 \in T(\boldsymbol{C})$. Пусть Ф′ — поле частных кольца Ф. По теореме 2.8 существуют бесконечное расширение $F$ поля Ф′ и алгебра Кэли — Диксона $A$ над $F$, являющаяся телом. Пусть $F_1$ — алгебраическое замыкание поля $F$; тогда алгебра $A_1 = F_1 \otimes_F A$ является матричной алгеброй Кэли — Диксона над $F_1$, откуда $A_1 = \boldsymbol{C}(F_1) = F_1 \otimes_\Phi \boldsymbol{C}$. Всякий элемент из $T(\boldsymbol{C})$ является тождеством алгебры $A_1$, а следовательно, и алгебры $A$. В частности, в алгебре $A$ справедливо тождество $f_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$. А так как в $A$ нет делителей нуля, то для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$ либо $f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0$, либо $f_2(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Пусть теперь $I_1$ и $I_2$ — идеалы алгебры Alt $[X]$, порожденные соответственно элементами $f_1$ и $f_2$. Тогда в алгебре $A$ справедливы все тождества вида $f \cdot g = 0$, где $f \in I_1$, $g \in I_2$, причем в силу бесконечности поля $F$ все эти тождества остаются справедливыми в алгебре $F' \otimes_F A$ для любого расширения $F'$ поля $F$. Пусть $F' = F[t_{ij}]$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, 8$; тогда рассмотрим в алгебре $A' = F' \otimes_F A$ элементы

$$y_i = \sum_{j=1}^{8} t_{ij}(1 \otimes e_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_8$ — некоторый базис алгебры $A$ над $F$. Пусть $\overline{I}_1$ и $\overline{I}_2$ — идеалы алгебры $A'$, порожденные соответственно элементами $f_1(y_1, \ldots, y_n)$ и $f_2(y_1, \ldots, y_n)$.

Тогда по доказанному выше мы имеем $\overline{I}_1 \cdot \overline{I}_2 = (0)$. Но алгебра $A'$ является кольцом Кэли — Диксона, поэтому $A'$ первична и либо $\overline{I}_1 = (0)$, либо $\overline{I}_2 = (0)$. Следовательно, либо $f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0$, либо $f_2(y_1, \ldots, y_n) = 0$. Допустим, что $f_1(y_1, \ldots, y_n) = 0$, и пусть $a_i = \sum_{j=1}^{8} \alpha_{ij} e_j$, $i = 1, \ldots, n$,— произвольные элементы алгебры $A$. Рассмотрев специализацию $t_{ij} \to \alpha_{ij}$, как и при доказательстве теоремы 4, мы получим гомоморфизм $\varphi$: $A' \to A$, для которого $\varphi(y_i) = a_i$. Но тогда $f_1(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(f_1(y_1, \ldots, y_n)) = 0$, откуда в силу произвольности элементов $a_i$ следует, что алгебра $A$ удовлетворяет тождеству $f_1$. Ввиду бесконечности поля $F$, тождеству $f_1$ удовлетворяет и алгебра $A_1 = \boldsymbol{C}(F_1)$, где $F_1$ — алгебраическое замыкание поля $F$. Более того, так как $F_1$ бесконечно, то все частичные линеаризации элемента $f_1$ также обращаются в нуль в алгебре $A_1$. Так как $\boldsymbol{C} \subseteq A_1$, отсюда следует, что $f_1 \in T(\boldsymbol{C})$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\mathrm{K}[X_n] = \mathrm{Alt}[X_n]/(\mathrm{Alt}[X_n] \cap T(\boldsymbol{C}))$. *Тогда алгебра* $\mathrm{K}[X_n]$ *не содержит делителей нуля.*

Алгебру $S$ с множеством порождающих $Y$ мы будем называть *свободным кольцом Кэли — Диксона*, если $S$ является кольцом Кэли — Диксона, и для всякой алгебры $A$, являющейся кольцом Кэли — Диксона, любое отображение множества $Y$ в $A$ можно продолжить единственным образом до гомоморфизма алгебры $S$ в $A$.

Следствие 2. *Пусть* $\mathrm{card}(Y) \geqslant 3$. *Тогда алгебра* $\mathrm{K}[Y]$ *является свободным кольцом Кэли — Диксона от множества порождающих* $Y$.

Доказательство. Так как алгебра $\mathrm{K}[Y]$ не имеет делителей нуля и неассоциативна, то по теореме 9.9 $\mathrm{K}[Y]$ является кольцом Кэли — Диксона. Кроме того, как легко видеть, $\mathrm{K}[Y]$ является свободной алгеброй от множества порождающих $Y$ в многообразии Ф-алгебр $\mathrm{Var}(\boldsymbol{C})$, порожденном матричной алгеброй Кэли — Диксона $\boldsymbol{C}$. Для завершения доказательства достаточно теперь показать, что всякая алгебра $A$, являющаяся кольцом Кэли — Диксона, удовлетворяет всем тождествам из $T(\boldsymbol{C})$. Пусть $Z$—центр алгебры $A$ и $Z_1$—поле частных кольца $Z$; тогда $Z$ и $Z_1$ являются алгебрами над Ф, и алгебра

Кэли — Диксона $A_1 = (Z^*)^{-1} A$ над полем $Z_1$ является также и алгеброй над Ф. Рассуждая далее, как во второй половине доказательства теоремы 4, мы получим, что Ф-алгебра $A_1$ удовлетворяет всем тождествам из $T(C)$. Так как $A \subseteq A_1$, то тем самым все доказано.

Лемма 5. *Алгебра* К $[X]$ *не содержит ненулевых квазирегулярных элементов.*

Доказательство. Так как $T(C)$ — однородный идеал алгебры Alt $[X]$, то в алгебре К $[X]$ имеют смысл понятия степени многочлена, однородного многочлена, и т. д. Пусть $f$ — квазирегулярный элемент алгебры К $[X]$ и $g$ — квазиобратный элемент для $f$; тогда

$$f + g = fg. \tag{7}$$

Если $f \neq 0$, то и $g \neq 0$, и мы имеем

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k, \quad g = \sum_{k=1}^{m} g_k; \quad f_n \neq 0, \quad g_m \neq 0,$$

где через $f_k$ и $g_k$ обозначены суммы всех одночленов степени $k$, входящих соответственно в многочлены $f$ и $g$. Сравнивая члены одинаковых степеней в равенстве (7), получаем $f_n g_m = 0$, откуда в силу отсутствия делителей нуля в алгебре К $[X]$ либо $f_n = 0$, либо $g_m = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f = 0$. Лемма доказана.

Следствие. $\mathcal{J}$ (К $[X]$) $= (0)$.

Докажем теперь следующий результат.

Теорема 5 (Шестаков, Слейтер). *Радикал Жевлакова* $\mathcal{J}$ (Alt $[X]$) *свободной альтернативной алгебры* Alt $[X]$ *совпадает с совокупностью всех нильпотентных элементов алгебры* Alt $[X]$. *Фактор-алгебра* $\overline{\text{Alt}}\,[X] = \text{Alt}\,[X]/\mathcal{J}\,(\text{Alt}\,[X])$ *изоморфна подпрямой сумме свободной ассоциативной алгебры* Ass $[X]$ *и свободного кольца Кэли — Диксона* К $[X]$.

Доказательство. Докажем вначале вторую половину теоремы. В силу теоремы 4 алгебра $\overline{\text{Alt}}\,[X]$ изоморфна подпрямой сумме алгебр Alt $[X]/D($Alt $[X])$ и К $[X]$ = Alt $[X]/T\,(C)$. Ясно, что Alt $[X]/D($Alt $[X]) \cong$ $\cong$ Ass $[X]$. С другой стороны, по следствию 2 леммы 4 К $[X]$ — свободное кольцо Кэли — Диксона.

Так как по лемме 3 $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X])$ — ниль-идеал, для завершения доказательства достаточно показать, что в алгебре $\overline{\mathrm{Alt}}\,[X]$ нет нильпотентных элементов. Но это следует из уже доказанной второй половины теоремы, так как в алгебрах Ass $[X]$ и К $[X]$ нильпотентных элементов нет.

Теорема доказана.

Следствие. $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n] = \mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X]) \cap \mathrm{Alt}\,[X_n] = T\,(C) \cap D\,(\mathrm{Alt}\,[X_n])$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X]) \cap \mathrm{Alt}\,[X_n]$)— ниль-идеал алгебры $\mathrm{Alt}\,[X_n]$; поэтому $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X]) \cap \mathrm{Alt}\,[X_n] \subseteq \mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n])$. Для доказательства включения $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n]) \subseteq \mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X])$ достаточно показать, что фактор-алгебра $\overline{\mathrm{Alt}}\,[X] = \mathrm{Alt}\,[X]/\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X])$ не содержит ненулевых квазирегулярных элементов. По теореме 5 алгебра $\overline{\mathrm{Alt}}\,[X]$ изоморфна подпрямой сумме алгебр Ass $[X]$ и К $[X]$, каждая из которых не содержит ненулевых квазирегулярных элементов (доказательство леммы 5 дословно подходит и для алгебры Ass $[X]$). Следовательно, этому же свойству удовлетворяет и алгебра $\overline{\mathrm{Alt}}\,[X]$, и мы имеем $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n]) \subseteq \mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X])$, что доказывает первое из требуемых равенств. Второе равенство следует из теоремы 5 и равенства $D\,(\mathrm{Alt}\,[X_n]) = D\,(\mathrm{Alt}\,[X]) \cap \mathrm{Alt}\,[X_n]$. Следствие доказано.

Из доказанного следствия и следствий 1 и 2 леммы 4 вытекает, что результаты, аналогичные теоремам 4 и 5, справедливы и для конечнопорожденной свободной альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}\,[X_n]$ (при $n \leqslant 2$ они тривиальны). В частности, замечание, приведенное после следствия 3 теоремы 4, показывает, что $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n]) \neq (0)$ при $n \geqslant 4$. С другой стороны, по теореме Артина $\mathrm{Alt}\,[X_n] \cong \mathrm{Ass}\,[X_n]$ при $n \leqslant 2$, поэтому $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n]) = (0)$ при $n \leqslant 2$. Остается открытым вопрос о справедливости равенства $\mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_3]) = (0)$. По доказанному выше этот вопрос эквивалентен вопросу о наличии в алгебре $\mathrm{Alt}\,[X_3]$ ненулевых нильпотентных элементов. Заметим, что из упражнения 6 к § 7.1 следует, что алгебра $\mathrm{Alt}\,[X_3]$ содержит ненулевые делители нуля. Более того, как мы увидим в следующем параграфе, алгебра $\mathrm{Alt}\,[X_3]$ не является первичной.

В заключение этого параграфа мы получим еще одну характеризацию радикала Жевлакова $\mathcal{Y}$ (Alt $[X_n]$) свободной конечнопорожденной альтернативной алгебры Alt $[X_n]$.

Нам понадобится следующая

Лемма 6. *Всякий элемент из алгебры правых умножений* $R$ (Alt $[X]$) *алгебры* Alt $[X]$ *есть линейная комбинация элементов вида*

$$R_{u_1}R_{u_2}\ldots R_{u_n}R_x, \tag{8}$$

*где $x$ — произвольный элемент алгебры* Alt $[X]$, $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_n$ *— попарно различные правильные $r_1$-слова от множества $X$; при этом операторы $R_{u_1}, R_{u_2}, \ldots, R_{u_n}$ могут и отсутствовать.*

Доказательство. Пусть $I_n$ — подмодуль Ф-модуля $R$ (Alt $[X]$), порожденный множеством элементов вида $R_{a_1}R_{a_2}\ldots R_{a_n}$, где $a_i \in$ Alt $[X]$; тогда $R$ (Alt $[X]$) $= \sum_{n=1}^{\infty} I_n$. Обозначим через $J_n$ подмодуль Ф-модуля $I_n$, порожденный всеми элементами вида (8), лежащими в $I_n$. Нам нужно доказать, что $R$ (Alt $[X]$) $= \sum_{n=1}^{\infty} J_n$. Так как $I_1 = J_1$, для этого достаточно установить, что для любого $n > 0$

$$I_{n+1} \subseteq J_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} I_k. \tag{9}$$

Рассмотрим фактор-модуль $R_{n+1} = R$ (Alt $[X]$)$/ \sum_{k=1}^{n} I_k$ и канонический гомоморфизм $\pi$: $R$ (Alt $[X]$) $\to R_{n+1}$. Для любых элементов $a_1, \ldots, a_n \in$ Alt $[X]$ мы положим

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \{\pi(R_{a_1}\ldots R_{a_n}R_x) \mid x \in \text{Alt}[X]\}.$$

Легко видеть, что $f(a_1, \ldots, a_n)$ — подмодуль Ф-модуля $\pi(I_{n+1})$; при этом

$$\pi(I_{n+1}) = \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \text{Alt}[X]} f(a_1, \ldots, a_n).$$

Следовательно, для доказательства включения (9) нам достаточно установить, что $f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \pi(J_{n+1})$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in$ Alt $[X]$. Покажем, что отображе-

ние $f$ удовлетворяет условиям а) — д) предложения 1. Ввиду тождества правой альтернативности, мы имеем

$$R_x^2 = R_{x^2},$$
$$R_x \circ R_y = R_{x \bullet y},$$

откуда следует, что $f$ удовлетворяет условиям а) и б). Условия в) и г) очевидны. Наконец, из соотношения (7.18) мы получаем

$$R_{yxy}R_t \equiv R_x R_{yty} + R_y R_{\{xyt\}} \qquad (\mathrm{mod}\ I_1),$$

откуда следует, что $f$ удовлетворяет и условию д). По предложению 1 мы теперь получаем, что $f(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \subseteq \pi(J_{n+1})$. Лемма доказана.

Следствие. *Всякий элемент из алгебры* $R(\mathrm{Alt}\,[X_m])$ *есть линейная комбинация элементов вида* (8), *где* $n < 2^m$.

Действительно, в этом случае по следствию предложения 1 $\pi(I_n) = (0)$ при $n > 2^m$, поэтому $R(\mathrm{Alt}\,[X_m]) = \sum_{k=1}^{2^m} J_k$.

Теорема 6 (Шестаков). *Всякий элемент* $f \in \in \mathscr{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_m])$ *порождает в алгебре* $\mathrm{Alt}\,[X_m]$ *правый ниль-идеал ограниченного индекса.*

Доказательство. Обозначим правый идеал, порожденный элементом $f$, через $J$. Тогда $J = \Phi f + J_1$, где $J_1 = \{fW \mid W \in R(\mathrm{Alt}\,[X_m])\}$. Так как $J^2 \subseteq J_1$, то нам достаточно показать, что правый идеал $J_1$ является ниль-идеалом ограниченного индекса. Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — некоторый упорядоченный набор различных правильных $r_1$-слов из $\mathrm{Alt}\,[X_m]$. Сопоставим каждому такому набору порождающий $x_j$, отличный от $x_1, \ldots, x_m$, так, чтобы разным наборам соответствовали разные порождающие, и положим

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_k) = fR_{u_1}R_{u_2}\ldots R_{u_k}R_{x_j},$$
$$F = \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_i F(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots, u_k^{(i)}),$$

где $u_1^{(i)}, \ldots, u_k^{(i)}$ — произвольные попарно различные правильные $r_1$-слова от элементов $x_1, \ldots, x_m$. В силу следствия леммы 6 всякий элемент идеала $J_1$ является

образом элемента $F$ при подходящем эндоморфизме алгебры Alt $[X]$. Так как по следствию теоремы 5 $\mathcal{J}(\text{Alt}\,[X_m]) \subseteq \mathcal{J}(\text{Alt}\,[X])$, то $f \in \mathcal{J}(\text{Alt}\,[X])$, откуда следует, что и $F \in \mathcal{J}(\text{Alt}\,[X])$, поэтому элемент $F$ нильпотентен. Пусть $F^n = 0$, тогда $J_1$ является ниль-алгеброй индекса $n$, а $J$ — ниль-алгеброй индекса $2n$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Радикал Жевлакова* $\mathcal{J}(\text{Alt}\,[X_m])$ *алгебры* Alt $[X_m]$ *равен сумме всех правых ниль-идеалов ограниченного индекса алгебры* Alt $[X_m]$.

В случае, когда $\Phi$ — поле характеристики 0, справедливо более сильное утверждение.

Следствие 2. *Радикал Жевлакова свободной конечнопорожденной альтернативной алгебры над полем характеристики* 0 *равен сумме всех разрешимых правых идеалов этой алгебры.*

Действительно, по теореме Жевлакова (теорема 6.2) всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса над полем характеристики 0 разрешима.

Перейдем теперь к двусторонним идеалам.

Ниже всюду $A$ — альтернативная алгебра, $I$ — правый идеал алгебры $A$ и $\hat{I} = A^{\#}I$ — двусторонний идеал алгебры $A$, порожденный множеством $I$. Как и в главе 12, для подалгебр $B$, $C$ алгебры $A$ мы положим $(B, C)_1 = BC$, $(B, C)_{k+1} = (B, C)_k \cdot C$. Если $B + I = C + I$, то мы будем писать $B \equiv C$; аналогично, если $a, b \in A$ и $a - b \in I$, то будем писать $a \equiv b$. Заметим, что если $a \equiv b$, то $ax \equiv bx$ для любого $x \in A$.

Лемма 7. *Пусть* $v(x_1, \ldots, x_n)$ — *произвольный полилинейный одночлен степени* $n$ *и* $v(I)$ — *подмодуль* $\Phi$-*модуля* $A$, *порожденный значениями* $v(y_1, \ldots, y_n)$, *где* $y_1, \ldots, y_n \in I$. *Тогда для любой подалгебры* $C$ *алгебры* $A$

$$C \cdot v(I) \equiv (C, I)_n.$$

Доказательство. Проведем индукцию по степени $n$ одночлена $v$. Очевидно основание индукции: $n = 1$. Пусть теперь $n > 1$, тогда $v = v_1 v_2$, где $d(v_1) = n_1$, $d(v_2) = n_2$, $n_i < n$, и мы имеем по предположению индукции

$$C \cdot v(I) = C \cdot (v_1(I) \cdot v_2(I)) \subseteq$$
$$\subseteq (Cv_1(I))\, v_2(I) + (C, v_1(I), v_2(I)) \equiv$$
$$\equiv ((C, I)_{n_1}, I)_{n_2} + (v_1(I), C, v_2(I)) \equiv (C, I)_n.$$

Те же рассуждения, проведенные в обратном порядке, показывают, что $(C, I)_n \subseteq C \cdot v(I) + I$. Лемма доказана.

Следствие. $A \cdot I^{2^n} \equiv A \cdot I^{(n)}$.

Лемма 8. $\hat{I}^{\langle n \rangle} \subseteq AI^n + I$.

Доказательство. Проведем вновь индукцию по $n$. Очевидно основание индукции: $n = 1$. Пусть уже доказано, что

$$\hat{I}^{\langle n-1 \rangle} \subseteq AI^{n-1} + I.$$

Тогда мы имеем

$$\hat{I}^{\langle n \rangle} = \hat{I}^{\langle n-1 \rangle} \hat{I} \subseteq (AI^{n-1} + I)(A^{\#}I) \subseteq I + (AI^{n-1})(A^{\#}I).$$

Рассмотрим

$$(AI^{n-1})(A^{\#}I) \subseteq (AI^{n-1} \cdot A^{\#}) I + (AI^{n-1}, A^{\#}, I) \subseteq$$
$$\subseteq (AI^{n-1} \cdot A^{\#}) I + (I, AI^{n-1}, A^{\#}) \equiv (AI^{n-1} \cdot A^{\#}) I.$$

По лемме 7 получаем

$$AI^{n-1} \equiv (A, I)_{n-1} = (A, I)_{n-2} \cdot I \equiv (AI^{n-2}) I,$$

откуда

$$AI^{n-1} \cdot A^{\#} \equiv (AI^{n-2} \cdot I) A^{\#} \subseteq AI^{n-2} \cdot IA^{\#} +$$
$$+ (AI^{n-2}, I, A^{\#}) \subseteq AI^{n-2} \cdot I + (I, A^{\#}, AI^{n-2}) \equiv AI^{n-1}.$$

Следовательно,

$$(AI^{n-1})(A^{\#}I) \subseteq (AI^{n-1} \cdot A^{\#}) I + I \subseteq AI^{n-1} \cdot I + I \subseteq AI^n + I.$$

Лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть $I$ — правый идеал альтернативной алгебры $A$, разрешимый индекса $n$. Тогда двусторонний идеал $\hat{I}$ является разрешимым индекса $\leqslant 3n$.*

Доказательство. По лемме 8 и следствию леммы 7 получаем

$$\hat{I}^{\langle 2^n \rangle} \subseteq AI^{2^n} + I \subseteq AI^{(n)} + I = I.$$

Теперь по следствию теоремы 5.5 имеем

$$\hat{I}^{(2^n)^2} = \hat{I}^{2^{2n}} \subseteq I,$$

откуда

$$\hat{I}^{(2n)} \subseteq \hat{I}^{2^{2n}} \subseteq I$$

и далее

$$\hat{I}^{(3n)} = (\hat{I}^{(2n)})^{(n)} \subseteq I^{(n)} = (0).$$

Предложение доказано.

Из следствия 2 теоремы 6, предложения 2 и следствия теоремы 3 вытекает

Теорема 7 (Шестаков). *Радикал Жевлакова свободной конечнопорожденной альтернативной алгебры над полем характеристики* 0 *равен сумме всех двусторонних нильпотентных идеалов этой алгебры.*

Следствие. *В свободной конечнопорожденной альтернативной алгебре над полем характеристики* 0 *всякий нильпотентный элемент порождает нильпотентный идеал.*

В заключение этого параграфа сформулируем еще несколько открытых вопросов.

1. Найти базис тождеств матричной алгебры Кэли — Диксона $C$.

2. Описать $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}\,[X])$ как вполне характеристический идеал.

3. Является ли идеал $\mathcal{Y}(\mathrm{Alt}\,[X_n])$ нильпотентным?

## § 3. Центры альтернативных алгебр

Одним из важных направлений в изучении свободных альтернативных алгебр является изучение центров этих алгебр. Нам уже известен ряд ненулевых элементов из ассоциативного центра $N_{\mathrm{Alt}}$ свободной альтернативной алгебры $\mathrm{Alt}\,[X]$ (см. § 7.2). В этом параграфе мы докажем, что и центр $Z_{\mathrm{Alt}}$ алгебры $\mathrm{Alt}\,[X]$ отличен от нуля. Мы продолжим также исследование вопроса о совпадении в альтернативной алгебре $A$ центров $N(A)$ и $Z(A)$, проведенное ранее для простых и первичных алгебр, и докажем, что если $1/2 \in \Phi$, то $N(A) = Z(A)$ во всякой чисто альтернативной алгебре $A$. Наконец, мы докажем, что различные центры свободной алгебры произвольного однородного многообразия являются вполне характеристическими подмножествами (т. е. выдерживают все эндоморфизмы этой алгебры).

Ниже всюду $\Phi$ — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей 1, $A$ — альтернативная $\Phi$-алгебра, $N = N(A)$, $Z = Z(A)$, $D = D(A)$, $U = U(A)$. Напомним, что через $ZN(A)$ обозначается идеал алгебры $A$, порожденный множеством $[N, A]$. По лемме 7.4 $ZN(A) = [N, A]A^{\#} = A^{\#}[N, A]$.

Лемма 9. *Пусть $n \in N$, $a, b, c, d \in A$. Тогда элемент $[n, a](b, c, d)$ является кососимметрической функцией элементов $a, b, c, d$.*

Доказательство. Ввиду кососимметричности ассоциатора, нам достаточно доказать, что для любых $a, b, c \in A$

$$[n, a](a, b, c) = 0.$$

Согласно следствиям 1 и 2 леммы 7.3 и соотношению (7.4) мы имеем

$$[n, a](a, b, c) = (a, [n, a]b, c) = \\ = (a, [n, ab], c) - (a, a[n, b], c) = \\ = -(a, [n, b], c)a = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 10 (Дорофеев, Шелипов). *Пусть $n \in N$, $a, b, c, r, s, t, u \in A$. Тогда в $A$ верно равенство*

$$2(a, b, c)(r, s, t)[n, u] = 0.$$

Доказательство. Положим $d = (a, b, c)$, $d_1 = (r, s, t)$. Заметим вначале, что в $A$ верны равенства

$$d[n, u] = [n, du] = [n, u]d. \tag{10}$$

Действительно, ввиду (7.4) и (7.10), мы имеем

$$d[n, u] = [n, du] - [n, d]u = [n, du].$$

С другой стороны, так как $[n, u] \in N$, то по (7.10)

$$d[n, u] = [n, u]d.$$

Теперь согласно (10) получаем

$$d_1 d[n, u] = d_1[n, du] = [n, du]d_1 = \\ = d[n, u]d_1 = dd_1[n, u].$$

По лемме 9 произведение $x = (a, b, c)(r, s, t)[n, u]$ кососимметрично по переменным $r, s, t, u$. По

доказанному $x = (r, s, t)(a, b, c)[n, u]$, поэтому указанное произведение $x$ кососимметрично и по переменным $a, b, c, u$. В результате получаем, что $x$ кососимметрично по всем переменным $a, b, c, r, s, t, u$. В частности, мы имеем

$$(r, s, t)(a, b, c)[n, u] = -(a, s, t)(r, b, c)[n, u] = \\ = (a, b, t)(r, s, c)[n, u] = \\ = -(a, b, c)(r, s, t)[n, u].$$

Сравнивая это соотношение с доказанным выше, мы получаем утверждение леммы.

Теорема 8 (Дорофеев). *Во всякой альтернативной алгебре $A$ имеет место включение $2D\cdot ZN(A) \subseteq U$.*

Доказательство. По предложению 5.1 множество $2D\cdot ZN(A)$ является идеалом алгебры $A$, поэтому нам достаточно доказать, что $2D\cdot ZN(A) \subseteq N$. Произвольный элемент идеала $2D\cdot ZN(A)$ является линейной комбинацией элементов вида $2(x, y, z)u\cdot v[t, n]$, где $n \in N$, $u, v \in A^{\#}$, $x, y, z, t \in A$. Так как $[t, n] \in N$, то мы имеем

$$2(x, y, z)u\cdot v[t, n] = 2[(x, y, z)u]v\cdot[t, n] = \\ = 2((x, y, z), u, v)[t, n] + 2(x, y, z)(uv)\cdot[t, n].$$

Первое из получившихся слагаемых равно нулю по лемме 7.5, а для второго имеем в силу лемм 9, 10 и ввиду (10)

$$2((x, y, z)w\cdot[t, n], r, s) = 2((x, y, z)w, r, s)[t, n] = \\ = -2(t, r, s)[(x, y, z)w, n] = \\ = -2(t, r, s)(x, y, z)[w, n] = 0.$$

Следовательно, $2D\cdot ZN(A) \subseteq N$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $A$ — разделенная альтернативная алгебра, то $2ZN(A) \subseteq N(A)$.*

Доказательство. Напомним, что алгебра $A$ называется разделенной, если $D(A) \cap U(A) = (0)$. В условиях следствия из теоремы 8 вытекает, что $2D\cdot ZN(A) \subseteq D \cap U = (0)$. В частности, для любых $a, b, c, d \in A$, $n \in N$ мы имеем

$$2(a, b, [n, c]d) = 2(a, b, d)[n, c] = 0,$$

откуда следует, что $2ZN(A) \subseteq N$. Следствие доказано.

Следствие 2 (Дорофеев, Шелипов). *Если $A$ — чисто альтернативная алгебра, то $2N \subseteq Z$. В частности, если $1/2 \in \Phi$, то в условиях следствия $N = Z$.*

Действительно, чисто альтернативная алгебра является разделенной, поэтому $2ZN(A) \subseteq N$. Тогда $2ZN(A)$ — ядерный идеал алгебры $A$, т. е. $2ZN(A) \subseteq U(A) = (0)$. Но это равносильно включению $2N \subseteq Z$.

Теорема 9 (Дорофеев). *Во всякой альтернативной алгебре $A$ справедливо включение $2(N \cap D^2)^2 \subseteq Z$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in N \cap D^2$, $c \in A$. Тогда согласно (7.4)

$$2[ab, c] = 2a[b, c] + 2[a, c]b \in \in 2D^2 \cdot ZN(A) + 2ZN(A) \cdot D^2, \quad (11)$$

и мы докажем, что $2D^2 \cdot ZN(A) = 2ZN(A) \cdot D^2 = (0)$. В самом деле, для любых $x, y, z, t \in A$, $s, u \in A^{\#}$, $n \in N$, $d \in D$ получаем согласно следствиям леммы 7.3 и теореме 8

$$2(s[t, n])((x, y, z)u \cdot d) = 2s[([t, n](x, y, z))u \cdot d] = = 2s((x, y, z)[t, n]u \cdot d) \in \in A^{\#}[(2D \cdot ZN(A))D] \subseteq U \cdot D = (0),$$

откуда следует, что $2ZN(A) \cdot D^2 = (0)$. Далее, для любых $c, d \in D$ имеем

$$2(cd) \cdot [t, n]s = 2(cd \cdot [t, n])s = = 2(c \cdot d[t, n])s \in [D \cdot (2D \cdot ZN(A))]A^{\#} \subseteq D \cdot U = (0),$$

откуда $2D^2 \cdot ZN(A) = (0)$. Теперь из (11) получаем $2[ab, c] = 0$, т. е. $2(N \cap D^2)^2 \subseteq Z$, что и требовалось доказать.

Следствие 1 (Дорофеев, Шелипов). *Для любых $x, y, z, t \in A$ элемент $[(x, y, z), t]^8$ принадлежит $Z$.*

Доказательство. Напомним, что по тождествам Клейнфелда $[x, y]^4 \in N$ для любых $x, y \in A$. Следовательно, $[(x, y, z), t]^8 \in (N \cap D^2)^2$. Если $\Phi$ содержит $1/2$, то утверждение следствия теперь непосредственно вытекает из теоремы 9. Докажем, что это утверждение верно

и в общем случае. Пусть $d = (x, y, z)$, тогда для любых $t, r \in A$ мы имеем

$$[[d, t]^8, r] = [d, t]^4 \circ [[d, t]^4, r] = \\ = 2[d, t]^4 [[d, t]^4, r] + [[d, t]^4, [[d, t]^4, r]].$$

Так как $2[d, t]^4 [[d, t]^4, r] \in 2D^2 \cdot ZN(A) = (0)$, то нам достаточно доказать, что $[[d, t]^4, n] = 0$ для любого $n \in N$. Ввиду тождества (3.2), мы имеем

$$[d, t] = (xy, z, t) + (yz, x, t) + (zx, y, t),$$

откуда, ввиду (7.10), следует, что $[[d, t], n] = 0$. Ясно, что тогда и $[[d, t]^4, n] = 0$. Следствие доказано.

Следствие 2. $Z_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$.

Действительно, как легко видеть, элемент $f = [(x_1, x_2, x_3), x_4]^8$ не является тождеством в алгебре Кэли — Диксона. Значит, $f \neq 0$ в алгебре $\mathrm{Alt}[X]$. В то же время по следствию 1 $f \in Z_{\mathrm{Alt}}$.

Замечание. Так как $K_{\mathrm{Alt}} \supseteq Z_{\mathrm{Alt}}$, то из следствия 2 вытекает, что $K_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$. На самом деле в $K_{\mathrm{Alt}}$ содержатся ненулевые элементы более простого вида, чем рассмотренный выше. Например, Шестаков доказал [270], что если $1/2 \in \Phi$, то $(x_1, x_2, x_3)^4 \in K_{\mathrm{Alt}}$. Заметим, что соответствующее тождество $[(x, y, z)^4, t] = 0$ является в определенном смысле «двойственным» к тождеству Клейнфелда $([x, y]^4, z, t) = 0$. По следствию 1 леммы 7.1 мы имеем включение $3(x_1, x_2, x_3)^4 \in Z_{\mathrm{Alt}}$. Неизвестно, верно ли включение $(x_1, x_2, x_3)^4 \in Z_{\mathrm{Alt}}$. Вообще до сих пор неизвестно, является ли включение $Z_{\mathrm{Alt}} \subseteq K_{\mathrm{Alt}}$ строгим. Если $Z_{\mathrm{Alt}} \neq K_{\mathrm{Alt}}$, то легко видеть, что в аддитивной группе алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ найдутся ненулевые элементы порядка 3. Заметим в этой связи, что вопрос о наличии кручения в аддитивной группе алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ также является открытым. Более общая формулировка этого вопроса такова: является ли алгебра $\mathrm{Alt}[X]$ свободным $\Phi$-модулем? Если это так, то интересно было бы указать какую-либо конкретную базу этого $\Phi$-модуля.

Рассмотрим теперь в алгебре $\mathrm{Alt}[X]$ идеалы $ZN_{\mathrm{Alt}} = ZN(\mathrm{Alt}[X])$ и $U_{\mathrm{Alt}} = U(\mathrm{Alt}[X])$. Мы имеем $0 \neq [[x_1, x_2]^4, x_3] \in ZN_{\mathrm{Alt}}$, поэтому $ZN_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$. Покажем теперь, что и $U_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$.

Лемма 11 (Слейтер). *Пусть $A$ — произвольная альтернативная алгебра. Тогда для любых элементов $m, n \in N(A)$ элемент $[m, n]$ принадлежит $U(A)$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $c \in A^{\#}$. Тогда согласно лемме 9 мы имеем

$$([m, n]c, a, b) = [m, n](c, a, b) = -[m, c](n, a, b) = 0.$$

Значит, $[m, n]A^{\#} \subseteq N(A)$, откуда по предложению 8.9 $[m, n] \in U(A)$. Лемма доказана.

Следствие 1. $U_{\mathrm{Alt}} \neq (0)$.

Действительно, мы имеем $0 \neq [[x_1, x_2]^4, [x_3, x_4]^4] \in U_{\mathrm{Alt}}$.

Следствие 2. *Свободная альтернативная алгебра от трех и более порождающих не является первичной.*

Доказательство. Рассмотрим свободную альтернативную алгебру $\mathrm{Alt}[Y]$, где $\mathrm{card}(Y) \geqslant 3$. Тогда, очевидно, $D(\mathrm{Alt}[Y]) \neq (0)$. С другой стороны, для любых трех различных элементов $y_1, y_2, y_3 \in Y$ мы имеем $0 \neq [[y_1, y_2]^4, [y_1, y_3]^4] \in U(\mathrm{Alt}[Y])$, т. е. $U(\mathrm{Alt}[Y]) \neq (0)$. Так как $D(\mathrm{Alt}[Y]) \cdot U(\mathrm{Alt}[Y]) = (0)$, то тем самым все доказано.

Отметим здесь следующий интересный открытый вопрос: является ли алгебра $\mathrm{Alt}[X]$ разделенной, т. е. верно ли, что $U_{\mathrm{Alt}} \cap D(\mathrm{Alt}[X]) = (0)$? Если это так, то по следствию 1 теоремы 8 мы имели бы включение $2ZN_{\mathrm{Alt}} \subseteq N_{\mathrm{Alt}}$, о справедливости которого пока также ничего не известно.

Докажем теперь следующее

Предложение 3. *Подалгебры $N_{\mathrm{Alt}}$, $Z_{\mathrm{Alt}}$ и идеалы $U_{\mathrm{Alt}}$, $ZN_{\mathrm{Alt}}$ алгебры $\mathrm{Alt}[X]$ являются вполне характеристическими (т. е. выдерживают все эндоморфизмы алгебры $\mathrm{Alt}[X]$).*

Доказательство. Докажем, например, что подалгебра $N_{\mathrm{Alt}}$ является вполне характеристической. Пусть $n = n(x_1, \ldots, x_m) \in N_{\mathrm{Alt}}$. Нам нужно показать, что $n(a_1, \ldots, a_m) \in N_{\mathrm{Alt}}$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in \mathrm{Alt}[X]$. Пусть $x_i, x_j$ — свободные порождающие, не входящие в запись элементов $a_1, \ldots, a_m$ и отличные от $x_1, \ldots, x_m$. Рассмотрим эндоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathrm{Alt}[X]$, при котором $\varphi(x_k) = a_k$ для $k = 1, \ldots, m$, $\varphi(x_i) = x_i$, $\varphi(x_j) = x_j$. Так как $n \in N_{\mathrm{Alt}}$, то мы имеем

$(n, x_i, x_j) = 0$. Применяя к этому равенству эндоморфизм $\varphi$, мы получаем

$$0 = \varphi((n, x_i, x_j)) = (\varphi(n), \varphi(x_i), \varphi(x_j)) = \\ = (n(a_1, \ldots, a_m), x_i, x_j),$$

откуда $n(a_1, \ldots, a_m) \in N_{\mathrm{Alt}}$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. При рассмотрении $U_{\mathrm{Alt}}$ нужно воспользоваться предложением 8.9. Предложение доказано.

В связи с этим предложением возникает естественный вопрос о нахождении систем порождающих элементов вполне характеристических подалгебр $N_{\mathrm{Alt}}$ и $Z_{\mathrm{Alt}}$, а также $T$-идеалов $ZN_{\mathrm{Alt}}$ и $U_{\mathrm{Alt}}$. Неясно пока даже, существует ли хотя бы в одном из рассматриваемых случаев конечная система порождающих элементов.

Заметим, что в доказательстве предложения 3 мы существенно использовали бесконечность множества $X$. Для конечнопорожденной свободной алгебры $\mathrm{Alt}\,[X_n]$ аналогичное утверждение доказывается уже не так просто. Мы посвятим этому доказательству оставшуюся часть данного параграфа.

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi[X]$ — произвольный неассоциативный многочлен. Для набора натуральных чисел

$$[r] = [r_{11}, \ldots, r_{1s_1}; \ldots; r_{n1}, \ldots, r_{ns_n}] \qquad (s_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

мы обозначим через $f^{[r]} = f^{[r]}(x_1, \ldots, x_n; x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{ns_n})$ элемент

$$f\Delta_1^{r_{11}}(x_{11}) \ldots \Delta_1^{r_{1s_1}}(x_{1s_1}) \ldots \Delta_n^{r_{n1}}(x_{n1}) \ldots \Delta_n^{r_{ns_n}}(x_{ns_n}), \qquad (12)$$

где $x_{ij} \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n; x_{11}, \ldots, x_{1s_1}; \ldots; x_{i1}, \ldots, x_{i(j-1)}\}$. Легко убедиться в справедливости соотношений

$$f\Delta_i^r(x_k)\,\Delta_j^s(x_l) = f\Delta_j^s(x_l)\,\Delta_i^r(x_k), \qquad (13)$$

$$f\Delta_i^r(x_k)\,\Delta_k^s(x_l) = f\Delta_i^{r-s}(x_k)\Delta_i^s(x_l), \qquad (14)$$

где $x_i \neq x_j$; $x_i, x_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_k \neq x_l$; $x_k, x_l \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Из этих соотношений следует, что любой элемент из множества $f\Delta$ (см. § 1.4) имеет вид $f^{[r]}$ для подходящего набора $[r]$. Если $\{i, \ldots, j\}$ — некоторое под-

множество множества $\{1, \ldots, n\}$, то через $f\Delta_{\{i, \ldots, j\}}$ мы обозначим совокупность всех элементов вида (12), у которых $s_k = 0$ при $k \notin \{i, \ldots, j\}$, а через $f\Delta_{\{i, \ldots, j\}}^{\{k_i, \ldots, k_j\}}$ — совокупность таких элементов $f^{[r]}$ из множества $f\Delta_{\{i, \ldots, j\}}$, у которых $r_{i1} + \ldots + r_{is_i} = k_i, \ldots, r_{j1} + \ldots + r_{js_j} = k_j$.

Лемма 12. *Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный неассоциативный многочлен. Тогда для любых элементов $x, y_1, \ldots, y_n \in \Phi[X]$ справедливо равенство*

$$f(y_1, \ldots, y_n)\Delta_i^k(x) = \sum_{\langle [m], [r]\rangle = k} f^{[r]}(y_1, \ldots, y_n;\ y_1^{(m_{11})}, \ldots \ldots, y_1^{(m_{1s_1})}; \ldots; y_n^{(m_{n1})}, \ldots, y_n^{(m_{ns_n})}),$$

*где* $y_j^{(t)} = y_j\Delta_i^t(x)$, $[m] = [m_{11}, \ldots, m_{1s_1}; \ldots; m_{n1}, \ldots, m_{ns_n}]$, $m_{j1} > m_{j2} > \ldots > m_{js_j} > 0$ *при* $s_j > 0$, $[r] = [r_{11}, \ldots, r_{1s_1}; \ldots \ldots; r_{n1}, \ldots, r_{ns_n}]$, $\langle [m], [r]\rangle = \sum_{i, j} m_{ij}r_{ij}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда элемент $f$ является одночленом. Пусть степень $f$ по переменной $x_i$ равна $t_i$. Рассмотрим полилинейный одночлен $v(x_{11}, \ldots, x_{1t_1}; \ldots; x_{n1}, \ldots, x_{nt_n})$, для которого $f(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_1; \ldots; x_n, \ldots, x_n)$. По лемме 1.2 имеем

$$f(y_1, \ldots, y_n)\Delta_i^k(x) = \sum_{\substack{m_{11}+\ldots+m_{1t_1}+ \\ \ldots\ldots\ldots \\ +m_{n1}+\ldots+m_{nt_n}=k}} v(y_1^{(m_{11})}, \ldots, y_1^{(m_{1t_1})}; \ldots; y_n^{(m_{n1})}, \ldots, y^{(m_{nt_n})}).$$

Сгруппируем вместе в этой сумме слагаемые, зависящие от одинаковых наборов аргументов. Пусть в некотором наборе $[m]$ среди чисел $m_{j1}, m_{j2}, \ldots, m_{jt_j}$ имеется $s_j$ различных ненулевых чисел $m'_{j1} > m'_{j2} > \ldots > m'_{js_j} > 0$, и пусть число $m'_{jl}$ встречается $r_{jl}$ раз в наборе $m_{j1}, \ldots \ldots, m_{jt_j}$. Тогда, очевидно, $m_{j1} + m_{j2} + \ldots + m_{jt_j} = r_{j1}m'_{j1} + r_{j2}m'_{j2} + \ldots + r'_{js_j}m'_{js_j}$. Сумма всех тех слагаемых, в которые для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ входят $t_j - s_j$

элементов $y_j$, $r_{j1}$ элементов $y_j^{(m'_{j1})}$, ..., $r_{js_j}$ элементов $y_j^{(m'_{js_j})}$, равна в точности

$$f^{[r]}(y_1, \ldots, y_n;\ y_1^{(m'_{11})}, \ldots, y_1^{(m'_{1s_1})};\ \ldots;\ y_n^{(m'_{n1})}, \ldots, y_n^{(m'_{ns_n})}).$$

Суммируя теперь полученные выражения для всех различных возможных наборов аргументов, мы получаем утверждение леммы.

Предположим теперь, что $f$ линеен по $x_1$. Для произвольной алгебры $A$ положим

$$N_f^{(1)}(A) = \{a \in A \mid g(a, A, \ldots, A) = 0 \quad \text{для любого} \quad g \in f\Delta_{\{2, \ldots, n\}}\}.$$

Пусть $\Phi_{\mathfrak{M}} = \Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ — свободная алгебра однородного многообразия $\mathfrak{M}$ от произвольного (возможно, конечного) множества порождающих $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$.

Л е м м а 13. *Если* $n = n(y_1, \ldots, y_m) \in N_f^{(1)}(\Phi_{\mathfrak{M}})$, *то* $n\Delta_y^k(z) \in N_f^{(1)}(\Phi_{\mathfrak{M}})$ *для любого натурального* $k$ *и любых* $y \in Y$, $z \in \Phi_{\mathfrak{M}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцию по $k$. Очевидно основание индукции: $k = 0$. Предположим теперь, что лемма верна для всех $k' < k$, и рассмотрим произвольный элемент $g \in f\Delta_{\{2, \ldots, n\}}$, $g = g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \ldots, x_t)$. По условию для любых элементов $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ имеем $h = g(n, z_2, \ldots, z_n; \ldots, z_t) = 0$. Но тогда $h\Delta_y^k(z) = 0$ по предложению 1.3, поэтому согласно лемме 12 будем иметь

$$0 = g(n^{(k)}, z_2, \ldots, z_t) + \sum_s g_s(n^{(k_s)}, z_2, \ldots, z_t; z_2^{(1)}, \ldots, z_t^{(1)}, \ldots),$$

где $k_s < k$, $g_s \in g\Delta_{\{2, \ldots, t\}} \subseteq f\Delta_{\{2, \ldots, n\}}$, $u^{(m)} = u\Delta_u^m(z)$. По предположению индукции имеем

$$g_s(n^{(k_s)}, z_2, \ldots, z_t;\ z_2^{(1)}, \ldots, z_t^{(1)}, \ldots) = 0,$$

откуда следует, что $g(n^{(k)}, z_2, \ldots, z_t) = 0$. Следовательно, $n\Delta_y^k(z) \in N_f^{(1)}(\Phi_{\mathfrak{M}})$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $I$ — подмодуль $\Phi$-модуля $\Phi_{\mathfrak{M}}$ такой, что $i\Delta(z) \subseteq I$ для любых $i \in I$, $z \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ (см. § 1.4). Тогда $I$ является вполне характеристическим подмножеством алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Пусть $i \in I$, $i = f(y_1, \ldots, y_n)$, где $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый неассоциативный многочлен. Мы докажем индукцией по $n - r$, что для любого $g = g(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_t) \in f\Delta_{\{r+1, \ldots, n\}}$ и для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ верно включение $g(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_t) \in I$. Основанием для индукции при $n - r = 0$ служит включение $f(y_1, \ldots, y_n) \in I$. Сделав соответствующее индуктивное предположение, рассмотрим произвольный элемент $h \in f\Delta_{\{r, r+1, \ldots, n\}}$. Пусть

$$h = h(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m) \in f\Delta^{\{k, l, \ldots, s\}}_{\{r, r+1, \ldots, n\}}.$$

Сделаем второе индуктивное предположение: если $k' < k$; $s, \ldots, l$ — произвольные натуральные числа и

$$g(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_p) \in f\Delta^{\{k', l, \ldots, s\}}_{\{r, r+1, \ldots, n\}},$$

то $g(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_p) \in I$ для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$. Основанием для этого индуктивного предположения при $k = 0$ служит первое индуктивное предположение. Пусть теперь $k > 0$. Ввиду соотношений (13) и (14), мы можем считать, что

$$h(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_{m-1}, x_m) = \\ = h_1(x_1, \ldots, x_r, \ldots, x_{m-1})\, \Delta^q_r(x_m),$$

где $h_1 \in f\Delta^{\{k-q, \ldots, s\}}_{\{r, \ldots, n\}}$. По второму предположению индукции имеем $v = h_1(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_{m-1}) \in I$. Но тогда и $v\Delta^q_{y_r}(z_m) \in I$, откуда по лемме 12

$$h(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_{m-1}, z_m) + \\ + \sum_s h'_s(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m;\ z^{(1)}_{r+1}, \ldots, z^{(1)}_{m-1}, \ldots) \in I,$$

где $h'_s \in h_1\Delta^{\{q', \ldots, l', \ldots, t'\}}_{\{r, \ldots, n, \ldots, m-1\}}$, $q' < q$, $z^{(j)}_i = z_i\Delta^j_{y_r}(z_m)$. Ввиду соотношений (13) и (14), имеем $h'_s \in f\Delta^{\{k', \ldots, l\}}_{\{r, \ldots, n\}}$, где $k' < k$, откуда по предположению индукции

$$h'_s(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m;\ z^{(1)}_{r+1}, \ldots, z^{(1)}_{m-1}, \ldots) \in I$$

и далее $h(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m) \in I$. Ввиду произвольности $h$ тем самым доказано, что для любого $g = g(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_t) \in f\Delta_{\{r, r+1, \ldots, n\}}$ и для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ верно включение $g(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots \ldots, z_t) \in I$. Пусть теперь $h$ имеет степень $n_r$ по $x_r$. Без ограничения общности можно считать, что $h$ однороден по $x_r$. Мы имеем $h(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m)\,\Delta_{y_r}^{n_r}(z_r) \in I$, откуда по лемме 12 получаем

$$h(y_1, \ldots, y_{r-1}, z_r, \ldots, z_m) + \sum_s h_s''(y_1, \ldots, y_{r-1}, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m;\ z_r, z_{r+1}^{(1)}, \ldots) \in I,$$

где $h_s'' \in f\Delta_{\{r, r+1, \ldots, n\}}$, $z_i^{(j)} = z_i\Delta_{y_r}^{j}(z_r)$. По доказанному выше имеем

$$h_s''(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m;\ z_r, z_{r+1}^{(1)}, \ldots) \in I,$$

откуда и $h(y_1, \ldots, y_{r-1}, z_r, \ldots, z_m) \in I$. Ввиду произвольности $h$, по первому индуктивному предположению отсюда следует, что $f(z_1, \ldots, z_n) \in I$ для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$. Лемма доказана.

Заметим, что в процессе доказательства леммы 14 мы доказали следующее более общее утверждение.

Следствие. *В условиях леммы 14 пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — такой неассоциативный многочлен, что для некоторого целого числа $r$ ($0 \leqslant r \leqslant n$, $r \leqslant \operatorname{card}(Y)$), для любого $g \in f\Delta_{\{r+1, \ldots, n\}}$, $g = g(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots \ldots, x_n; \ldots, x_m)$ и для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$ справедливо включение*

$$g(y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_m) \in I.$$

*Тогда $f(z_1, \ldots, z_n) \in I$ для любых $z_i \in \Phi_{\mathfrak{M}}$.*

Из лемм 13 и 14 вытекает

Теорема 10 (Шестаков). *Пусть $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$ — свободная алгебра однородного многообразия $\mathfrak{M}$ от произвольного множества порождающих $Y$, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — неассоциативный многочлен, линейный по $x_1$. Тогда подмодуль $N_f^{(1)}(\Phi_{\mathfrak{M}}[Y])$ является вполне характеристическим подмодулем алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$.*

Следствие. *В условиях теоремы 10 подалгебры $N(\Phi_{\mathfrak{M}}[Y])$ и $Z(\Phi_{\mathfrak{M}}[Y])$ являются вполне характеристическими подалгебрами алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}}[Y]$.*

Из теоремы 10 следует также, что в конечнопорожденной альтернативной алгебре $\mathrm{Alt}[X_n]$ идеалы $ZN(\mathrm{Alt}[X_n])$ и $U(\mathrm{Alt}[X_n])$ являются вполне характеристическими.

**Упражнения**

1. Пусть $A$ — альтернативная алгебра, $x, y, z, r, s \in A$, $n \in N(A)$. Доказать, что

$$2(x, y, z)[r, n][s, n] = 0.$$

2 (Дорофеев). Доказать, что если $n \in N(A)$, то

$$2[A, n][A, n]A \subseteq N(A).$$

3. Доказать, что $D(\mathrm{Alt}[X])$ является альтернативной PI-алгеброй.

Указание. В $D(\mathrm{Alt}[X])$ выполнено тождество $[[x, y]^8, t] = 0$.

## § 4. Альтернативные алгебры от трех порождающих

В этом параграфе мы рассмотрим свободную 3-порожденную альтернативную алгебру $\mathrm{Alt}[X_3] = \mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$. Мы докажем, что в ассоциативном центре $N(\mathrm{Alt}[X_3])$ и в центре $Z(\mathrm{Alt}[X_3])$ содержатся ненулевые элементы существенно более простого вида, чем в соответствующих центрах алгебры $\mathrm{Alt}[X]$. На основе полученных тождеств мы затем докажем, что в свободной альтернативной алгебре от трех и более порождающих содержатся подалгебры, имеющие строение алгебр Кэли — Диксона над своими центрами.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 15. *Во всякой альтернативной алгебре $A$ справедливы тождества*

$$([x, y]^2, x, z) = 0, \tag{15}$$

$$[(x, y, z)^2, x] = 0, \tag{16}$$

$$((x, y, z)^2, x, y) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Тождество (15) справедливо в силу соотношения (7.25). Далее, заметим, что в алгебре $A$ верно тождество

$$[(x^2, y, z), (x, y, z)] = 0. \tag{18}$$

Действительно, в силу тождеств Муфанг имеем

$$\begin{aligned}(x^2, y, z)(x, y, z) = \\ = -(x^2, y, (x, y, z))z + (x^2, (x, y, z)y, z) + \\ + (x^2, zy, (x, y, z)) = -(x, y, x \circ (x, y, z))z + \\ + (x, x \circ (x, y, yz), z) + (x, zy, x \circ (x, y, z)) = \\ = -(x, y, (x^2, y, z))z + (x, (x^2, y, z)y, z) + \\ + (x, zy, (x^2, y, z)) = (x, y, z)(x^2, y, z).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}[(x, y, z)^2, x] = [(x, y, z), (x, y, z) \circ x] = \\ = [(x, y, z), (x^2, y, z)] = 0,\end{aligned}$$

т. е. (16) доказано. Пусть теперь $w = (x, y, z)$. Согласно (7.14) и (7.15) получаем

$$\begin{aligned}(w^2, x, y) = w \circ (w, x, y) = -w \circ (w[x, y]) = \\ = -w^2[x, y] - w[x, y]w = -w([x, y] \circ w) = 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 16 (Брак, Клейнфелд). *Пусть $A$ — альтернативная алгебра с множеством порождающих $S$. Тогда элемент $z \in A$ принадлежит центру $Z(A)$ в том и только в том случае, когда $[z, S] = (z, S, S) = (0)$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если $z \in Z(A)$, то $[z, S] = (z, S, S) = (0)$. Пусть теперь $[z, S] = (z, S, S) = (0)$. Рассмотрим множество $P = \{p \in A \mid (z, p, S) = (0)\}$. Легко видеть, что $P$ — подмодуль Ф-модуля $A$. Далее, для любых $p, p' \in P$, $s \in S$ мы имеем

$$\begin{aligned}(pp', s, z) = p'(p, s, z) + (p', s, z)p + f(p, p', s, z) = \\ = f(p, p', s, z) = ([p, p'], s, z) + (p, p', [s, z]) = \\ = ([p, p'], s, z),\end{aligned}$$

откуда следует, что $(z, PP, S) = (0)$, т. е. $P$ является под-

алгеброй алгебры $A$. Так как $P \supseteq S$, то $P = A$, т. е. $(z, A, S) = (0)$. Рассмотрим теперь множество $Q = \{q \in A \mid (z, A, q) = (0)\}$. Тогда $Q$ — подмодуль Ф-модуля $A$ и $Q \supseteq S$. Для любых $q, q' \in Q$, $a \in A$ мы имеем

$$(qq', a, z) = q'(q, a, z) + (q', a, z)q + f(q, q', a, z) = \\ = f(q, q', a, z) = f(q', a, q, z) = \\ = (q'a, q, z) - a(q', q, z) - (a, q, z)q' = 0,$$

т. е. $QQ \subseteq Q$ и $Q$ — подалгебра алгебры $A$. Так как $Q \supseteq S$, то $Q = A$, и мы получаем, что $(z, A, A) = (0)$, т. е. $z \in N(A)$. Наконец, пусть $R = \{r \in A \mid [z, r] = 0\}$. Для любых $r, r' \in R$ мы имеем в силу (7.4)

$$[rr', z] = r[r', z] + [r, z]r' = 0,$$

т. е. $R \cdot R \subseteq R$. Ясно, что $R$ — подалгебра алгебры $A$, и так как $R \supseteq S$, то $R = A$. Таким образом, $z \in Z(A)$. Лемма доказана.

Теорема 11 (Дорофеев). *Во всякой альтернативной 3-порожденной алгебре справедливы тождества*

$$([x, y]^2, r, s) = 0, \tag{19}$$

$$([x, y] \circ [z, t], r, s) = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что тождества (19) и (20) справедливы в свободной алгебре $\mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$. Пусть $N = N(\mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3])$. Докажем вначале, что $[x_1, x_2]^2 \in N$ для порождающих $x_1, x_2$. Для произвольных элементов $r, s \in \mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$ обозначим через $f(r, s)$ идеал алгебры $\mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$, порожденный элементом $([x_1, x_2]^2, r, s)$. Тогда отображение $f$ удовлетворяет условиям а) — е) предложения 1: условия а) — г) очевидны, д) верно в силу тождества (2), а е) — в силу тождества Муфанг. По предложению 1 $f(r, s) \subseteq \subseteq \sum_{i<j} f(x_i, x_j) + \sum_{i=1}^{3} f(x_i, x_jx_k)$. Кроме того, легко видеть, что

$$f(x_i, x_jx_k) + \sum_{i<j} f(x_i, x_j) = f(x_1, x_2x_3) + \sum_{i<j} f(x_i, x_j),$$

поэтому $f(r, s) \subseteq \sum_{i<j} f(x_i, x_j) + f(x_1, x_2x_3)$. Ввиду (15),

мы имеем $f(x_i, x_j) = f(x_1, x_2x_3) = (0)$, откуда и $f(r, s) = (0)$. Таким образом, $[x_1, x_2]^2 \in N$. По теореме 10 подалгебра $N$ является вполне характеристической, поэтому $[x, y]^2 \in N$ для любых $x, y \in \mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$. Тем самым доказано тождество (19).

Докажем теперь, что $[x_1, x_2] \circ [x_3, r] \in N$ для любого $r \in \mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$. Как и в предыдущем случае, для этого достаточно доказать, что

$$([x_1, x_2] \circ [x_3, r], x_i, x_j) = 0, \tag{21}$$

$$([x_1, x_2] \circ [x_3, r], x_1, x_2x_3) = 0. \tag{22}$$

Линеаризуя (19) по $y$, получаем следующее тождество в $\mathrm{Alt}[x_1, x_2, x_3]$:

$$([x, y] \circ [x, z], r, s) = 0. \tag{23}$$

Кроме того, во всякой альтернативной алгебре верно тождество

$$([x, y] \circ z, x, y) = 0. \tag{24}$$

Действительно, имеем в силу (7.15) и теоремы Артина

$$([x, y] \circ z, x, y) = [x, y] \circ (z, x, y) + z \circ ([x, y], x, y) = 0.$$

Вернемся к соотношению (21). В силу (24) нам остается рассмотреть случай, когда либо $x_i = x_3$, либо $x_j = x_3$. Пусть, например, $x_i = x_3$. Тогда по линеаризованному (24) и в силу (23) имеем

$$([x_1, x_2] \circ [x_3, r], x_3, x_j) = -([x_1, x_2] \circ [x_3, x_j], x_3, r) = 0,$$

т. е. (21) доказано. Далее, применяя вновь линеаризованное тождество (24), получаем, ввиду (23),

$$([x_1, x_2] \circ [x_3, r], x_1, x_2x_3) = -([x_1, x_2x_3] \circ [x_3, r], x_1, x_2) =$$
$$= ([x_1, x_2x_3] \circ [x_1, r], x_3, x_2) + ([x_1, x_2x_3] \circ [x_3, x_2], x_1, r) +$$
$$+ ([x_1, x_2x_3] \circ [x_1, x_2], x_3, r) = ([x_1, x_2x_3] \circ [x_3, x_2], x_1, r).$$

Заметим, что во всякой алгебре верно тождество

$$[x, yz] + [y, zx] + [z, xy] =$$
$$= -(x, y, z) - (y, z, x) - (z, x, y). \tag{25}$$

Следовательно, согласно (25), (7.15) и (23) мы имеем

$$[x_1, x_2x_3] \circ [x_3, x_2] = -[x_2, x_3x_1] \circ [x_3, x_2] - \\ - [x_3, x_1x_2] \circ [x_3, x_2] - 3(x_1, x_2, x_3) \circ [x_3, x_2] = \\ = [x_2, x_3x_1] \circ [x_2, x_3] - [x_3, x_1x_2] \circ [x_3, x_2] \in N$$

откуда следует (22). Таким образом, $[x_1, x_2] \circ [x_3, r] \in N$ для любого $r \in \mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]$. По следствию леммы 14 тогда $[x, y] \circ [z, t] \in N$ для любых $x, y, z, t \in \mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]$, что доказывает тождество (20).

Теорема доказана.

Следствие. *Для любых элементов* $x, y, z, t \in \mathrm{Alt}\,[X_3]$

$$[x, y]^2,\ [x, y] \circ [z, t] \in N\,(\mathrm{Alt}\,[X_3]).$$

Найдем теперь некоторые элементы из центра $Z\,(\mathrm{Alt}\,[X_3])$ алгебры $\mathrm{Alt}\,[X_3]$.

Теорема 12 (Шестаков). *Для любых элементов* $x, y, z, r, s$ *алгебры* $\mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]$

$$(x, y, z)^2,\ (x, y, z) \circ [r, s] \in Z(\mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]).$$

Доказательство. Пусть $Z = Z\,(\mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3])$. Ввиду леммы 16, для доказательства того, что $f = f\,(x_1, x_2, x_3) \in Z$, достаточно показать, что $[f, x_i] = (f, x_i, x_j) = 0$ для любых порождающих $x_i, x_j$. Отсюда и из соотношений (16), (17) следует, что $(x_1, x_2, x_3)^2 \in Z$. По теореме 10 тогда и $(x, y, z)^2 \in Z$ для любых $x, y, z \in \mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]$. Тем самым доказано первое из включений теоремы 12.

Для доказательства второго включения в силу следствия леммы 14 (или теоремы 10) достаточно показать, что $(x_1, x_2, x_3) \circ [r, s] \in Z$ для любых $r, s \in \mathrm{Alt}\,[x_1, x_2, x_3]$. Без ограничения общности элементы $r, s$ можно считать одночленами от $x_1, x_2, x_3$, и мы будем доказывать данное утверждение индукцией по числу $n = d\,(r) + d\,(s)$. Основанием для индукции при $n = 2$ служит равенство (7.15). Как мы уже замечали, нам достаточно показать, что для любых порождающих $x_i, x_j$

$$((x_1, x_2, x_3) \circ [r, s], x_i, x_j) = 0, \tag{26}$$

$$[(x_1, x_2, x_3) \circ [r, s], x_i] = 0. \tag{27}$$

Докажем вначале равенство (26). Если $d(r) > 1$, $d(s) > 1$, то в силу линеаризованного тождества (24) и по предположению индукции мы получаем

$$((x_1, x_2, x_3) \circ [r, s], x_i, x_j) = -((x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, s], r, x_j) - \\ - ((x_1, x_2, x_3) \circ [r, x_j], x_i, s) - ((x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, x_j], r, s) = 0.$$

Пусть теперь, например, $r = x_1$. Ввиду того, что

$$((x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, s], x_i, x_j) = \\ = -((x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, x_j], x_i, s) = 0, \quad (28)$$

нам остается рассмотреть элемент $f = ((x_1, x_2, x_3) \circ \circ [x_1, s], x_2, x_3)$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы видим, что

$$f = -((x_1, x_2, x_3) \circ [x_2, s], x_1, x_3) = \\ = -((x_1, x_2, x_3) \circ [x_3, s], x_2, x_1). \quad (29)$$

Далее, из тождеств альтернативности следует, что одночлен $s$ можно представить в виде $s = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i x_i s_i + \beta_i s'_i x_i)$, где $\alpha_i, \beta_i \in \Phi$, $s_i$, $s'_i$ — одночлены от $x_1$, $x_2$, $x_3$, $d(s_i) = d(s'_i) = d(s) - 1$. Мы оставляем доказательство этого факта читателю. Рассмотрим элемент $f_i = ((x_1, x_2, x_3) \circ \circ [x_1, x_i s_i], x_2, x_3)$. Применив, если необходимо, соотношения (29), мы можем считать, что $f_i = \pm ((x_1, x_2, x_3) \circ \circ [x_j, x_i s_i], x_i, x_k)$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $x_j \neq s_i$. Ввиду (25), мы имеем

$$(x_1, x_2, x_3) \circ [x_j, x_i s_i] = \\ = -(x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, s_i x_j] - (x_1, x_2, x_3) \circ [s_i, x_j x_i] - \\ - 3(x_1, x_2, x_3) \circ (x_j, x_i, s_i)$$

Из линеаризованного по $z$ включения $(x, y, z)^2 \in Z$ следует, что $(x_1, x_2, x_3) \circ (x_j, x_i, s_i) \in Z$. Далее, согласно (28) мы имеем

$$((x_1, x_2, x_3) \circ [x_i, s_i x_j], x_i, x_k) = 0.$$

Наконец, заметим, что либо $d(s_i) > 1$, либо $s_i \in \{x_i, x_k\}$, поэтому по доказанному выше или ввиду (28)

$$((x_1, x_2, x_3) \circ [s_i, x_j x_i], x_i, x_k) = 0.$$

Следовательно, $f_i = 0$ для $i = 1, 2, 3$. Аналогично доказывается, что

$$f'_i = ((x_1, x_2, x_3) \circ [x_1, s'_i x_i], x_2, x_3) = 0$$

для $i = 1, 2, 3$. Значит, $f = 0$ и соотношение (26) доказано.

Далее, имеем согласно тождествам (20) и линеаризованному (7.15)

$$[(x_1, x_2, x_3) \circ [r, s], x_1] = (x_1, x_2, x_3) \circ [[r, s], x_1] + \\ + [r, s] \circ [(x_1, x_2, x_3), x_1] = (x_1, x_2, x_3) \circ [[r, s], x_1] + \\ + [r, s] \circ (x_1, x_2, [x_1, x_3]) = (x_1, x_2, x_3) \circ [[r, s], x_1] + \\ + (x_1, x_2, [r, s] \circ [x_1, x_3]) - [x_1, x_3] \circ (x_1, x_2, [r, s]) = \\ = (x_1, x_2, x_3) \circ [[r, s], x_1] + (x_1, x_2, [r, s]) \circ [x_3, x_1] = 0,$$

что доказывает (27).

Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathrm{Alt}\,[Y]$ — свободная альтернативная $\Phi$-алгебра от множества порождающих $Y$, где $\mathrm{card}\,(Y) \geqslant 3$ и в $\Phi$ нет элементов порядка 2. Выберем произвольные различные элементы $a, b, c \in Y$ и положим $u = [a, b]$, $v = (a, b, c)$, $w = (u, v, a)$. Через $A_1 = \Phi\,[u, v]$ и $A = \Phi\,[u, v, w]$ мы обозначим подалгебры алгебры $\mathrm{Alt}\,[Y]$, порожденные соответственно множествами $\{u, v\}$ и $\{u, v, w\}$.

Лемма 17. $u^2, v^2, w^2 \in Z\,(A)$.

Доказательство. Ввиду теоремы 12, остается проверить лишь, что $u^2 \in Z\,(A)$. По теореме 11 $u^2 \in N\,(A)$. Кроме того, мы имеем

$$[u^2, v] = [u, u \circ v] = [u, [a, b] \circ (a, b, c)] = 0,$$
$$[u^2, w] = [u, u \circ w] = [u, u \circ (u, v, a)] = \\ = [u, (u^2, v, a)] = 0,$$

откуда в силу леммы 16 следует, что $u^2 \in Z\,(A)$. Лемма доказана.

Лемма 18. *Элементы* $(u^i v^j)\,w^k$, *где* $i, j, k$ — *произвольные неотрицательные целые числа* ($u^0 = v^0 = w^0 = 1$), *линейно независимы над* $\Phi$ *в алгебре* $\mathrm{Alt}\,[Y]^{\#}$.

Доказательство. Пусть для некоторых $\alpha_{ijk} \in \Phi$

$$\sum_{i,\,j,\,k} \alpha_{ijk} (u^i v^j) w^k = 0. \tag{30}$$

Ясно, во-первых, что $\alpha_{000} = 0$. Заметим теперь, что каждый элемент $(u^i v^j) w^k$ при $i + j + k > 0$ лежит в однородной компоненте типа $[i + j + 3k,\ i + j + 2k,\ j + k]$ свободной алгебры Alt $[a, b, c]$. Как легко видеть, при разных наборах $(i, j, k)$ эти компоненты различны. Следовательно, в силу однородности многообразия альтернативных алгебр из (30) вытекает, что

$$\alpha_{ijk} (u^i v^j) w^k = 0 \tag{31}$$

для любых $i, j, k$. Соотношение (31) справедливо в свободной алгебре, поэтому оно верно и в любой альтернативной алгебре. Но в матричной алгебре Кэли — Диксона $C(\Phi)$ легко найти такие элементы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, что

$$([\bar{a}, \bar{b}]^i (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})^j) ([\bar{a}, \bar{b}], (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), \bar{a})^k \neq 0$$

для всех $i, j, k$. Так как $C(\Phi)$ — свободный $\Phi$-модуль, отсюда следует, что $\alpha_{ijk} = 0$ для всех $i, j, k$. Лемма доказана.

Следствие. *Подалгебра* $\tilde{\Phi} = \Phi[u^2, v^2, w^2]$, *порожденная элементами* $u^2, v^2, w^2$, *изоморфна алгебре многочленов* $\Phi[t_1, t_2, t_3]$ *от независимых переменных* $t_1, t_2, t_3$.

Лемма 19. *Центр* $Z(A_1)$ *алгебры* $A_1$ *равен* $\Phi[u^2, v^2]$; *при этом алгебра* $A_1$ *есть алгебра обобщенных кватернионов над своим центром* *).

Доказательство. По лемме 17 $\Phi[u^2, v^2] \subseteq Z(A_1)$. Обратно, пусть $z \in Z(A_1)$. Ввиду (7.15), мы имеем $vu = -uv$, откуда следует, что элемент $z$ можно представить в виде

$$z = \alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv,$$

*) Понятие процесса Кэли—Диксона естественным образом обобщается на случай алгебр над произвольным кольцом операторов $\Phi$. Если в $\Phi$ нет элементов порядка 2, то под алгеброй обобщенных кватернионов над $\Phi$ мы понимаем алгебру вида $((\Phi, \alpha), \beta)$, полученную из $\Phi$ двукратным применением процесса Кэли — Диксона с параметрами $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha\beta \neq 0$. Естественным образом определяется также алгебра Кэли — Диксона над $\Phi$.

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Phi[u^2, v^2]$. Далее, мы имеем

$$0 = [z, u] = -2\gamma uv - 2\delta u^2 v.$$

Пусть $\gamma = \sum\limits_{i, j} \gamma_{ij} u^{2i} v^{2j}$, $\delta = \sum\limits_{k, l} \delta_{kl} u^{2k} v^{2l}$, где $\gamma_{ij}$, $\delta_{kl} \in \Phi$. Тогда мы получим

$$\sum_{i,j} 2\gamma_{ij} u^{2i+1} v^{2j+1} + \sum_{k,l} 2\delta_{kl} u^{2k+2} v^{2l+1} = 0.$$

Легко видеть, что в этих суммах нет общих слагаемых вида $u^i v^j$, поэтому по лемме 18

$$2\gamma_{ij} = 2\delta_{kl} = 0$$

при любых $i, j, k, l$, откуда $\gamma = \delta = 0$. Аналогично из равенства $[z, v] = 0$ следует $\beta = 0$. Поэтому $z = \alpha \in \Phi[u^2, v^2]$, т. е. $Z(A_1) = \Phi[u^2, v^2]$.

Для доказательства леммы достаточно теперь показать, что элементы $1, u, v, uv$ алгебры $\mathrm{Alt}[a, b, c]^{\#}$ линейно независимы над $\Phi[u^2, v^2]$. Пусть

$$h = \alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Phi[u^2, v^2]$. Тогда $h \in Z(A_1)$, откуда по доказанному выше следует, что $\beta = \gamma = \delta = 0$. Но тогда и $\alpha = h = 0$. Лемма доказана.

В алгебре $A_1$ можно обычным образом определить инволюцию $h \mapsto \bar{h}$: если $h = \alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv$, то полагаем $\bar{h} = \alpha - \beta u - \gamma v - \delta uv$.

Лемма 20. *Пусть $a_1$, $a_2$ — произвольные элементы алгебры $A_1$. Тогда верны следующие соотношения:*

$$wa_1 = \bar{a}_1 w, \tag{32}$$

$$a_1(a_2 w) = (a_2 a_1) w, \tag{33}$$

$$(a_2 w) a_1 = (a_2 \bar{a}_1) w, \tag{34}$$

$$(a_1 w)(a_2 w) = w^2 (\bar{a}_2 a_1). \tag{35}$$

Доказательство. Так как $u^2, v^2 \in Z(A)$, то

$$w \circ u = (u, v, a) \circ u = (u^2, v, a) = 0$$

и аналогично $w \circ v = 0$. Далее,

$$w \circ (uv) = (u, v, a) \circ (uv) = (u \circ uv, v, a) - u \circ (uv, v, a) = \\ = (u (u \circ v), v, a) - u \circ (u, v, av) = -(u^2, v, av) = 0.$$

Из полученных равенств вытекает соотношение (32). Заметим теперь, что $a_1 + \overline{a}_1 \in Z(A)$ для любого $a_1 \in A_1$. Следовательно,

$$(a_2w) a_1 = -(a_2a_1) w + a_2 (w \circ a_1) = \\ = -(a_2a_1) w + a_2w (a_1 + \overline{a}_1) = (a_2\overline{a}_1) w,$$

что доказывает (34). Аналогично, $a_1 (wa_2) = w (\overline{a}_1a_2)$, откуда в силу (32) следует (33). Наконец, мы имеем в виду (32):

$$(a_1w)(a_2w) = (w\overline{a}_1)(a_2w) = w (\overline{a}_1a_2) w = w^2 (\overline{a}_2a_1).$$

Лемма доказана.

Из леммы 20 следует, что всякий элемент $x \in A$ может быть представлен в виде

$$x = \alpha + \beta u + \gamma v + \delta w + \lambda uv + \mu uw + \nu vw + \sigma (uv) w,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \sigma \in \widetilde{\Phi} = \Phi [u^2, v^2, w^2]$. Как и в случае алгебры $A_1$, с помощью леммы 18 легко доказать, что $Z(A) = \widetilde{\Phi}$ и что элементы $1, u, v, w, uv, uw, vw, (uv) w$ алгебры $\mathrm{Alt}\,[a, b, c]^{\#}$ линейно независимы над $\widetilde{\Phi}$. Кроме того, соотношения (32) — (35) показывают, что алгебра $A$ получается из алгебры $\widetilde{A}_1 = \widetilde{\Phi} \underset{\Phi[u^2, v^2]}{\otimes} A_1$ с помощью процесса Кэли — Диксона с параметром $w^2$: $A = (\widetilde{A}_1, w^2)$. Ясно, что $\widetilde{A}_1$ — алгебра обобщенных кватернионов с центром $\widetilde{\Phi}$, поэтому $A$ — алгебра Кэли — Диксона с центром $\widetilde{\Phi}$.

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 13 (Д о р о ф е е в). *Алгебра* $\Phi [u, v, w]$ *есть алгебра Кэли — Диксона над своим центром* $\Phi [u^2, v^2, w^2]$.

Заметим, что если $\Phi$ не имеет делителей нуля, то алгебра $\Phi [u, v, w]$ также не имеет делителей нуля (см. лемму 2.13 и следствие леммы 18).

**Упражнения**

1 (Дорофеев). Доказать, что во всякой 3-порожденной альтернативной алгебре $A$ верно включение

$$ZN(A) \subseteq U(A).$$

Указание. Для фиксированного $n \in N$ обозначим через $F(x, y, z, t)$ идеал алгебры $A$, порожденный элементом $([x, n[y, z, t)$. Тогда отображение $F$ удовлетворяет условиям а) — е) предложения 1.

2 (Шестаков). Доказать, что $(x, y, z) \circ (r, s, t) \in Z(\mathrm{Alt}[X_3])$ для любых $x, y, z, r, s, t \in \mathrm{Alt}[X_3]$.

## ЛИТЕРАТУРА

Дорофеев [56, 57, 60], Жевлаков [75], Слейтер [197, 206], Хумм и Клейнфелд [256], Шелипов [265], Шестаков [269—272], Ширшов [278, 279].

Свободные алгебры других многообразий изучались в работах Пчелинцева [171—173], Роомельди [185] и Шестакова [268].

*ГЛАВА 14*

# РАДИКАЛЫ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Мы ранее уже касались обсуждающегося в этой главе вопроса. Так, в § 4.5 изучался локально нильпотентный радикал в йордановых алгебрах; кроме того, ряд общих результатов о радикалах из главы 8 применим к радикалам йордановых алгебр

В этой главе вводятся и изучаются еще два радикала в классе йордановых алгебр, а также исследуются вопросы наследственности радикалов.

Как всегда при рассмотрении йордановых Ф-алгебр, мы предполагаем, что $1/2 \in \Phi$.

## § 1. Радикал Маккриммона

Элемент $z$ йордановой алгебры $J$ называется *абсолютным делителем нуля*, если $JU_z = (0)$, т. е. если $U_z$ — нулевой оператор. Если 0 является единственным абсолютным делителем нуля в $J$, алгебра $J$ называется *невырожденной*. Через $\mathfrak{Z}(J)$ будем обозначать идеал йордановой алгебры $J$, порожденный всеми ее абсолютными делителями нуля. Очевидно, что алгебра $J$ невырождена тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Z}(J) = (0)$.

Пусть $I$ — тривиальный идеал алгебры $J$. Тогда для любых элементов $x \in J$ и $z \in I$ имеем

$$xU_z = 2(xz)z - xz^2 = 0,$$

т. е. каждый элемент идеала $I$ является абсолютным делителем нуля в $J$ и, в частности, $I \subseteq \mathfrak{Z}(J)$. Следовательно, невырожденность алгебры $J$ влечет ее полупервичность. Верно ли обратное, неизвестно. Неизвестно даже, будет ли идеал $\mathfrak{Z}(J)$ локально нильпотентным. Известно лишь, что $\mathfrak{Z}(J)$ — ниль-идеал.

Таким образом, класс невырожденных йордановых алгебр — широкий подкласс класса полупервичных йор-

дановых алгебр. Естественность этого класса подтверждается тем, что он является полупростым классом некоторого радикала, к построению которого мы сейчас приступим.

Лемма 1. *Пусть $J$ — йорданова алгебра и $J^{\#}$ — алгебра, полученная формальным присоединением к $J$ единицы 1. Тогда если $z$ — абсолютный делитель нуля в $J$ и $x \in J^{\#}$, то $zU_x$ — также абсолютный делитель нуля в $J$.*

Доказательство. Так как $J^{\#}$ — йорданова алгебра, тождество Макдональда в ней справедливо. Поэтому для любого элемента $a \in J$

$$aU(zU_x) = aU_xU_zU_x = 0,$$

так как $aU_x \in J$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Идеал $\mathfrak{Z}(J)$ порождается абсолютными делителями нуля как $\Phi$-модуль.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для любого абсолютного делителя нуля $z$ и любого элемента $x \in J$

$$2zx = zU_{1+x} - zU_x - z,$$

т. е. элемент $zx$ есть сумма трех абсолютных делителей нуля и, следовательно, лежит в подмодуле, порожденном абсолютными делителями нуля. Это означает, что указанный подмодуль является идеалом. Лемма доказана.

Для произвольной йордановой алгебры $J$ положим по определению $\mathcal{M}_1(J) = \mathfrak{Z}(J)$, и пусть идеал $\mathcal{M}_\alpha(J)$ уже определен для всех ординалов $\alpha$ таких, что $\alpha < \beta$. Если $\beta$ — предельный ординал, положим

$$\mathcal{M}_\beta(J) = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{M}_\alpha(J).$$

Если ординал $\beta$ не является предельным, определим $\mathcal{M}_\beta(J)$ как такой идеал, что

$$\mathcal{M}_\beta(J)/\mathcal{M}_{\beta-1}(J) = \mathfrak{Z}(J/\mathcal{M}_{\beta-1}(J)).$$

Цепочка идеалов

$$\mathcal{M}_1(J) \subseteq \mathcal{M}_2(J) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}_\alpha(J) \subseteq \ldots$$

стабилизируется на некотором ординале $\gamma$. Положим

$$\mathcal{M}(J) = \mathcal{M}_\gamma(J).$$

Предложение 1. *Фактор-алгебра $J/\mathcal{M}(J)$ невырождена и $\mathcal{M}(J)$ — наименьший идеал с этим свойством.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 8.4, и мы не будем его проводить.

Следствие. *Алгебра $J$ не отображается гомоморфно на невырожденную алгебру тогда и только тогда, когда $J = \mathcal{M}(J)$.*

Класс йордановых алгебр $J$, совпадающих со своим идеалом $\mathcal{M}(J)$, обозначим через $\mathcal{M}$.

Теорема 1. *$\mathcal{M}$ — радикальный класс.*

Доказательство. В силу следствия предложения 1 свойство (A) для класса $\mathcal{M}$ очевидно. Докажем свойство (D). Для этого достаточно показать следующее.

Лемма 3. *Пусть $I$—идеал йордановой алгебры $J$ и $x$ — абсолютный делитель нуля алгебры $I$. Тогда $J$ также обладает абсолютным делителем нуля, содержащимся в $I$.*

Доказательство. Если $JU_x = (0)$, то $x$ — абсолютный делитель нуля в $J$, и все доказано. Если же $aU_x \neq 0$ для некоторого $a \in J$, то

$$JU(aU_x) = JU_xU_aU_x = (0),$$

так как $JU_xU_a \subseteq I$, т. е. $aU_x$ — абсолютный делитель нуля в $J$. Лемма доказана.

Закончим теперь доказательство теоремы 1. Если алгебра $J$ такова, что во всяком ее гомоморфном образе имеется ненулевой $\mathcal{M}$-идеал, то в силу леммы 3 во всяком ее гомоморфном образе есть абсолютный делитель нуля, т. е. алгебра $J$ не отображается гомоморфно на невырожденную алгебру. Но это значит, что $J \in \mathcal{M}$, что доказывает условие (D) для класса $\mathcal{M}$, а следовательно, и всю теорему.

Радикал $\mathcal{M}$ называется *радикалом Маккриммона.*

Теорема 2 (Маккриммон). *Во всякой йордановой алгебре $J$ справедливы включения*

$$\mathcal{B}(J) \subseteq \mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{N}(J).$$

Доказательство. Первое включение следует из предложения 1 и предложения 8.4 в силу того, что всякая невырожденная алгебра полупервична. Для доказательства второго достаточно показать, что $\mathcal{Z}(J)$ — ниль-идеал; в этом случае очевидной индукцией доказы-

вается, что все идеалы $\mathcal{M}_\beta(J)$ являются ниль-идеалами. Так как всякий элемент из $\mathfrak{Z}(J)$ имеет вид $z_1 + \ldots + z_n$, где $z_i$ — абсолютные делители нуля, утверждение можно доказывать индукцией по $n$. Основание индукции очевидно: $z_1^3 = z_1 U_{z_1} = 0$. Для доказательства индуктивного перехода достаточно показать, что для любого нильпотентного элемента $y \in J$ и любого абсолютного делителя нуля $z$ элемент $y + z$ также нильпотентен. Рассмотрим подалгебру $J_0$ в $J$, порожденную элементами $y$ и $z$. По теореме Ширшова она специальна и имеет ассоциативную обертывающую алгебру $A_0$. Вычисляя в алгебре $A_0$, имеем

$$(y+z)^k = y^k + \sum_{i=0}^{k-1} y^i z y^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-2} y^i z^2 y^{k-i-2},$$

поэтому, если $m$ — индекс нильпотентности элемента $y$, то $(y + z)^{2m+1} = 0$. Теорема доказана.

Уместно заметить здесь, что факт радикальности класса $\mathscr{B}$ в классе йордановых алгебр и не доказан, и не опровергнут до сих пор.

Перейдем к изучению радикала Маккриммона специальных алгебр.

Теорема 3 (Слинько). *Если специальная йорданова алгебра $J$ порождается конечным числом элементов, каждый из которых является абсолютным делителем нуля, то ее ассоциативная обертывающая алгебра $A$ нильпотентна.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу порождающих алгебры $J$. Предположим, что теорема справедлива, если число порождающих равно $k - 1$. Пусть алгебра $J$ порождается множеством $\overline{R} = \{a_1, \ldots, a_k\}$, элементы которого суть абсолютные делители нуля. Это же множество порождает и алгебру $A$. Тот факт, что $a_i$ — абсолютный делитель нуля алгебры $J$, в переводе в ассоциативные термины означает, что

$$a_i j(a_1, \ldots, a_k)\, a_i = 0$$

для любого йорданова многочлена $j(x_1, \ldots, x_k)$.

Пусть $R = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Если $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ — некоторый многочлен из Ass $[R]$, то, как обычно, через $\overline{f}$ будем обозначать образ $f(a_1, \ldots, a_k)$ элемента $f$ при гомоморфизме, переводящем $x_i$ в $a_i$.

Пусть $l$ — максимальная длина ненулевых слов от элементов множества $\overline{R} \setminus \{a_k\}$. Так как $a_k^3 = 0$, то для любого $x_k$-неразложимого слова $\alpha$ длины более $l + 2$ имеем $\overline{\alpha} = 0$. Если $x_k$-неразложимое слово $\alpha$ имеет степень $>2$ по $x_k$, то также $\overline{\alpha} = 0$. Обозначим через $T_0$ множество всех $x_k$-неразложимых слов длины $\leqslant l + 2$ степени $\leqslant 2$ по $x_k$.

Рассмотрим слово $\alpha$ длины $(k + 2)(l + 2)$. Предположим, что $\overline{\alpha} \neq 0$. Тогда $\alpha = \beta_1\gamma\beta_2$, где $\beta_1$ не содержит $x_k$ и имеет длину $\leqslant l$, $\beta_2$ содержит только $x_k$ и имеет длину $\leqslant 2$, а $\gamma$ есть $T_0$-слово, причем $T_0$-длина его $\geqslant k + 1$. Следовательно,

$$\gamma = t_1 t_2 \ \ldots \ t_k x_k \gamma',$$

где $t_i \in T_0$. Заметим, что «хвост» каждого $x_k$-неразложимого слова $t_i$ имеет длину $\geqslant 2$; в противном случае $\overline{\gamma} = 0$. Значит,

$$\gamma = t_1' x_{i_1} t_2' x_{i_2} \ldots t_k' x_{i_k} x_k \gamma',$$

$t_1', \ldots, t_k' \in T_0$, а элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ отличны от $x_k$, и, следовательно, среди них есть два одинаковых. Между любыми двумя элементами множества $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ находится $T$-слово, которое по лемме 5.9 является особым; в частности, особое слово находится между двумя одинаковыми элементами этого множества.

Мы доказали, что всякое слово $\alpha$ такое, что $\overline{\alpha} \neq 0$, длины $(k + 2)(l + 2)$ содержит подслово вида $x_i \delta x_i$, где $\delta$ — особое слово. Пусть $j_\delta$ — однородный йорданов многочлен, старшим словом которого является $\delta$. Ввиду того, что $\overline{x_i j_\delta x_i} = 0$, мы имеем

$$\overline{x_i \delta x_i} = \sum_n \varphi_n \overline{x_i \delta_n x_i},$$

где слова $\delta_n$ имеют тот же тип, что и $\delta$, но лексикографически меньше $\delta$. Следовательно, если $\overline{\alpha} \neq 0$, то $\overline{\alpha}$ представляется в виде линейной комбинации образов слов того же типа, но лексикографически меньших. Получили противоречие с тем, что слов фиксированного типа в алфавите $R$ конечное число. Следовательно, $\overline{\alpha} = 0$ для всякого слова $\alpha$ длины $(k + 2)(l + 2)$, т. е. $A$ нильпотентна индекса не выше $(k + 2)(l + 2)$.

Теорема доказана.

Теорема 4 (Слинько-Скосырский). *Во всякой специальной йордановой алгебре $J$ имеет место включение*

$$\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{L}(J).$$

Доказательство. Так как идеал $\mathcal{Z}(J)$ является Ф-модулем, порожденным всеми абсолютными делителями нуля, теорема 3 влечет его локальную нильпотентность во всякой специальной алгебре $J$. Рассмотрим фактор-алгебру $\overline{J} = J/\mathcal{L}(J)$. По следствию теоремы 4.5 она специальна и, следовательно, $\mathcal{Z}(\overline{J}) = (\overline{0})$. Но тогда и $\mathcal{M}(\overline{J}) = (\overline{0})$. Это означает, что $\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{L}(J)$, что и требовалось доказать.

Неизвестно, справедливо ли включение $\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{L}(J)$ в общем случае. Этот вопрос тесно связан с проблемой Ширшова о йордановых ниль-алгебрах ограниченного индекса (см. упражнение 1).

### Упражнения

1. Доказать, что всякая йорданова ниль-алгебра $J$ ограниченного индекса является $\mathcal{M}$-радикальной.

Указание. Если в алгебре $J$ справедливо тождество $x^n = 0$, то для всякого $x \in J$ элемент $x^{n-1}$ является абсолютным делителем нуля.

На протяжении следующих трех упражнений $A$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ и $H = H(A, *)$ — йорданова алгебра симметричных относительно $*$ элементов алгебры $A$.

2. Доказать, что $\mathcal{B}(A) \cap H \subseteq \mathcal{B}(H)$.

Указание. Индукцией по $\alpha$ доказать, что $\mathcal{B}_\alpha(A) \cap H \subseteq \mathcal{B}(H)$ для любого ординала $\alpha$.

3. Доказать, что если $a \in H$ и $aHa \subseteq \mathcal{B}(A)$, то $a \in \mathcal{B}(A)$.

4 (Эриксон — Монтгомери). Доказать, что $\mathcal{B}(H) = \mathcal{M}(H) = \mathcal{B}(A) \cap H$.

## § 2. Обратимые элементы, изотопия и гомотопия

Пусть $J$ — йорданова алгебра с единицей 1. Элемент $x \in J$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $y \in J$, что

$$xy = 1, \quad x^2y = x.$$

В этом случае элемент $y$ называется *обратным элементом* к элементу $x$.

На первый взгляд может показаться, что в приведенном определении $x$ и $y$ неравноправны, однако это не так.

Лемма 4. *Следующие условия для элементов $x, y \in J$ эквивалентны*:

а) *$x$ обратим с обратным $y$*;

б) *$y$ обратим с обратным $x$*;

в) $yU_x = x$, $y^2U_x = 1$.

Доказательство будет проведено по схеме а) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ б). Этим эквивалентность условий а), б), в) будет доказана, так как импликации а) $\Rightarrow$ б) и б) $\Rightarrow$ а) равносильны.

а) $\Rightarrow$ в). Прежде всего заметим, что $yU_x = 2(yx)x - yx^2 = 2x - x = x$. Далее, в силу (3.27) для элементов $x$ и $y$ справедливы соотношения

$$[R_{x^2}, R_y] = [R_{y^2}, R_x] = 0, \tag{1}$$

откуда $y^2U_x = 2(y^2x)x - y^2x^2 = y^2x^2 = y(yx^2) = yx = 1$. Это доказывает в).

в) $\Rightarrow$ б). В силу тождества Макдональда (3.48) имеем

$$U(y^2U_x) = U_xU(y^2)U_x = E,$$

и, следовательно, оператор $U_x$ обратим. Заметим теперь, что $[R_x, U_x] = 0$, и потому

$$(1 - yx)U_x = x^2 - (yU_x)x = x^2 - x^2 = 0,$$

$$(y - y^2x)U_x = yU_x - (y^2U_x)x = x - x = 0.$$

В силу обратимости оператора $U_x$ имеем $yx = 1$, $y^2x = y$, т. е. б) доказано.

Соотношения из пункта в) леммы 4 иногда берут в качестве определения обратимости.

Лемма 5. *Следующие условия для элемента $x \in J$ эквивалентны*: а) *$x$ обратим*, б) $1 \in JU_x$, в) *$U_x$ — обратимый оператор*.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) следует из леммы 4. Импликация б) $\Rightarrow$ в) тоже по существу была доказана. Если $1 = zU_x$, то по тождеству Макдональда $E = U_1 = U_xU_zU_x$, откуда следует обратимость оператора $U_x$.

в) $\Rightarrow$ а). Рассмотрим элемент $y = xU_x^{-1}$. Тогда $(1 - yx)U_x = x^2 - yR_xU_x = x^2 - yU_xR_x = x^2 - x^2 = 0$

и $(x - yx^2)\, U_x = x^3 - yR_{x^2}U_x = x^3 - yU_xR_{x^2} = x^3 - x^3 = 0$, что, ввиду обратимости оператора $U_x$, дает нам $yx = 1$, $yx^2 = x$.

Эквивалентность условий а), б), в) доказана.

Лемма 6. *Элементы $x, z \in J$ обратимы тогда и только тогда, когда $\{xzx\}$ — обратимый элемент.*

Доказательство. По тождеству Макдональда $U(\{xzx\}) = U_xU_zU_x$. Линейное преобразование $U_xU_zU_x$ обратимо в том и только в том случае, когда обратимы операторы $U_x$ и $U_z$. Поэтому справедливость леммы 6 вытекает из леммы 5.

Пусть элемент $x \in J$ обратим с обратным элементом $y$. Тогда $xU_y = y$ и по тождеству Макдональда $U_y = U_yU_xU_y$, но так как оператор $U_y$ обратим, на него можно сократить. Получим

$$U_xU_y = U_yU_x = E. \tag{2}$$

Оператор $R_x$ коммутирует с оператором $U_x$, следовательно, он коммутирует и с обратным к $U_x$ элементом, поэтому

$$[R_x, U_y] = 0. \tag{3}$$

В силу (1) это эквивалентно тому, что

$$[R_x, R_y^2] = 0. \tag{4}$$

Подставляя теперь в соотношение (3.25) вместо $y$ элемент $x$, а вместо $z$ и $t$ элемент $y$, будем иметь $R_xR_y^2 + R_y^2R_x + R_y = R_xR_{y^2} + R_y + R_y$, что в силу (4) эквивалентно соотношению $2R_xR_y^2 - R_xR_{y^2} = R_y$ или, что то же самое,

$$R_y = R_xU_y. \tag{5}$$

Это соотношение вместе с (3) влечет

$$[R_x, R_y] = 0. \tag{6}$$

Пусть $H$ — подалгебра алгебры $J$, порожденная элементами $x$ и $y$. Как следует из предложения 3.2, алгебра $R^J(H)$ порождается операторами $R_x$, $R_{x^2}$, $R_y$, $R_{y^2}$. Так как $R_{x^2} = 2R_x^2 - U_x$, то алгебра $R^J(H)$ порождается также элементами $R_x$, $U_x$, $R_y$, $U_y$. Однако в силу (2), (3), (6) эти операторы коммутируют. Следовательно, алгебра $R^J(H)$ коммутативна, что эквивалентно сильной ассоциативности подалгебры $H$ в $J$.

Отметим теперь, что обратимый элемент $x \in J$ имеет единственный обратный, так как $yU_x = x$ и $y'U_x = x$ влечет $y = y'$ в силу обратимости оператора $U_x$. Этот единственный обратный элемент будем обозначать $x^{-1}$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Для всякого обратимого элемента $x$ йордановой алгебры $J$ подалгебра, порожденная элементами $x$ и $x^{-1}$, является сильно ассоциативной.*

Если положить $x^{-n} = (x^{-1})^n$, то степени элемента $x$ будут умножаться по обычной формуле

$$x^k x^m = x^{k+m}.$$

Заметим, что эти соотношения были бы несправедливы, если бы мы в определении обратимости ограничились одним соотношением $xy = 1$. Другим преимуществом такого определения является справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Элемент $a$ ассоциативной алгебры $A$ с единицей 1 обратим тогда и только тогда, когда он обратим в йордановой алгебре $A^{(+)}$; при этом обратные элементы в $A$ и $A^{(+)}$ к элементу $a$ совпадают.*

Доказательство. Если $ab = 1 = ba$, то $a \odot b = 1$ и $a^2 \odot b = a$, т. е. если $a$ обратим в $A$, то он обратим и в $A^{(+)}$.

Если же $a$ обратим в $A^{(+)}$ с обратным $b$, то $1 = b^2 U_a = ab^2 a = -abab + 2ab\,(a \odot b) = -(bU_a)\,b + 2ab = -ab + 2ab = ab$. Аналогично, $ba = 1$ и $a$ обратим в $A$ с обратным $b$.

Предложение доказано.

Йорданова алгебра, в которой каждый ненулевой элемент обратим, называется *йордановой алгеброй с делением*. Большое число примеров йордановых алгебр с делением можно получить с помощью предложения 2: в силу этого предложения, если $A$ — ассоциативная алгебра с делением, то $A^{(+)}$ — йорданова алгебра с делением. В частности, если $\boldsymbol{Q}$ — тело кватернионов над полем действительных чисел, то $\boldsymbol{Q}^{(+)}$ — йорданова алгебра с делением. Отметим, что в $\boldsymbol{Q}^{(+)}$ некоторые кватернионы являются в обычном смысле делителями нуля, например, $i \odot j = 0$. В частности, это означает, что оператор $R_x$ может не являться обратимым, если элемент $x$ обратим.

Имеются принадлежащие Алберту примеры исключительных йордановых алгебр с делением. Для всякой алгебры $J$, из числа указанных Албертом, центр ее $F = Z(J)$ является полем и $\overline{F} \otimes_F J \cong H(C_3)$, где $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание поля $F$, а $C$ — алгебра Кэли — Диксона над $\overline{F}$. В частности, размерность алгебры $J$ над центром $F$ равна 27. Существует гипотеза, что этому числу равна размерность всякой исключительной алгебры с делением над своим центром.

Рассмотрим теперь понятие гомотопии.

Пусть $J$ — йорданова алгебра и $a \in J$. Определим на аддитивном Ф-модуле алгебры $J$ новую операцию умножения формулой

$$x \cdot_a y = \{xay\}.$$

Обозначим полученную алгебру через $J^{(a)}$ и назовем ее *a-гомотопом* алгебры $J$. В силу следствия 2 теоремы Ширшова во всякой йордановой алгебре справедливо тождество

$$\{\{\{xax\}\,ay\}\,ax\} = \{\{xax\}\,a\,\{yax\}\}.$$

Но это значит, что $((x \cdot_a x) \cdot_a y) \cdot_a x = (x \cdot_a x) \cdot_a (y \cdot_a x)$, т. е. $J^{(a)}$—йорданова алгебра.

Допустим теперь, что $J$ специальна и что $A$ — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Рассмотрим ассоциативную алгебру $A^{(a)}$, представляющую из себя Ф-модуль алгебры $A$ с умножением $x \times_a y = xay$. Ввиду того, что $x \cdot_a y = \{xay\} = {}^1/_2\,(xay + yax) = {}^1/_2\,(x \times_a y + y \times_a x)$, мы имеем равенство

$$(A^{(+)})^{(a)} = (A^{(a)})^{(+)}.$$

Следовательно, гомотоп $J^{(a)}$ алгебры $J$ есть подалгебра в $(A^{(a)})^{(+)}$ и потому является специальной алгеброй.

Если алгебра $J$ содержит единицу 1 и $a$ — обратимый элемент в $J$, то в этом случае $a$-гомотоп $J^{(a)}$ называется *a-изотопом*. В силу теоремы 5 $x \cdot_a a^{-1} = \{xaa^{-1}\} = (xa)\,a^{-1} + (a^{-1}a)\,x - (xa^{-1})\,a = x$. Следовательно, элемент $a^{-1}$ является единицей в изотопе $J^{(a)}$.

Лемма 7. *Для любых $a, b \in J$*

$$(J^{(a)})^{(b)} = J^{(\{aba\})}.$$

*Изотопия является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что $b$-гомотоп $a$-гомотопа алгебры $J$ есть ее $\{aba\}$-гомотоп, надо доказать тождество

$$\{x\ \{aba\}\ y\} = \{\{xab\}\ ay\} + \{\{yab\}\ ax\} - \{\{xay\}\ ab\}. \quad (7)$$

Это тождество является линеаризацией тождества

$$\{x\ \{aba\}\ x\} = 2\ \{\{xab\}\ ax\} - \{\{xax\}\ ab\}, \quad (8)$$

которое справедливо в силу следствия 2 теоремы Ширшова, так как оно от трех переменных и линейно по $b$.

Транзитивность отношения изотопии следует из доказанной формулы и леммы 6, в силу которой элемент $\{aba\}$ является обратимым, если $a$ и $b$ обратимы. Кроме того,

$$(J^{(a)})^{(a^{-2})} = J^{(\{aa^{-2}a\})} = J,$$

и это отношение симметрично. Следовательно, оно является отношением эквивалентности.

Следствие. *Изотоп $J^{(a)}$ йордановой алгебры $J$ специален тогда и только тогда, когда алгебра $J$ специальна.*

Пусть $D$ — алгебра с инволюцией $d \mapsto \bar{d}$ и $A = \mathrm{diag}\ \{a_1, \ldots, a_n\}$ — диагональная обратимая матрица с симметричными элементами по диагонали, лежащими в ассоциативном центре $N(D)$ алгебры $D$. Рассмотрим алгебру матриц $D_n$. Отображение

$$S_A\colon X \mapsto A^{-1}\bar{X}^t A$$

является, как легко видеть, инволюцией в $D_n$. Через $H(D_n, S_A)$ обозначим алгебру симметричных относительно $S_A$ элементов алгебры $D_n$. Алгебру $H(D_n, S_E)$, где $E$ — единичная матрица, будем обозначать через $H(D_n)$.

Теорема 6. *Пусть $H(D_n)$ — йорданова алгебра. Тогда отображение $\varphi$: $X \mapsto XA$ является изоморфизмом изотопа $H(D_n)^{(A)}$ алгебры $H(D_n)$ на алгебру $H(D_n, S_A)$.*

Доказательство. Легко видеть, что $A \in N(D_n)$, поэтому если $X \in H(D_n)$, то $XA \in H(D_n, S_A)$, так как

$$(XA)^{S_A} = A^{-1}(\overline{XA})^t A = A^{-1}A\bar{X}^t A = XA.$$

Далее, $\varphi(X \odot_A Y) = {}^1/_2\,(XAY + YAX)\,A = {}^1/_2\,[(XA)(YA) + (YA)(XA)] = XA \odot YA = \varphi(X) \odot \varphi(Y)$, т. е. $\varphi$ — гомоморфизм. Так как матрица $A$ обратима, то $\varphi$ — изоморфизм, и теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть* $C$ — *алгебра Кэли — Диксона над полем* $F$ *и* $A = \mathrm{diag}\,\{a_1, a_2, a_3\}$, *где* $a_i \in F$. *Тогда* $H(C_3, S_A)$ — *исключительная йорданова алгебра.*

**Упражнения**

1. Пусть элемент $z$ йордановой алгебры $J$ с единицей 1 нильпотентен. Доказать, что в алгебре $J$ найдется обратимый элемент $u$, лежащий в подалгебре, порожденной 1 и $z$, такой, что $u^2 = 1 - z$.

2 (М а к к р и м м о н). Пусть $J$ — йорданова алгебра с единицей 1 над полем $F$ характеристики $\neq 2$, каждый элемент которой имеет вид $\alpha \cdot 1 + z$, где $\alpha \in F$ и $z$ — нильпотентный элемент. Доказать, что множество нильпотентных элементов алгебры $J$ является идеалом.

Осборн [163] доказал несколько более общий факт, а именно: если в йордановой алгебре $J$ с единицей всякий элемент либо обратим, либо нильпотентен, то множество нильпотентных элементов этой алгебры образует идеал.

## § 3. Квазирегулярный радикал

В классе ассоциативных и в классе альтернативных алгебр квазирегулярный радикал — единственный радикал, у которого и радикальный и полупростой класс удовлетворительно описаны. Естественно ожидать, что соответствующий аналог этого радикала в классе йордановых алгебр тоже будет обладать хорошими свойствами. Квазирегулярный радикал в классе йордановых алгебр был построен Маккриммоном в 1969 г. [124] и действительно обладает рядом хороших свойств. Тем не менее о полупростом классе этого радикала до сих пор ничего не известно. Недавно Осборн [165] установил, что квазирегулярный радикал йордановой алгебры может не совпадать с пересечением ядер неприводимых представлений этой алгебры, однако надежды на хорошее описание полупростого класса квазирегулярного радикала все равно остаются.

Элемент $a$ йордановой алгебры $J$ называется *квазирегулярным*, если существует такой элемент $b \in J$, что в алгебре $J^{\#} = \Phi \cdot 1 + J$, полученной формальным присоединением к $J$ единицы, элемент $1 - a$ обратим с обратным элементом $1 - b$. Элемент $b$ называется *квазиобратным* к элементу $a$. Так как у обратимого элемента йордановой алгебры имеется только один обратный элемент, то и у квазирегулярного элемента квазиобратный также единствен.

Теорема 7. *Следующие условия для элементов $a$ и $b$ йордановой алгебры $J$ эквивалентны:*

а) *$a$ квазирегулярен с квазиобратным $b$;*

б) *$b$ квазирегулярен с квазиобратным $a$;*

в) *справедливы соотношения*

$$\begin{cases} a+b-ab=0, \\ (a,\ a,\ b)=0; \end{cases}$$

г) *справедливо соотношение*

$$a+b-ab=0$$

*и подалгебра, порожденная элементами $a$ и $b$, сильно ассоциативна.*

Доказательство. Эквивалентность а) $\Longleftrightarrow$ б) следует из леммы 4.

а) $\Longleftrightarrow$ в). Распишем соотношения $(1-a)(1-b)=1$ и $(1-a)^2(1-b)=1-a$. Получим соотношения

$$\begin{aligned} a+b-ab&=0, \\ -a-b+a^2+2ab-a^2b&=0. \end{aligned}$$

Преобразовав второе соотношение дважды с помощью первого, получим $0=-a-b+a^2+2ab-a^2b=a^2+ab-a^2b=$ $=a(a+b)-a^2b=a(ab)-a^2b=-(a,\ a,\ b)$. Таким образом, эквивалентность условий а) и в) доказана.

а) $\Rightarrow$ г). Так как сильная ассоциативность подалгебры $A$, порожденной элементами $a$ и $b$, эквивалентна коммутативности алгебры $R^J(A)$, достаточно доказать, что некоторая система порождающих алгебры $R^J(A)$ состоит из попарно коммутирующих элементов. В силу предложения 3.2 и того, что $ab=a+b$, множество $\{R_a,\ R_b,\ R_{a^2},\ R_{b^2}\}$ порождает $R^J(A)$. По теореме 5 подалгебра, порожденная элементами $1-a$ и $1-b$, является сильно ассоциативной, поэтому

$$\begin{aligned} &[R_a,\ R_b]=[R_{1-a},\ R_{1-b}]=0, \\ &[R_a,\ R_{b^2}]=-[R_{1-a},\ R_{(1-b)^2}]-2[R_a,\ R_b]=0. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$[R_{a^2},\ R_b]=0.$$

Далее,

$$[R_{a^2}, R_{b^2}] = [R_{(1-a)^2}, R_{(1-b)^2}] + 2[R_a, R_{b^2}] + \\ + 2[R_{a^2}, R_b] - 4[R_a, R_b] = 0.$$

Мы доказали, что элементы множества $\{R_a, R_b, R_{a^2}, R_{b^2}\}$ попарно коммутируют. Следовательно, алгебра $R^J(A)$ коммутативна, а это значит, что подалгебра $A$ сильно ассоциативна.

Импликация г) $\Rightarrow$ в) очевидна.

Теорема доказана.

Следствие. *Если в алгебре $J$ имеется единица 1, то элемент $a$ квазирегулярен с квазиобратным элементом $b$ тогда и только тогда, когда $1 - a$ обратим с обратным $1 - b$.*

Это следует, например, из пункта в) теоремы 7.

Алгебра называется *квазирегулярной*, если каждый ее элемент квазирегулярен. Идеал называется *квазирегулярным*, если он квазирегулярен как алгебра.

Предложение 3. *Пусть $I$ — идеал алгебры $J$ и $a$ — квазирегулярный элемент с квазиобратным элементом $b$. Тогда, если $a \in I$, то и $b \in I$. Всякий идеал квазирегулярной алгебры квазирегулярен.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, ввиду теоремы 7, в). Второе же следует из первого.

Лемма 8. *Пусть элемент $a$ принадлежит к квазирегулярному идеалу $I$ алгебры $J$ и $u$ — обратимый элемент в $J^{\#}$. Тогда элемент $u - a$ также обратим.*

Доказательство. По лемме 6 элемент $u - a$ обратим тогда и только тогда, когда $\{(u - a) 1 (u - a)\} = (u-a)^2$ обратим. Обратимость элемента $(u - a)^2$ эквивалентна обратимости элемента $(u - a)^2 U_{u^{-1}}$. Рассмотрим этот элемент. Имеем

$$(u - a)^2 U_{u^{-1}} = (u^2 - 2au + a^2) U_{u^{-1}} = 1 - a',$$

где элемент $a' = (2au - a^2) U_{u^{-1}}$ принадлежит $I$. Поэтому элемент $(u - a)^2 U_{u^{-1}}$ обратим, а вместе с ним и элемент $u - a$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Сумма двух квазирегулярных идеалов есть квазирегулярный идеал.*

Доказательство. Пусть $K$ и $L$ — квазирегулярные идеалы алгебры $J$. Рассмотрим произвольный

элемент $a = k + l$ идеала $K + L$ и докажем, что он квазирегулярен. Действительно, $1 - a = (1 - k) - l$, элемент $l$ принадлежит к квазирегулярному идеалу $L$, а элемент $1 - k$ обратим. По лемме 8 элемент $1 - a$ также обратим, но это и означает квазирегулярность элемента $a$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть* $\varphi$: $J \to J/I$ — *некоторый гомоморфизм алгебры* $J$, $a \in J$ *и* $\bar{a}$ — *образ элемента* $a$ *при гомоморфизме* $\varphi$. *Тогда, если* $a$ *квазирегулярен, то и* $\bar{a}$ *тоже. Если* $\bar{a}$ *квазирегулярен и* $I$ — *квазирегулярный идеал, то* $a$ *квазирегулярен.*

Доказательство. Если $a$ квазирегулярен с квазиобратным $b$, то $\bar{a}$ будет, очевидно, квазирегулярным с квазиобратным $\bar{b} = \varphi(b)$.

Пусть теперь $\bar{a}$ имеет квазиобратный элемент $\bar{c}$ и $I$ — квазирегулярный идеал в $J$. Множество $I$ будет идеалом и в $J^{\#}$. В фактор-алгебре $\bar{J}^{\#} = J^{\#}/I$ имеем соотношение $(\bar{1} - \bar{c})^2 U_{\bar{1}-\bar{a}} = \bar{1}$ и, переходя к прообразам, получим $(1 - c)^2 U_{1-a} = 1 - x$, где $x \in I$. Так как $I$ квазирегулярен, то $1 - x$ — обратимый элемент, и в силу леммы 6 элемент $1 - a$ также обратим. Следовательно, $a$ квазирегулярен, и лемма доказана.

Пусть теперь $J$ — произвольная йорданова алгебра. Обозначим через $\mathcal{Y}(J)$ сумму всех квазирегулярных идеалов алгебры $J$. Ввиду леммы 9, этот идеал будет квазирегулярным. Кроме того, по лемме 10 фактор-алгебра $J/\mathcal{Y}(J)$ не содержит ненулевых квазирегулярных идеалов. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 8 (Маккриммон). *Класс* $\mathcal{Y}$ *квазирегулярных йордановых алгебр радикален.*

Обратимся к свойствам этого радикала.

Предложение 4. $\mathcal{Y}(J) = J \cap \mathcal{Y}(J^{\#})$.

Доказательство. Включение $\mathcal{Y}(J) \subseteq J \cap \mathcal{Y}(J^{\#})$ верно, так как $\mathcal{Y}(J)$ — радикальный идеал алгебры $J^{\#}$. Обратное включение также справедливо в силу следствия к теореме 7. Предложение доказано.

Предложение 5. *Если для некоторого* $n \geqslant 1$ *элемент* $a^n$ *квазирегулярен, то и* $a$ *квазирегулярен.*

Доказательство. Элемент $a$ квазирегулярен в $J$ тогда и только тогда, когда $1 - a$ обратим в $J^{\#}$, а это в свою очередь по лемме 5 эквивалентно обратимости оператора $U_{1-a}$. Аналогично, $a^n$ квазиобратим в том и только в том случае, когда $U_{1-a^n}$ обратим. Однако по теореме Ширшова

$$U_{1-a^n} = U_{1-a}U_{1+a+\ldots+a^{n-1}} = U_{1+a+\ldots+a^{n-1}}U_{1-a},$$

откуда следует, что обратимость оператора $U_{1-a^n}$ влечет обратимость оператора $U_{1-a}$. В силу вышесказанного это означает, что квазирегулярность элемента $a^n$ влечет квазирегулярность элемента $a$.

Предложение доказано.

Если элемент $a$ нильпотентен, то $a^n = 0$ для некоторого $n$. Так как 0 — квазирегулярный элемент, то по доказанному $a$ квазирегулярен.

Заметим, что утверждение, обратное к предложению 5, неверно. Так, $-1$ есть квазирегулярный элемент, так как $(-1) + {}^1/_2 = (-1)\cdot{}^1/_2$, но $(-1)^2 = 1$ квазирегулярным элементом не является.

Элемент $a$ йордановой алгебры $J$ называется *регулярным в смысле фон Неймана*, если $a = xU_a$ для некоторого $x \in J$.

Теорема 9 (Маккриммон). *Если $a$ — регулярный в смысле фон Неймана элемент йордановой алгебры $J$ и $a \in \mathcal{J}(J)$, то $a = 0$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $a \in \mathcal{J}(J)$ и $a = uU_a$, где $u$ — обратимый элемент из $J^{\#}$. Тогда по лемме 8 элемент $v = u - aU_u$ обратим, и, следовательно, по лемме 5 обратимым должен быть и оператор $U_v$. Рассмотрим элемент $aU_v$. Мы имеем

$$\begin{aligned}aU_v = a\,(U_u - 2U\,(u,\ aU_u) + U\,(aU_u)) &= \\ = aU_u - 2\,\{ua\,\{uau\}\} + aU\,(aU_u) &= \\ = aU_u - 2\,\{u\,\{aua\}\,u\} + aU\,(aU_u) &= \\ = aU_u - 2aU_u + aU_u &= 0,\end{aligned}$$

так как по тождеству Макдональда

$$\begin{aligned}aU\,(aU_u) = aU_uU_aU_u = uU_aU_uU_aU_u &= \\ = u\,U\,(uU_a)\,U_u = uU_aU_u &= aU_u.\end{aligned}$$

Так как $aU_v = 0$ и элемент $v$ обратим, то $a = 0$. В этом случае теорема доказана.

Пусть теперь $a = xU_a$, где $x$ — произвольный элемент из $J^{\#}$. Имеем

$$a = xU_a = xU(xU_a) = xU_aU_xU_a = x'U_a,$$

где $x' = xU_aU_x \in \mathcal{Y}(J)$. Поэтому можно считать, что $x \in \mathcal{Y}(J)$. Далее, по тождеству (3.47) получаем

$$a^2 = (xU_a)^2 = a^2U_xU_a = yU_a,$$

где $y = a^2U_x \in \mathcal{Y}(J)$. Рассмотрим теперь обратимый элемент $u = 1 - (y - x)$ и применим к нему оператор $U_a$. Получим

$$uU_a = (1 + x - y)\, U_a = a^2 + a - a^2 = a,$$

т. е. $uU_a = a$. Но этот случай разобран выше. Отсюда следует, что $a = 0$.

Теорема доказана.

Следствие. *Радикал $\mathcal{Y}(J)$ не содержит идемпотентов.*

Теорема 10. *Если $\Phi$ — поле, то всякий алгебраический над $\Phi$ элемент алгебры $J$, содержащийся в $\mathcal{Y}(J)$, является нильпотентным.*

Доказательство. Пусть $a$ — алгебраический элемент и $a \in \mathcal{Y}(J)$. Тогда $J_0 = \Phi[a]$ — конечномерная ассоциативная подалгебра в $J$. Рассмотрим цепочку подпространств

$$J_0 \supseteq aJ_0a \supseteq a^2J_0a^2 \supseteq \ldots$$

Ввиду конечномерности подалгебры $J_0$, найдется такое число $n$, что $a^nJ_0a^n = \ldots = a^{2n+1}J_0a^{2n+1}$. Но тогда для некоторого $x \in J_0$ будем иметь

$$a^{2n+1} = a^{2n+1}xa^{2n+1} = xU_{a^{2n+1}},$$

откуда по теореме 9 $a^{2n+1} = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Во всякой конечномерной йордановой алгебре $J$ над полем $\Phi$ радикал $\mathcal{Y}(J)$ является ниль-идеалом.*

Хорошо известно, что радикал Джекобсона ассоциативной алгебры $A$ состоит в точности из *собственно квазирегулярных элементов*, т. е. таких элементов $z \in A$, для

которых все элементы $az$ (или все $za$) квазирегулярны. Переформулируем условие собственной квазирегулярности в других терминах.

Предложение 6 (Маккриммон). *Элемент $az$ ассоциативной алгебры $A$ квазирегулярен тогда и только тогда, когда элемент $z$ квазирегулярен в гомотопе $A^{(a)}$. Элемент $z$ собственно квазирегулярен тогда и только тогда, когда он квазирегулярен в каждом гомотопе алгебры $A$.*

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю.

Назовем элемент йордановой алгебры $J$ *собственно квазирегулярным*, если он квазирегулярен в любом гомотопе алгебры $J$. Маккриммон доказал, что квазирегулярный радикал $\mathcal{Y}(J)$ йордановой алгебры $J$ есть в точности множество PQI $(J)$ всех ее собственно квазирегулярных элементов. Доказательству этой характеризации квазирегулярного радикала мы и посвятим остаток параграфа.

Определим в алгебре умножений йордановой алгебры еще один оператор:

$$xV_{y,z} = \{xyz\} = x(R_yR_z - R_zR_y + R_{yz}).$$

Операторы в алгебре умножений гомотопа $J^{(a)}$ будут обозначаться $R_x^{(a)}$, $U_x^{(a)}$, $V_{x,y}^{(a)}$. Операция возведения в квадрат в гомотопе $J^{(a)}$ обозначается $x^{2(a)}$; единица гомотопа $J^{(a)}$ — через $1^{(a)}$. Из определений вытекает, что

$$x^{2(a)} = aU_x, \qquad R_x^{(a)} = V_{a,x}. \tag{9}$$

Кроме того, в силу тождеств (7) и (8)

$$V_{x,y}^{(a)} = V_{xU_a,y}, \qquad U_x^{(a)} = U_aU_x. \tag{10}$$

Отметим, что в силу леммы 5 обратимость элемента $1 - x$ в йордановой алгебре $J^{\#}$ эквивалентна обратимости оператора

$$U_{1-x} = E - 2R_x + U_x. \tag{11}$$

На $J^{(a)}$ оператор $U_{1^{(a)}-x}^{(a)}$ действует в силу (9) и (10) как $E - 2V_{a,x} + U_aU_x$. Введем поэтому в алгебре умножений произвольной йордановой алгебры $J$ операторы

$$T_{x,y} = E - 2V_{x,y} + U_xU_y.$$

Для доказательства свойств оператора $T_{x,y}$ нам понадобится *принцип Кёхера для йордановых алгебр*. Сформулируем его в удобном для нас виде.

Принцип Кёхера. *Если неассоциативный многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль во всякой йордановой алгебре $J$ с единицей при подстановке в него любых обратимых элементов алгебры $J$, то $f$ является тождеством во всех йордановых алгебрах.*

Доказательство. Ввиду предложения 1.9, необходимо только заметить, что элементы вида $1 + x$, где $x$ нильпотентен, являются в силу предложения 5 обратимыми.

Лемма 11. *Операторы $T_{x,y}$ удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned}
&\text{а)} \quad T_{x,0} = T_{0,x} = E, \quad T_{\alpha x, y} = T_{x, \alpha y}, \quad \alpha \in \Phi;\\
&\text{б)} \quad T_{x,y} \cdot T_{-x,y} = T_{x,y} \cdot T_{x,-y} = T_{x, xU_y} = T_{yU_x, y};\\
&\text{в)} \quad T_{x,y} U_z T_{y,x} = U(zT_{y,x});\\
&\text{г)} \quad T_{x,y} \cdot T_{y,x} = E - 2R_w + U_w,
\end{aligned} \tag{12}$$

*где $w = 2xy - y^2 U_x$.*

Доказательство. Соотношение а) очевидно. Соотношения б) и г) могут быть доказаны с помощью следствия 2 теоремы Ширшова, однако в) так доказано быть не может. Применим принцип Кёхера.

Заметим, что для обратимых $x$ и $y$

$$T_{x,y} = U_x U_{x^{-1} - y} = U_{y^{-1} - x} U_y. \tag{13}$$

Действительно, в силу теоремы 5 и соотношений (3.31) и (3.31′) имеем

$$U_x U_{x^{-1}, y} = 2R_x R_y - U_{x,y} = V_{x,y},$$
$$U_{y^{-1}, x} U_y = 2R_x R_y - U_{y,x} = V_{x,y}.$$

Кроме того, в силу (2) $U_x U_{x^{-1}} = U_{x^{-1}} U_x = E$. Поэтому $U_x U_{x^{-1} - y} = U_x U_{x^{-1}} - 2U_x U_{x^{-1}, y} + U_x U_y = T_{x,y}$. Аналогично доказывается и второе равенство.

Так как в изотопе $J^{(x)}$ элемент $x^{-1}$ является единицей, соотношения (13) можно в силу (10) переписать следующим образом:

$$T_{x,y} = U^{(x)}_{1^{(x)} - y} = U_{y^{-1}} U^{(y)}_{1^{(y)} - x} U_y. \tag{14}$$

Теперь имеем

$$T_{x,y}T_{x,-y}=U^{(x)}_{1^{(x)}-y}U^{(x)}_{1^{(x)}+y}=U^{(x)}_{1^{(x)}-y^{2(x)}}=U^{(x)}_{1^{(x)}-xU_y}=T_{x,xU_y}.$$

Аналогично,

$$T_{x,y}T_{-x,y}=U_{y^{-1}}U^{(y)}_{1^{(y)}-x}U^{(y)}_{1^{(y)}+x}U_y=$$
$$=U_{y^{-1}}U^{(y)}_{1^{(y)}-x^{2(y)}}U_y=U_{y^{-1}}U^{(y)}_{1^{(y)}-yU_x}U_y=T_{yU_x,y}.$$

Равенство $T_{x,y}T_{-x,y}=T_{x,y}T_{x,-y}$ следует из того, что $T_{-x,y}=T_{x,-y}$. Итак, б) доказано.

Докажем в). В силу (13) и тождества Макдональда для обратимых элементов $x$, $y$, $z$ имеем

$$T_{x,y}U_zT_{y,x}=U_xU_{x^{-1}-y}U_zU_{x^{-1}-y}U_x=$$
$$=U(zU_{x^{-1}-y}U_x)=U(zT_{y,x}).$$

В силу принципа Кёхера в) доказано.

Соотношение г) следует из в), если положить $z=1$:

$$T_{x,y}T_{y,x}=U(1T_{y,x})=U(1-2xy+y^2U_x)=E-2R_w+U_w.$$

Лемма доказана.

Лемма 12. *Для элементов $x$, $y$ йордановой алгебры $J$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$x$ квазирегулярен в $J^{(y)}$;*

б) *$T_{y,x}$ обратим на $J$;*

в) *$T_{y,x}$ сюръективен на $J$;*

г) *$2x-yU_x$ лежит в образе $T_{y,x}$;*

д) *$2xy-y^2U_x$ лежит в образе $T_{y,x}$;*

е) *$2xy-y^2U_x$ квазирегулярен в $J$.*

*Если $z$ — квазиобратный элемент к $x$ в $J^{(y)}$, то операторы $T_{y,x}$ и $T_{y,z}$ взаимно обратны.*

Доказательство. Если $x$ квазирегулярен в $J^{(y)}$ с квазиобратным элементом $z$, то операторы $U^{(y)}_{1^{(y)}-x}$ и $U^{(y)}_{1^{(y)}-z}$ взаимно обратны на $(J^{(y)})^{\#}$. Их ограничения $T_{y,x}$ и $T_{y,z}$ на идеале $J=J^{(y)}$ также взаимно обратны. Таким образом, а) влечет б) и, кроме того, доказано заключительное утверждение леммы.

Импликации б) $\Rightarrow$ в), в) $\Rightarrow$ г) и в) $\Rightarrow$ д), очевидно, истинны. Далее,

$$1^{(y)}U^{(y)}_{1^{(y)}-x}=(1^{(y)}-x)^{2(y)}=1^{(y)}-2x+yU_x.$$

Ясно теперь в силу (14), что наличие в образе оператора $T_{y,x}$ элемента $2x - yU_x$ влечет наличие единицы $1^{(y)}$ в образе оператора $U^{(y)}_{1^{(y)}-x}$, что влечет по лемме 5 обратимость элемента $1^{(y)} - x$ в алгебре $(J^{(y)})^{\#}$, а это в свою очередь означает квазирегулярность элемента $x$ в $J^{(y)}$. Мы доказали, что г) $\Rightarrow$ а).

Пусть теперь $w = 2xy - y^2U_x$ лежит в образе $T_{y,x}$, т. е. $zT_{y,x} = w$ для некоторого $z \in J$. Так как $1T_{y,x} = 1 - w$, то $(1+z)\,T_{y,x} = 1$. В силу (12в) имеем

$$E = U\left((1+z)\,T_{y,x}\right) = T_{x,y}U_{1+z}T_{y,x},$$

откуда следует сюръективность оператора $T_{y,x}$. Ввиду уже доказанной эквивалентности б) $\Longleftrightarrow$ в), оператор $T_{y,x}$ обратим на $J$. Но тогда обратимо произведение $T_{x,y}U_{1+z} = T^{-1}_{y,x}$ и оператор $U_{1+z}$, следовательно, сюръективен на $J$. Это влечет обратимость оператора $U_{1+z}$, а значит, и оператора $T_{x,y} = T^{-1}_{y,x}U^{-1}_{1+z}$. Теперь в силу (12г) оператор $U_{1-w} = E - 2R_w + U_w$ обратим на $J$ и, следовательно, элемент $w$ квазирегулярен. Таким образом, д) $\Rightarrow$ е). Из соотношения (12г) следует также, что е) $\Rightarrow$ в). Лемма доказана.

В процессе доказательства этой леммы мы установили, что обратимость оператора $T_{x,y}$ влечет обратимость оператора $T_{y,x}$. Это означает, что справедливо следующее предложение.

Предложение 7 (принцип симметрии). *Элемент $x$ квазирегулярен в $J^{(y)}$ тогда и только тогда, когда $y$ квазирегулярен в $J^{(x)}$.*

Справедливо также

Предложение 8 (принцип сдвига). *Элемент $xU_z$ квазирегулярен в $J^{(y)}$ тогда и только тогда, когда $x$ квазирегулярен в $J^{(yU_z)}$.*

Доказательство. Нам понадобится тождество Макдональда

$$yU(xU_z) = yU_zU_xU_z \tag{15}$$

и его линеаризация по $x$:

$$yU(xU_z,\ wU_z) = yU_zU_{x,w}U_z. \tag{16}$$

Допустим, что $x$ квазирегулярен в $J^{(yU_z)}$ с квазиобратным $w$. Это значит в силу пункта в) теоремы 7, что

$$x + w = \{x\,\{zyz\}\,w\},$$
$$\{\{x\,\{zyz\}\,x\}\,\{zyz\}\,w\} = \{x\,\{zyz\}\,\{x\,\{zyz\}\,w\}\}$$

или, что то же самое,

$$x + w = yU_zU_{x,\,w}, \tag{17}$$
$$yU_zU\,(yU_zU_x,\,w) = yU_zU\,(x,\,yU_zU_{x,\,w}). \tag{18}$$

Применив теперь к обеим частям равенства (17) оператор $U_z$, в силу (16) будем иметь

$$xU_z + wU_z = yU_zU_{x,\,w}U_z = yU\,(xU_z,\,wU_z). \tag{19}$$

Применяя $U_z$ к обеим частям равенства (18), получим, ввиду (15) и (16),

$$yU\,(yU\,(xU_z),\,wU_z) = yU\,(xU_z,\,yU\,(xU_z,\,wU_z)). \tag{20}$$

Равенства (19) и (20) можно переписать следующим образом:

$$xU_z + wU_z = (xU_z)\cdot_y(wU_z),$$
$$(xU_z)^{2(y)}\cdot_y(wU_z) = (xU_z)\cdot_y[(xU_z)\cdot_y(wU_z)],$$

но это в силу теоремы 7, в) означает, что $xU_z$ квазирегулярен в гомотопе $J^{(y)}$ с квазиобратным $wU_z$.

Обратно, если $xU_z$ квазирегулярен в $J^{(y)}$, то в силу принципа симметрии $y$ квазирегулярен в $J^{(xU_z)}$, откуда по доказанному выше $yU_z$ квазирегулярен в $J^{(x)}$. Применив еще раз принцип симметрии, получим, что $x$ квазирегулярен в $J^{(yU_z)}$.

Предложение доказано.

Ввиду леммы 12 и принципа симметрии, множество PQI $(J)$ собственно квазирегулярных элементов алгебры $J$ можно охарактеризовать тремя следующими способами:

$$\begin{aligned}\mathrm{PQI}\,(J) &= \{z \mid T_{x,\,z} \text{ обратим для всех } x \in J\} = \\ &= \{z \mid T_{z,\,x} \text{ обратим для всех } x \in J\} = \\ &= \{z \mid \mathcal{Y}\,(J^{(z)}) = J^{(z)}\}.\end{aligned} \tag{21}$$

Следующая лемма оправдывает нашу терминологию.

Лемма 13. *Всякий собственно квазирегулярный элемент квазирегулярен.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathrm{PQI}(J)$. Если в $J$ есть единица, то все очевидно: $z$ квазирегулярен в $J^{(1)}$, т. е. в $J$. В общем случае легко видеть, что элемент $z^2$ квазирегулярен, так как оператор

$$U_{1-z^2} = E - 2R_{z^2} + U_{z^2} = E - 2V_{z,z} + U_z U_z = T_{z,z}$$

обратим на $J$. В силу предложения 5 элемент $z$ также квазирегулярен. Лемма доказана.

Нам удобно будет рассматривать теперь только алгебры с единицей. Для этого нам нужна

Лемма 14. *Для всякой йордановой алгебры $J$ имеет место равенство*

$$\mathrm{PQI}(J) = \mathrm{PQI}(J^{\#}) \cap J.$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathrm{PQI}(J^{\#}) \cap J$. Тогда для любого $x \in J$ этот элемент квазирегулярен в $(J^{\#})^{(x)}$. Так как $J$ является идеалом в $(J^{\#})^{(x)}$, то в силу предложения 3 квазиобратный элемент $w$ к $z$ в $(J^{\#})^{(x)}$ лежит в $J$. Это значит, что $z$ квазирегулярен в $J^{(x)}$ для любого $x \in J$, т. е. $z \in \mathrm{PQI}(J)$.

Пусть теперь $z \in \mathrm{PQI}(J)$. Покажем, что для любого $x' \in J^{\#}$ оператор $T_{x',z}$ обратим на $J^{\#}$. В силу соотношений (12б) имеем

$$T_{-x',z} T_{x',z} = T_{zU_{x'},z},$$

откуда в силу обратимости последнего оператора на $J$ следует сюръективность $T_{x',z}$ на $J$. В частности, элемент $2z - x'U_z$ лежит в образе $T_{x',z}$, откуда в силу леммы 12 $z$ квазирегулярен в $(J^{\#})^{(x')}$, т. е. $z \in \mathrm{PQI}(J^{\#})$.

Лемма 15. $\mathrm{PQI}(J) \subseteq \mathrm{PQI}(J^{(x)})$ *для любого гомотопа* $J^{(x)}$.

Доказательство очевидно, так как в силу леммы 7 всякий гомотоп гомотопа есть снова гомотоп: $J^{(x)(y)} = J^{(yU_x)}$.

Лемма 16. *Если $J$ — йорданова алгебра с единицей и $z \in \mathrm{PQI}(J)$, то элемент $u - z$ обратим для любого обратимого элемента $u$.*

Доказательство. Элемент $u$ является единицей в изотопе $J^{(v)}$, где $v = u^{-1}$. Так как $z$ квазирегулярен в $J^{(v)}$, то $u - z = 1^{(v)} - z$ обратим в $J^{(v)}$. Это эквивалентно тому, что оператор $U^{(v)}_{u-z} = U_v U_{u-z}$ обратим. В силу обратимости $v$ оператор $U_v$ обратим. Следовательно, обратим оператор $U_{u-z}$, а это эквивалентно обратимости $u - z$ в $J$.

Следствие. *Пусть $z$ — собственно квазирегулярный элемент произвольной йордановой алгебры $J$. Тогда элемент $u - z$ обратим в $(J^{(x)})^\#$ для любого обратимого элемента $u$ алгебры $(J^{(x)})^\#$.*

Доказательство. По лемме 15 $z \in \mathrm{PQI}(J^{(x)})$, а по лемме 14 $z \in \mathrm{PQI}((J^{(x)})^\#)$. Теперь остается применить лемму 16.

Теорема 11 (Маккриммон). *$\mathcal{J}(J) = \mathrm{PQI}(J)$ для любой йордановой алгебры $J$.*

Доказательство. Если $z \in \mathcal{J}(J)$, то для любого $x \in J$ элемент $2zx - x^2U_z$ квазирегулярен в $J$, а это в силу леммы 12 означает, что $z$ квазирегулярен в $J^{(x)}$, т. е. $z \in \mathrm{PQI}(J)$. Итак, $\mathcal{J}(J) \subseteq \mathrm{PQI}(J)$.

Остается доказать, что $\mathrm{PQI}(J)$ — идеал. То, что множество $\mathrm{PQI}(J)$ замкнуто относительно умножений на скаляры, следует из (12а) и (21). Докажем, что $\mathrm{PQI}(J)$ замкнуто относительно сложения. Пусть $x, y \in \mathrm{PQI}(J)$. Тогда в алгебре $(J^{(z)})^\#$ элемент

$$1^{(z)} - (x+y) = (1^{(z)} - x) - y$$

обратим в силу следствия леммы 16, а это значит, что $x + y$ квазирегулярен в $J^{(z)}$. В силу произвольности элемента $z$ имеем $x + y \in \mathrm{PQI}(J)$.

Далее, если $x \in \mathrm{PQI}(J)$ и $y \in J$, то для любого $z \in J$ элемент $x$ квазирегулярен в $J^{(zU_y)}$, откуда в силу принципа сдвига имеем квазирегулярность элемента $xU_y$ во всяком гомотопе $J^{(z)}$, т. е. $xU_y \in \mathrm{PQI}(J)$. В силу предложения 4 и леммы 14 мы можем считать, что в алгебре $J$ есть единица. Но тогда

$$xy = {}^1/_2\,(xU_{y+1} - xU_y - x) \in \mathrm{PQI}(J),$$

и мы доказали, что множество $\mathrm{PQI}(J)$ — идеал. Теорема доказана.

**Упражнения**

1. Элемент $a$ ассоциативной алгебры $A$ квазирегулярен тогда и только тогда, когда он квазирегулярен в $A^{(+)}$. Верно также, что

$$\mathcal{J}(A)=\mathcal{J}(A^{(+)}).$$

Указание. Воспользоваться предложением 2 и упражнением 3.1.5.

2 (Маккриммон). Пусть $A$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ и $H = H(A, *)$. Доказать, что если элемент $a \in H$ квазирегулярен с квазиобратным $b$, то $b \in H$. Показать, что элемент $a \in A$ квазирегулярен тогда и только тогда, когда элементы $a + a^* - aa^*$ и $a + a^* - a^*a$ оба квазирегулярны. Установить равенство

$$\mathcal{J}(H)=H\cap\mathcal{J}(A).$$

3 (Ловер). Пусть $J$ — йорданова алгебра и $x \in J$. Тогда

$$\mathcal{J}(J^{(x)})=\{z \mid zU_x \in \mathcal{J}(J)\}.$$

## § 4. Наследственность радикалов

Мы начнем со следующей теоремы.

Теорема 12 (Слинько). *Пусть $J$ — йорданова алгебра, $I$ — идеал в $J$, $M$ — идеал в $I$ и фактор-алгебра $I/M$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. Тогда $M$ — идеал в $J$.*

Докажем сначала в условиях теоремы 12 ряд лемм.

Лемма 17. $M^2J \subseteq M$.

Доказательство. Докажем, что $M+M^2J/M$ — тривиальный идеал в алгебре $I/M$. Для этого достаточно показать, что $(M^2J)\, I \subseteq M$. Так как $M^2$ — это Ф-модуль, натянутый на квадраты элементов из $M$, то достаточно доказать, что $(m^2a)\, i \in M$ для любых $m \in M$, $a \in J$, $i \in I$. (Этот прием на протяжении доказательства теоремы 12 мы будем использовать в дальнейшем без оговорок.) Запишем теперь основное йорданово тождество в виде $(x^2, y, x) = 0$. Линеаризуя его, получим

$$(xy,\ z,\ t) + (xt,\ z,\ y) + (yt,\ z,\ x) = 0. \tag{22}$$

Имеем теперь в силу (22)

$$(m^2a)\, i = m^2\,(ai) + (m^2,\ a,\ i) = m^2\,(ai) - 2\,(mi,\ a,\ m) \in M.$$

Ввиду отсутствия в $I/M$ тривиальных идеалов, $M^2J \subseteq M$. Лемма доказана.

Лемма 18. *$M + xM$ — подалгебра в $J$ для любого элемента $x \in J$.*

Доказательство. Пусть $m, n \in M$. В силу предыдущей леммы $(mn)x \in M$. Поэтому соотношение (3.22) влечет

$$(xm)(xn) = \\ = \frac{1}{2}\{-x^2(mn) + [(xm)x]n + [(xn)x]m + x[(mn)x]\} \in M + xM.$$

Лемма доказана, и одновременно установлено, что для любого $x \in J$ в условиях теоремы 12

$$(xm)(xn) \equiv \frac{1}{2}[(mn)x]x \pmod M. \tag{23}$$

Лемма 19. *$C_x = M + xM + (xM)I$ — идеал в $I$ для любого $x \in J$, такой, что $C_x^2 \subseteq M + xM$.*

Доказательство. Ввиду леммы 18, достаточно показать, что $((xM)I)I \subseteq M + xM$. Пусть $m \in M$, $i, j \in \in I$. Тогда в силу (3.22) имеем

$$[(xm)i]j = -[(xj)i]m - x[(mj)i] + (xm)(ij) + \\ + (xi)(mj) + (xj)(mi) = m' + xm'' + (xm)(ij),$$

где $m', m'' \in M$. Преобразуем $(xm)(ij)$ согласно (22):

$$(xm)(ij) = x[m(ij)] + (x, m, ij) = \\ = x[m(ij)] - (i, m, xj) - (j, m, xi) \in M + xM.$$

Лемма доказана.

Лемма 20. *Для любых $x, y \in J$ имеют место включения:*

а) $((IM)M)x \subseteq M$;

б) $(IM^2)x \subseteq M$;

в) $(((IM^2)M)x)x \subseteq M$;

г) $(M^3y)x \subseteq M$;

д) $(((M^2M^2)y)x)x \subseteq M$;

е) $((M^3x)x)x \subseteq M$.

Доказательство. Пусть $i \in I$, $m, n \in M$.

а) В силу тождества (3.22) получаем

$$[(im)n]x = -[(ix)n]m - i[(mx)n] + (im)(nx) + \\ + (in)(mx) + (ix)(mn) \in M.$$

б) В силу тождества (3.24) имеем

$$(im^2)\,x = -2\,[i\,(mx)]\,m + (ix)\,m^2 + 2\,(im)\,(xm) \in M.$$

Применяя а), б) и тождество (3.22), докажем теперь пункты в) и г):

$$(((im^2)\,n)\,x)\,x = -\,(((im^2)\,x)\,x)\,n - (im^2)\,((nx)\,x) + \\ + ((im^2)\,n)\,x^2 + 2\,((im^2)\,x)\,(nx) \in M,$$

$$(y\,(m^2n))\,x = \\ = -2\,((ym)\,n)\,m)\,x + ((yn)\,m^2)\,x + 2\,((ym)\,(mn))\,x \in M.$$

д) В силу тождества (3.24) получаем

$$(((m^2n^2)\,y)\,x)\,x = -2\,(((m^2\,(ny))\,n)\,x)\,x + \\ + (((m^2y)\,n^2)\,x)\,x + 2\,(((m^2n)\,(ny))\,x)\,x.$$

Первое слагаемое правой части лежит в $M$ по в), второе и третье лежат в $M$ по г) и в силу того, что $M^3$ — идеал в $I$.

е) В силу г) и тождества (3.22) имеем

$$((M^3x)\,x)\,x \subseteq (M^3x)\,x^2 + M^3x^3 \subseteq M.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 12. Пусть $M$ не является идеалом в $J$. Тогда существует элемент $x \in J$ такой, что $xM \nsubseteq M$. В этом случае $C_x/M$ — ненулевой идеал в $I/M$. Покажем, что $(C_x/M)^{(3)} = (0)$, т. е. что идеал $C_x/M$ разрешим индекса $\leqslant 3$. Так как по лемме 19 $C_x^2 \subseteq M + xM$, для этого достаточно доказать, что $(xM)^2\,(xM)^2 \subseteq M$.

Из сравнения (23) следует, что каждый элемент из $(xM)^2$ представляется в виде линейной комбинации элементов вида $(m^2x)\,x$ и элементов из $M$. По лемме 17 $m^2x \in M$, $n^2x \in M$ для любых элементов $m$, $n \in M$, так что, применяя еще раз (23), получим

$$((m^2x)\,x)\,((n^2x)\,x) \equiv \frac{1}{2}\,(((m^2x)\,(n^2x))\,x)\,x \pmod{M}.$$

Отсюда следует, что каждый элемент из $(xM)^2\,(xM)^2$ представляется в виде линейной комбинации элементов из $M$

и элементов вида $(((m^2x)(n^2x))x)x$. Покажем, что последние лежат в $M$. В силу (3.24)

$$(((m^2x)(n^2x))x)x =$$
$$= -\frac{1}{2}(((m^2n^2)x^2)x)x + (((m^2(n^2x))x)x)x + \frac{1}{2}(((m^2x^2)n^2)x)x.$$

Первое слагаемое принадлежит $M$ по лемме 20, д), второе по лемме 20, е) и третье по лемме 20, г).

Итак, мы доказали, что $(C_x/M)^{(3)} = (0)$. Однако по лемме 4.4 фактор-алгебра $I/M$ не содержит ненулевых разрешимых идеалов. Следовательно, $C_x/M = (0)$ и $xM \subseteq \subseteq C_x \subseteq M$. Но это противоречит выбору элемента $x$.

Теорема доказана.

Радикал $\mathcal{R}$ в классе алгебр $\mathfrak{K}$ называется *наднильпотентным*, если все нильпотентные алгебры из $\mathfrak{K}$ являются $\mathcal{R}$-радикальными.

Следствие 1. *Всякий наднильпотентный радикал $\mathcal{R}$ в классе йордановых алгебр удовлетворяет условию* (Н).

Доказательство. Допустим, что в $\mathcal{R}$-полупростой йордановой алгебре $J$ идеал $I$ не $\mathcal{R}$-полупрост. Тогда $\mathcal{R}(I) \neq (0)$ и по теореме 12 $\mathcal{R}(I)$ — идеал в $J$. Но тогда он содержится в $\mathcal{R}(J)$, а это — нулевой идеал. Противоречие. Следствие доказано.

Недавно Никитин доказал утверждение следствия 1 для произвольного радикала $\mathcal{R}$ в классе йордановых алгебр [161].

Следствие 2. *Радикалы $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}$ в классе йордановых алгебр являются наследственными.*

Доказательство. Все перечисленные радикалы наднильпотентны и, ввиду следствия 1, удовлетворяют условию (Н). В силу теоремы 8.3 остается доказать для этих радикалов условие (G), т. е. что идеал радикальной алгебры радикален. Для радикалов $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{Y}$ этот факт тривиален. Условие (G) для радикала Андрунакиевича доказывается так же, как следствие леммы 8.13. Докажем условие (G) для радикала Маккриммона.

Пусть $I$ — идеал в $J$, $\mathcal{M}(J) = J$ и $\mathcal{M}(I) \neq I$. По теореме 12 $\mathcal{M}(I)$ — идеал в $J$. Профакторизовав по $\mathcal{M}(I)$, можно считать, что $\mathcal{M}(J) = J$, $\mathcal{M}(I) = (0)$. Докажем теперь, что $I \cap \mathcal{M}(J) = (0)$, отсюда будет следовать, что $I = (0)$. Пусть $z \in \mathcal{M}_1(J)$ — некоторый абсолютный делитель нуля. Для произвольного элемента $i \in J$ элемент

$zU_i$ — абсолютный делитель нуля в $I$. Ввиду $\mathcal{M}$-полупростоты $I$, имеем $zU_i = 0$ для всех $i \in I$. Тогда $\{izj\} = \frac{1}{2}(zU_{i+j} - zU_i - zU_j) = 0$ для любых $i$, $j \in I$ и, следовательно,

$$\{I\mathcal{M}_1(J)\, I\} = (0).$$

Если бы идеал $I \cap \mathcal{M}_1(J)$ был отличен от нуля, то в силу тождества $(ab)\,c = \frac{1}{2}\{abc\} + \frac{1}{2}\{bac\}$ он был бы нильпотентен индекса 3, что противоречило бы $\mathcal{M}$-полупростоте $I$. Следовательно, $I \cap \mathcal{M}_1(J) = (0)$. Этот факт служит основанием для последующей индукции.

Предположим, что $I \cap \mathcal{M}_\beta(J) = (0)$ для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$. Тогда, если $\alpha$ — предельное порядковое число, то очевидно, что $I \cap \mathcal{M}_\alpha(J) = (0)$. Если $\alpha$ не является предельным, то $\mathcal{M}_\alpha(J)$ есть $\Phi$-модуль, порожденный всевозможными элементами $z \in J$ такими, что $JU_z \subseteq \mathcal{M}_{\alpha-1}(J)$. Пусть $z$ — некоторый элемент такого сорта. Рассмотрим $zU_i$, где $i$ — некоторый элемент из $I$. В силу тождества Макдональда и предположения индукции

$$JU(zU_i) = JU_iU_zU_i \subseteq I \cap \mathcal{M}_{\alpha-1}(J) = (0),$$

но $I$ не содержит абсолютных делителей нуля и, следовательно, $zU_i = 0$ для всех $i \in I$. Теперь аналогично доказательству индуктивного предположения получим, что $I \cap \mathcal{M}_\alpha(J) = (0)$.

Следствие доказано.

## ЛИТЕРАТУРА

Маккриммон [114, 117, 124, 125, 128, 134], Никитин [161], Осборн [163, 165], Скосырский [194], Слинько [208, 209, 211], Эриксон и Монтгомери [284].

*ГЛАВА 15*

# СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ

Развитие структурной теории йордановых алгебр шло в основном теми же путями, что и развитие структурных теорий ассоциативных и альтернативных алгебр. Были, однако, в этом развитии и особенности. Так, после того, как Албертом были изучены конечномерные йордановы алгебры, долгое время оставалось непонятным, какие подмножества в йордановых алгебрах являются аналогами односторонних идеалов. Это стало ясно в 1965 г. после введения Топпингом понятия квадратичного идеала. В 1966 г. Джекобсон рассмотрел невырожденные йордановы алгебры с условием минимальности для квадратичных идеалов и доказал для них теорему, аналогичную теореме Веддерберна-Артина о полупростых артиновых ассоциативных алгебрах. Однако его классификация простых алгебр была неполна: не были описаны алгебры с делением и простые йордановы алгебры емкости 2. Алгебры емкости 2 впоследствии описал Осборн. Вопрос об описании йордановых алгебр с делением в настоящее время не решен.

Так как невырожденные йордановы алгебры есть в точности $\mathcal{M}$-полупростые алгебры, возник вопрос, не будет ли в йордановой алгебре $J$ с условием минимальности для квадратичных идеалов радикал $\mathcal{M}(J)$ нильпотентен. Ответ на этот вопрос оказался положительным. В 1972 г. Слинько доказал, что радикал $\mathcal{Y}(J)$ (и тем более $\mathcal{M}(J)$) нильпотентен в случае, когда алгебра $J$ специальна. Ограничение специальности в этой теореме недавно снял Зельманов.

Ранее Морган доказал, что в йордановой алгебре с условием минимальности для квадратичных идеалов всякий нильпотентный идеал конечномерен.

Таким образом, структура йордановых алгебр с условием минимальности оказывается вполне определенной с точностью до алгебр с делением, так же как и в ассоциативном случае.

## § 1. Квадратичные идеалы

В этом параграфе йордановы алгебры рассматриваются над ассоциативно-коммутативным кольцом Ф, содержащим элемент 1/2.

Пусть $J$ — йорданова алгебра. Подмодуль $Q$ в $J$ называется *квадратичным идеалом*, если $JU_q \subseteq Q$ для всех $q \in Q$. Ясно, что всякий идеал в $J$ является квадратичным идеалом; обратное неверно. Если $J = A^{(+)}$ для некоторой ассоциативной алгебры $A$, то квадратичные идеалы алгебры $J$ — это такие Ф-подмодули $Q$ в $A$, что $qAq \subseteq Q$ для всех $q \in Q$. В частности, все односторонние идеалы алгебры $A$ являются в $A^{(+)}$ квадратичными идеалами.

Пусть $Q$ — квадратичный идеал в $J$ и $q_1, q_2 \in Q$. Тогда для любого $a \in J$ имеем $aU_{q_1, q_2} = {}^1/_2\,(aU_{q_1+q_2} - aU_{q_1} - aU_{q_2}) \in Q$. Это значит, что $JU_{q_1, q_2} \subseteq Q$. Если в алгебре есть единица, то $Q$ является подалгеброй, так как $q_1q_2 = \{q_1 1 q_2\} \in Q$. В общем случае это не так. Однако в силу соотношения $(q_1q_2)\,q_3 = {}^1/_2\,\{q_1q_2q_3\} + {}^1/_2\,\{q_2q_1q_3\}$ можно утверждать, что $Q^3 \subseteq Q$.

Пусть $Q$ — квадратичный идеал алгебры $J$ и $a \in J$. Тогда в силу тождества Макдональда для любого $q \in Q$

$$JU\,(qU_a) = JU_aU_qU_a \subseteq QU_a.$$

Это значит, что множество $QU_a$ является квадратичным идеалом. В частности, $JU_a$ — квадратичный идеал. Он называется *главным квадратичным идеалом, порожденным элементом* $a$. В силу линеаризованного тождества (3.47) имеем

$$\{axa\}\,\{aya\} = \{a\,\{xa^2y\}\,a\}.$$

Отсюда можно заключить, что главный квадратичный идеал всегда является подалгеброй.

Заметим, что если $z$ — абсолютный делитель нуля в $J$, то подмодуль $\Phi \cdot z$ является квадратичным идеалом.

Еще один естественный способ получения квадратичных идеалов заключен в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $J$ — йорданова алгебра, $I$ — идеал в $J$ и $K$ — идеал в $I$. Тогда*

а) *$KI$ — идеал в $I$;*

б) *$KI$ — квадратичный идеал в $J$;*

в) *цепочка $(K, I)_1 \supseteq (K, I)_2 \supseteq \ldots$ состоит из идеалов алгебры $I$ и квадратичных идеалов алгебры $J$.*

Доказательство. Утверждение а) очевидно. Для доказательства б) воспользуемся тождеством

$$(xy, z, t) + (xt, z, y) + (yt, z, x) = 0.$$

Имеем

$$\{(KI)\, J\, (KI)\} \subseteq (J\,(KI))\,(KI) + J\,(KI)^2 \subseteq \subseteq KI + (J, KI, KI) \subseteq KI + (K, KI, JI) + + (I, KI, KJ) \subseteq KI,$$

т. е. б) доказано. Утверждение в) следует из а) и б). Лемма доказана.

Приступим теперь к изучению свойств квадратичных идеалов.

Лемма 2. *Если квадратичный идеал $Q$ алгебры $J$ является подалгеброй, то элемент $q \in Q$ квазирегулярен в $J$ тогда и только тогда, когда он квазирегулярен в $Q$. Кроме того, $\mathcal{J}(J) \cap Q \subseteq \mathcal{J}(Q)$.*

Доказательство. Пусть $q$ квазирегулярен с квазиобратным элементом $p$. Надо доказать, что $p \in Q$. В силу теоремы 14.7 имеем

$$0 = p + q - pq = p + q + q^2 - (p + q)\, q = = p + q + q^2 - (pq)\, q = p + q + q^2 - pU_q,$$

откуда $p = pU_q - q^2 - q \in Q$. Этим первое утверждение леммы доказано. Второе же очевидным образом следует из первого. Лемма доказана.

Для главных квадратичных идеалов, порожденных идемпотентами, играющих в структурной теории важную роль, можно утверждать больше.

Тео ема 1 (Маккриммон). *Для любого идемпотента $e$ йордановой алгебры $J$ справедливы равенства*

$$\mathcal{J}(JU_e) = JU_e \cap \mathcal{J}(J) = \mathcal{J}(J)\, U_e.$$

Доказательство. Последнее равенство очевидно. Докажем первое. Заметим сначала, что включение в одну сторону нами доказано в предыдущей лемме. Пусть $z \in \mathcal{Y}(JU_e)$. Тогда по теореме 14.11 $z$ квазирегулярен в любом гомотопе $(JU_e)^{(xU_e)}$ алгебры $JU_e$. В частности, $z$ квазирегулярен в любом гомотопе $J^{(xU_e)}$ алгебры $J$. В силу принципа сдвига мы получаем квазирегулярность элемента $zU_e$ в любом гомотопе $J^{(x)}$. Но так как $z = zU_e$, по теореме 14.11 $z \in \mathcal{Y}(J)$. Это дает нам включение $\mathcal{Y}(JU_e) \subseteq JU_e \cap \mathcal{Y}(J)$. Таким образом, обратное включение также доказано, а вместе с ним теорема.

Удобным достаточным признаком наличия идемпотента является

Лемма 3. *Пусть $Q$ — ненулевой квадратичный идеал йордановой алгебры $J$, $a \in Q$ и $QU_a = Q$. Тогда $Q$ содержит идемпотент.*

Доказательство. Пусть $c \in Q$ такой, что $cU_a = a$. Тогда в силу тождества (3.47) $a^2 = a^2U_cU_a \in Q$. Обозначим для $q \in Q$ через $\overline{U}_q$ ограничение оператора $U_q$ на $Q$. Тогда в силу тождества Макдональда $U_a = U_aU_cU_a$, откуда следует, что $\overline{U}_c\overline{U}_a = E$. Поэтому для $f = a^2U_c$ имеем

$$f^3 = fU_f = a^2U_cU_cU_aU_aU_c = a^2U_c = f.$$

Но тогда $f^4 = f^2$, и мы имеем две возможности: 1) $f^2$ — идемпотент, 2) $f^2 = 0$. Во втором случае $f = f^3 = 0$, откуда $0 = U_f = U_cU_aU_aU_c$, что дает нам $\overline{U}_a\overline{U}_c = 0$. Но тогда $(\overline{U}_c\overline{U}_a)^2 = 0$. Это противоречие показывает, что второй случай невозможен. Лемма доказана.

Теорема 2. *Йорданова алгебра $J$ не имеет собственных квадратичных идеалов в том и только в том случае, когда $J$ — алгебра с делением, либо $J = \Phi \cdot x$ и $x^2 = 0$.*

Доказательство. Если $J$ — алгебра с делением, то для всякого $0 \neq a \in J$ оператор $U_a$ обратим, и поэтому собственных квадратичных идеалов в алгебре $J$ нет.

Пусть в $J$ нет собственных квадратичных идеалов. Если в $J$ имеется абсолютный делитель нуля $z$, то $\Phi \cdot z$ — квадратичный идеал и $J = \Phi \cdot z$. Если же алгебра $J$ невырож-

дена, то $J = JU_a$ для любого $a \neq 0$. Пусть $b \in J$ таков, что $bU_a = a$, тогда $U_a = U_aU_bU_a$, а это означает, что $U_bU_a = E$. Отсюда следует, что отображение $U_aU_b$ идемпотентно и в силу его сюръективности тождественно. Следовательно, для каждого $a \neq 0$ отображение $U_a$ обратимо.

Заметим, что в силу леммы 3 в алгебре $J$ имеется идемпотент $e$. Тогда $(ex - x)\, U_e = 0$ для любого $x \in J$. В силу обратимости $U_e$ мы имеем $ex = x$, т. е. $e$ — единица в $J$. Так как единица лежит в образе каждого оператора $U_a$ при $a \neq 0$, то по лемме 14.5 каждый ненулевой элемент в $J$ обратим и $J$ — алгебра с делением.

Теорема доказана.

В свете этой теоремы аналогия между квадратичными идеалами йордановых алгебр и односторонними идеалами ассоциативных становится более понятной.

**Упражнения**

Во всех упражнениях $J$ — йорданова $\Phi$-алгебра.

**1.** Для любого $a \in J$ множество $\Phi \cdot a + JU_a$ — квадратичный идеал в $J$.

**2.** Если $I$ — идеал в $J$ и $Q$ — квадратичный идеал в $J$, то $I + Q$ — квадратичный идеал в $J$.

**3.** Показать, что в алгебре $\Phi_n^{(+)}$ однопорожденные подмодули $\Phi \cdot e_{ij}$ являются квадратичными идеалами. Доказать, что сумма таких квадратичных идеалов может не быть квадратичным идеалом.

**4** (З е л ь м а н о в). Множество $\mathfrak{z}(a) = \{x \in J \mid ax = (a, J, x) = 0\}$ назовем *аннулятором элемента* $a \in J$, а множество $\mathfrak{z}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathfrak{z}(a)$ — *аннулятором подмножества* $A \subseteq J$. Доказать, что $\mathfrak{z}(A)$ — квадратичный идеал в $J$.

Пусть, далее, $a, b \in J$, $A \subseteq J$. Тогда

а) $a \in \mathfrak{z}(b) \Leftrightarrow b \in \mathfrak{z}(a)$;

б) $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(A))) = \mathfrak{z}(A)$;

в) если $A$ — идеал в $J$, то и $\mathfrak{z}(A)$ — идеал;

г) $\mathfrak{z}(\{bab\}) \supseteq \mathfrak{z}(b)$;

д) если $ab = ab^2 = 0$, то $b^2 \in \mathfrak{z}(a)$.

**5** (Д ж е к о б с о н). Если $Q$ — минимальный квадратичный идеал в $J$, то имеет место одна из следующих возможностей:

1) $Q = \Phi \cdot z$, где $z$ — абсолютный делитель нуля;

2) $Q = JU_q$ для каждого ненулевого $q \in Q$ и $Q^2 = (0)$;

3) $Q = JU_e$ для некоторого идемпотента $e \in Q$ и $Q$ — алгебра с делением.

**6.** Пусть элементы $a, b \in J$ таковы, что $a^2 = 0 = b^2$ и $2ab = 1$. Тогда в $J$ имеется идемпотент $e \neq 0, 1$.

7. (Джекобсон). Пусть $J$ — невырожденная йорданова алгебра с единицей 1, содержащая минимальный квадратичный идеал. Тогда либо $J$ — алгебра с делением, либо она содержит идемпотент $e \neq 0, 1$.

Указание. Воспользоваться упражнениями 5 и 6.

## § 2. Радикальные идеалы йордановых алгебр с условием минимальности

В этом параграфе все йордановы алгебры рассматриваются над произвольным полем $F$, характеристики $\neq 2$.

Лемма 4 (Маккриммон). *Пусть $I$ — квазирегулярный идеал йордановой алгебры $J$, удовлетворяющей условию минимальности для главных квадратичных идеалов, содержащихся в $I$. Тогда $I \subseteq \mathcal{M}(J)$.*

Доказательство. В силу наследственности радикала Маккриммона достаточно доказать, что $I = \mathcal{M}(I)$. Предположим противное: $I \neq \mathcal{M}(I)$. Тогда, так как по теореме 14.12 $\mathcal{M}(I)$ — идеал в $J$, профакторизовав по этому идеалу, мы можем считать, что $\mathcal{M}(I) = (0)$, т. е. $I$ — невырожденная алгебра.

Рассмотрим минимальный главный квадратичный идеал $Q = JU_a$, содержащийся в $I$. Тогда для любого $0 \neq q \in Q$, ввиду $\mathcal{M}$-полупростоты алгебры $I$, мы имеем $JU_q \neq (0)$ и, следовательно, $JU_q = Q$. Таким образом, каждый ненулевой элемент $q \in Q$ регулярен в смысле фон Неймана, но таких элементов по теореме 14.9 в квазирегулярном идеале $I$ быть не может. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 5 (Морган). *Пусть $I$ — разрешимый идеал йордановой алгебры $J$ с условием минимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$. Тогда идеал $I$ нильпотентен и конечномерен.*

Доказательство. По лемме 4.4 для некоторого натурального числа $n$

$$I = I^{[0]} \supset I^{[1]} \supset \ldots \supset I^{[n]} = (0),$$

где $I^{[i+1]} = (I^{[i]})^3$. Так как для любого $k$ множество $I^{[k]}$ является идеалом в $J$, достаточно доказать, что всякий идеал $L$ такой, что $L^3 = (0)$, конечномерен. Действительно, тогда все факторы $I^{[k-1]}/I^{[k]}$ будут конечномерными, а потому и сам идеал $I$ будет конечномерным. Но тогда по теореме 4.2 он будет и нильпотентным.

Рассмотрим подпространство $L^2$. Так как любой его элемент является абсолютным делителем нуля, это подпространство конечномерно: $L^2 = F\cdot x_1 + \ldots + F\cdot x_p$. Рассмотрим теперь подпространство $L_1 = L^2 + L^2J$ и докажем его конечномерность. Пусть $a,\ b \in J,\ x \in L^2$. Тогда по тождеству (3.22)

$$2\,(xa)\,(xb) = -\,(ab)\,x^2 + 2\,[(xa)\,b]\,x + a\,(x^2b) = 0$$

и, следовательно, $(xa)\,(xb) = 0$. Заметим теперь, что тождество (3.23) можно переписать в виде

$$(x,\ yt,\ z) = (x,\ y,\ z)\,t + (x,\ t,\ z)\,y.$$

В силу этого тождества для любых $x \in L^2,\ a,\ b \in J$

$$bU_{xa} = 2\,[b\,(xa)]\,(xa) = 2\,(b,\ xa,\ xa) = \\ = 2\,(b,\ x,\ xa)\,a + 2\,(b,\ a,\ xa)\,x = 0.$$

Мы установили, что каждый элемент множества $xJ$ является абсолютным делителем нуля и, следовательно, $\dim_F xJ < \infty$. В частности, множества $x_iJ$ конечномерны. Так как

$$L_1 = F\cdot x_1 + \ldots + F\cdot x_p + x_1J + \ldots + x_pJ,$$

то $\dim_F L_1 < \infty$.

В силу тождества (3.22) подпространство $L_1$ — идеал в $J$. Так как в фактор-алгебре $J/L_1$ идеал $L/L_1$ равен в квадрате нулю, то $\dim_F L/L_1 < \infty$, откуда и $\dim_F L < \infty$. Лемма доказана.

Л е м м а 6. *Пусть $I$ — идеал йордановой алгебры $J$. Тогда*

а) $\mathfrak{Z}\,(I) = \{z \in J \mid zI^2 = (zI)\,I = (0)\}$ *— идеал в $J$;*

б) *если* $I^2 = I$, *то* $\mathrm{Ann}\,(I)$ *— идеал в $J$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт а) следует из тождеств (3.23) и (3.24). Пункт б) вытекает из пункта а). Лемма доказана.

Л е м м а 7 (С л и н ь к о). *Пусть $L$ — локально нильпотентный идеал йордановой алгебры $J$, а $I$ — минимальный идеал в $J$. Тогда, если $J$ удовлетворяет условию минимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$, то $I \subseteq \mathfrak{Z}\,(L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы 1в) цепочка

$$(I,\ L)_1 \supseteq (I,\ L)_2 \supseteq \ldots \supseteq (I,\ L)_k \supseteq \ldots$$

состоит из квадратичных идеалов. Пусть $k$ — такое число, что $(I, L)_k = (I, L)_{k+1} = \ldots$ Если $(I, L)_k = (0)$, то $I \cap \mathfrak{Z}(L) \neq (0)$ и по лемме 6 $I \subseteq \mathfrak{Z}(L)$.

Пусть $(I, L)_k \neq (0)$. Тогда множество $M$ квадратичных идеалов $Q$ таких, что 1) $Q \subseteq I$, 2) $Q$ — идеал в $L$ и 3) $QL = Q$, непусто. Пусть $P$ — минимальный элемент в нем. Возьмем произвольный элемент $p \in P$. Множество $pR(L)$ является ненулевым идеалом в $L$, поэтому в силу леммы 1 множество $P' = pR(L)L$ — квадратичный идеал в $J$ и идеал алгебры $L$, содержащийся в $I$. В силу локальной нильпотентности идеала $L$ и теоремы 4.1 $P' \not\ni p$ и, следовательно, $P' \subset P$. Так как свойства 1) и 2) для идеала $P'$ и для всех членов цепочки

$$P' \supseteq (P', L)_1 \supseteq \ldots \supseteq (P', L)_l \supseteq \ldots$$

выполнены, то эта цепочка может стабилизироваться только на нуле, т. е. $(P', L)_l = (0)$ для некоторого $l$. Но в этом случае мы опять имеем $I \cap \mathfrak{Z}(L) \neq (0)$ и, следовательно, $I \subseteq \mathfrak{Z}(L)$.

Лемма доказана.

Лемма 8 (Слинько). *Пусть $L$ — локально нильпотентный идеал йордановой алгебры $J$, удовлетворяющей условию минимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $L$. Тогда идеал $L$ нильпотентен и конечномерен.*

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно доказать разрешимость идеала $L$. Допустим, что он неразрешим. Тогда цепочка

$$L \supseteq L^{[1]} \supseteq \ldots \supseteq L^{[n]} \supseteq \ldots$$

идеалов алгебры $J$ стабилизируется на ненулевом члене:

$$L^{[k]} = L^{[k+1]} = \ldots = L_1 \neq (0).$$

Так как $L_1^3 = L_1$, то и $L_1^2 = L_1$. В силу лемм 6 и 7 заключаем, что $\mathrm{Ann}(L_1)$ — ненулевой идеал в $J$. У идеала $L_1$ в фактор-алгебре $\bar{J} = J/\mathrm{Ann}(L_1)$ имеется ненулевой образ $\bar{L}_1$. Пусть $\bar{I}$ — минимальный идеал алгебры $\bar{J}$, содержащийся в $\bar{L}_1$, и $I$ — его полный прообраз в $J$. Так как $I$ строго содержит $\mathrm{Ann}(L_1)$, мы имеем $IL_1 \neq (0)$.

Докажем теперь, что $IL_1^3 = (0)$; тем самым мы придем к противоречию с тем, что $L_1 = L_1^3$. В самом деле, по лемме 7

$$(IL_1)\, L_1 \subseteq \operatorname{Ann} L_1, \quad IL_1^2 \subseteq \operatorname{Ann} L_1,$$

поэтому

$$((IL_1)\, L_1)\, L_1 = (IL_1^2)\, L_1 = (0).$$

Но теперь в силу тождества (3.23) имеем

$$IL_1^3 \subseteq ((IL_1)\, L_1)\, L_1 + (IL_1^2)\, L_1 = (0).$$

Лемма доказана.

Для специальных алгебр мы можем уже доказать основной результат данного параграфа.

Следствие (Слинько). *Пусть $I$ — квазирегулярный идеал специальной йордановой алгебры $J$, удовлетворяющей условию минимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$. Тогда идеал $I$ нильпотентен и конечномерен.*

Доказательство. В силу леммы 4 $I \subseteq \mathcal{M}(J)$. Однако так как $J$ специальна, по теореме 14.4 $\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{L}(J)$, и наше утверждение следует из леммы 8. Следствие доказано.

Чтобы избавиться от ограничения специальности, надо провести еще некоторые рассуждения, идея которых принадлежит Зельманову.

Лемма 9. *Пусть $A$ — конечнопорожденная ассоциативная алгебра над полем $F$ и $B$ — ее идеал конечной коразмерности. Тогда алгебра $B$ также конечнопорождена.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — порождающие элементы алгебры $A$. Без ограничения общности можно считать, что $A$ имеет единицу 1. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — базис алгебры $A$ по модулю $B$ такой, что $u_1 = 1$, и $V$ — подпространство, натянутое на элементы этого базиса. Имеем соотношения

$$a_i = \sum \alpha_i^{(j)} u_j + b_i,$$
$$u_r u_s = \sum \beta_{rs}^{(i)} u_i + b_{rs}, \tag{1}$$

где $\alpha_i^{(j)}, \beta_{rs}^{(i)} \in F$, $b_i, b_{rs} \in B$. Рассмотрим подалгебру $C$, порожденную элементами вида $u_i b_j u_l$ и $u_i b_{rs} u_l$. В силу

соотношений (1) $C$ — идеал в $A$, так как $a_iC \subseteq C$ и $Ca_i \subseteq \subseteq C$. Индукцией по степени многочлена $f(x_1, \ldots, x_k)$ легко показать, что, каков бы ни был этот многочлен,

$$f(a_1, \ldots, a_k) = \sum \gamma_p u_p + c,$$

где $\gamma_p \in F$, $c \in C$. Если $f(a_1, \ldots, a_k) = b \in B$, то $\sum \gamma_p u_p \in \in B \cap V$. Таким образом,

$$B = (B \cap V) + C$$

и алгебра $B$ конечнопорождена, так как идеал $C$ конечнопорожден, а подпространство $B \cap V$ конечномерно. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $w$, $z$ — абсолютные делители нуля йордановой алгебры $J$. Тогда все элементы множества $JU_{w,z}$ являются абсолютными делителями нуля.*

Доказательство. Заметим, что $U_{w,z} = {}^1/_2 U_{w+z}$, так что достаточно доказать, что для любого $a \in J$ элемент $aU_{w+z}$ — абсолютный делитель нуля. Обозначим $w + z$ через $v$. Покажем, что для всех $a$, $b \in J$ имеет место равенство

$$\{v\ \{avb\}\ v\} = 0. \qquad (2)$$

Действительно, $\{v\{ava\}v\} = 2\{z\{a(z+w)a\}w\} = 2\{z\{aza\}w\} + 2\{z\{awa\}w\} = 2\{\{zaz\}aw\} + 2\{za\{waw\}\} = 0$. Соотношение (2) следует теперь из полученного соотношения линеаризацией по $a$. Заметим, далее, что в силу результата Ширшова — Макдональда во всех йордановых алгебрах справедливо тождество

$$\{\{cac\}\ b\ \{cac\}\} = 2\ \{\{c\ \{acb\}\ c\}\ ac\} - \{cb\ \{c\ \{aca\}\ c\}\}, \qquad (3)$$

так как оно верно во всех специальных алгебрах. Подставляя в (3) элемент $v$ вместо $c$, мы получим в силу (2), что

$$\{\{vav\}\ b\ \{vav\}\} = 0,$$

а это означает, что $aU_v$ — абсолютный делитель нуля в $J$. Лемма доказана.

Пусть $A$ — ассоциативная алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$. Обозначим через $A^{((+))}$ алгебру, векторное пространство которой совпадает с векторным пространством алгебры $A$, а умножение задается формулой $a \circ b = ab + ba$. Легко видеть, что алгебра $A^{((+))}$ йорда-

нова. Всякая подалгебра $J$ этой алгебры вкладывается изоморфно в алгебру $\widetilde{A}^{(+)}$, где $\widetilde{A}$ — ассоциативная алгебра, получающаяся из алгебры $A$ введением нового умножения: $a \cdot b = 2ab$. Поэтому $J$ специальна. Эти рассуждения нам будут нужны в доказательстве следующей леммы.

Лемма 11 (Зельманов). *Пусть йорданова алгебра $J$ порождается конечным набором абсолютных делителей нуля и каждый ее главный квадратичный идеал конечномерен. Тогда $J$ нильпотентна.*

Доказательство. Рассмотрим в алгебре умножений $R(J)$ алгебры $J$ идеал $W = \{w \in R(J) \mid \dim_F Jw < \infty\}$. Так как $JU_{a,\,b} \subseteq JU_{a+b} + JU_a + JU_b$, то $\dim_F JU_{a,\,b} < \infty$ и $U_{a,\,b} \in W$ для любых $a, b \in J$. Ввиду того, что $U_{a,\,b} = R_a \circ R_b - R_{ab}$, отображение $\varphi$: $a \mapsto R_a + W$ есть гомоморфизм алгебры $J$ в $(R(J)/W)^{(+)}$. Таким образом, $J^\varphi$ — специальная йорданова алгебра, порожденная конечным числом абсолютных делителей нуля. По теореме 14.3 алгебра $R(J)/W$ нильпотентна и конечномерна. Так как алгебра $R(J)$ конечнопорождена, то по лемме 9 $W$ — также конечнопорожденная алгебра. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — порождающие алгебры $J$, $v_1, \ldots, v_s$ — базис алгебры $R(J)$ по модулю $W$ и $w_1, \ldots, w_t$ — порождающие алгебры $W$. Тогда $R(J) = W + Fv_1 + \ldots + Fv_s$ и

$$J^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i R(J) = \sum_{i,\,j} F \cdot a_i v_j + JW = \sum_{i,\,j} F \cdot a_i v_j + \sum_{q=1}^{t} J w_q.$$

Отсюда следует, что квадрат алгебры $J$ конечномерен. По следствию к теореме 4.3 и теореме 14.2 идеал $J^2$ нильпотентен. Следовательно, $J$ — разрешимая конечнопорожденная алгебра, которая по теореме Жевлакова 4.2 нильпотентна.

Лемма доказана.

Теорема 3 (Слинько — Зельманов). *Пусть $I$ — квазирегулярный идеал йордановой алгебры $J$, удовлетворяющей условию минимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$. Тогда идеал $I$ нильпотентен и конечномерен.*

Доказательство поведем от противного. По теореме 14.12 локально нильпотентный радикал $\mathcal{L}(I)$ идеала $I$

является идеалом в $J$. По лемме 8 он нильпотентен и конечномерен. Профакторизовав по нему, без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{L}(I) = (0)$. С другой стороны, по лемме 4 $I \subseteq \mathcal{M}(J)$. Покажем, что $I_1 = I \cap \mathfrak{Z}(J)$ есть ненулевой идеал. В силу наследственности радикала Маккриммона $I = \mathcal{M}(I)$ и алгебра $I$ имеет абсолютный делитель нуля $z$. Либо $JU_z = (0)$ и $z$ — абсолютный делитель нуля в $J$, либо $z_1 = aU_z \neq 0$ для некоторого $a \in J$. Но тогда $JU_{z_1} \subseteq IU_z = (0)$ и $z_1$ — ненулевой элемент из $I_1$. В обоих случаях $I_1 \neq (0)$.

Пусть $x$ — произвольный элемент из $I_1$. Тогда $x = z_1 + \ldots + z_n$, где $z_i$ — абсолютные делители нуля в $J$. Рассмотрим главный квадратичный идеал $JU_x = \sum_{i<j} JU_{z_i, z_j}$. В силу условия минимальности и леммы 10 каждое из подпространств $JU_{z_i, z_j}$ конечномерно. Следовательно, главный квадратичный идеал $JU_x$ конечномерен. Тем более конечномерен и квадратичный идеал $I_1U_x$ алгебры $I_1$. Теперь в силу леммы 11 мы можем заключить, что идеал $I_1$ локально нильпотентен. Это противоречит тому, что $\mathcal{L}(I) = (0)$.

Теорема доказана.

**Упражнения**

1 (Слинько). Пусть $J$ — йорданова алгебра над кольцом $\Phi \ni 1/2$, $I$ — ее идеал и $I \subseteq \mathcal{B}(J)$. Доказать, что если $J$ удовлетворяет условию максимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$, то идеал $I$ нильпотентен и конечнопорожден как $\Phi$-модуль.

Указание. Рассуждать по аналогии с доказательством леммы 5.

2 (Зельманов). Пусть $J$ — йорданова алгебра над кольцом $\Phi \ni 1/2$ и $I$ — ее ниль-идеал. Доказать, что если $J$ удовлетворяет условию максимальности для квадратичных идеалов, содержащихся в $I$, то $I$ — нильпотентный идеал, являющийся конечнопорожденным $\Phi$-модулем.

Указание. Ввиду предыдущего упражнения достаточно показать, что $\mathcal{N}(I) \neq (0)$ влечет $I \cap \mathcal{B}(J) \neq (0)$. Сначала с помощью упражнения 4 § 1 доказать, что $\mathcal{M}(J) \cap I \neq (0)$. Затем с помощью леммы 11 показать, что $\mathcal{L}(J) \cap I \neq (0)$. Заключительный этап доказательства проводится также с помощью упражнения 4 § 1.

3. Пусть $J$ — конечнопорожденная йорданова алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$ и $B$ — ее идеал конечной коразмерности. Доказать, что $B$ — конечнопорожденная алгебра.

Указание. Воспользоваться леммой 4.5.

## § 3. Полупростые йордановы алгебры с условием минимальности

На протяжении этого параграфа все йордановы алгебры рассматриваются над полем $F$ характеристики $\neq 2$. Наша цель — определить структуру йордановой алгебры, удовлетворяющей условию минимальности, в случае, если она полупроста, т. е. не содержит нильпотентных (или, что то же самое, квазирегулярных) идеалов. Ключевую роль здесь будет играть тот факт, что полупростая йорданова алгебра с условием минимальности содержит «достаточно много» идемпотентов. Мы докажем это в следующей лемме.

Лемма 12. *Пусть $Q$ — квадратичный идеал йордановой алгебры $J$ с условием минимальности для квадратичных идеалов. Тогда либо каждый элемент в $Q$ нильпотентен, либо $Q$ содержит идемпотент.*

Доказательство. Пусть $x$ — ненильпотентный элемент в $Q$. Рассмотрим цепочку квадратичных идеалов

$$QU_x \supseteq QU_{x^2} \supseteq \ldots \supseteq QU_{x^n} \supseteq \ldots$$

В силу условия минимальности $QU(x^k) = QU(x^{k+1}) = \ldots$ для некоторого числа $k$. Квадратичный идеал $QU(x^k)$ отличен от нуля, так как $x^{2k+1} = xU(x^k) \in QU(x^k)$ и, кроме того, $QU(x^k)\,U(x^{2k+1}) = QU(x^{3k+1}) = QU(x^k)$. По лемме 3 в квадратичном идеале $QU(x^k)$ имеется идемпотент. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь йорданову алгебру $J$ с идемпотентом $e$. Присоединим, если необходимо, к алгебре $J$ формально единицу 1. Тогда элементы $e$ и $1-e$ удовлетворяют соотношениям

$$e + (1-e) = 1, \quad e(1-e) = 0. \tag{4}$$

Поэтому $U_e + 2U_{e,\,1-e} + U_{1-e} = U_{e+(1-e)} = E$ — тождественное отображение алгебры $J^{\#}$ и для любого элемента $x \in J$

$$x = xU_e + 2xU_{e,\,1-e} + xU_{1-e}. \tag{5}$$

Введем обозначения: $x_1 = xU_e$, $x_{1/2} = 2xU_{e,\,1-e}$, $x_0 = xU_{1-e}$. Элементы $x_1$, $x_{1/2}$, $x_0$ лежат в алгебре $J$. Определим также подпространства $J_1 = JU_e$, $J_{1/2} = JU_{e,\,1-e}$, $J_0 = JU_{1-e}$. Ясно, что в силу (5) $J = J_1 + J_{1/2} + J_0$.

Если в ходе доказательства будут фигурировать несколько идемпотентов, то мы вместо $x_i$ и $J_i$ будем писать $x_i(e)$ и $J_i(e)$.

Заметим теперь, что

$$U_e = R_e(2R_e - E), \quad U_{e,1-e} = R_e(R_e - E),$$
$$U_{1-e} = (R_e - E)(2R_e - E)$$

и что в силу тождества (3.25)

$$R_e(R_e - E)(2R_e - E) = 0. \tag{6}$$

Поэтому

$$U_eR_e = U_e, \ U_{e,1-e}R_e = \frac{1}{2}U_{e,1-e}, \quad U_{1-e}R_e = 0.$$

Отсюда следует, что $x_iR_e = ix_i$, $i = 0, 1/2, 1$. Легко видеть теперь, что сумма подпространств $J_i$ — прямая:

$$J = J_1 \oplus J_{1/2} \oplus J_0. \tag{7}$$

Это разложение в сумму подпространств называется *пирсовским разложением*, а подпространства $J_i$ — *пирсовскими компонентами*.

Теорема 4 (Алберт). *Пусть $J$ — йорданова алгебра с идемпотентом $e$. Тогда $J$ раскладывается в прямую сумму пирсовских компонент*

$$J = J_1 \oplus J_{1/2} \oplus J_0,$$

*где $J_i = \{x \in J \mid xe = ix\}$, $i = 0, 1/2, 1$, причем $J_1 = JU_e$, $J_{1/2} = JU_{e,1-e}$, $J_0 = JU_{1-e}$ (единица здесь из алгебры $J^\#$). Компоненты $J_0$ и $J_1$ являются в $J$ квадратичными идеалами. Таблица умножения для пирсовских компонент такова:*

$$\begin{gathered} J_1^2 \subseteq J_1, \qquad J_1J_0 = (0), \qquad J_0^2 \subseteq J_0, \\ J_0J_{1/2} \subseteq J_{1/2}, \quad J_1J_{1/2} \subseteq J_{1/2}, \ J_{1/2}^2 \subseteq J_0 + J_1. \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. Осталось установить только правила умножения для пирсовских компонент. В силу тождества (3.22) для любых $x, y \in J$

$$(xy)e = (xy)e^2 = -2(xe)(ye) + 2((xe)y)e + x(ye).$$

Если $x \in J_i$, $y \in J_j$, это соотношение влечет

$$(2i - 1)(xy)e = j(2i - 1)xy. \tag{9}$$

При $i = 1$ мы получаем, что $J_1 J_j \subseteq J_j$, а при $i = 0$ имеем $J_0 J_j \subseteq J_j$. Отсюда следуют все соотношения из (8), кроме второго и последнего. Но $J_1 J_0 = J_0 J_1 \subseteq J_1 \cap J_0 = (0)$, поэтому остается доказать последнее соотношение. В силу (3.22) для любых $x, y \in J_{1/2}$

$$((xy) e) e = -((xe) e) y - x((ye) e) + (xy) e + \\ + 2(xe)(ye) = (xy) e.$$

Это значит, что $(xy)_1 + {}^1/_4 (xy)_{1/2} = (xy)_1 + {}^1/_2 (xy)_{1/2}$. Следовательно, $(xy)_{1/2} = 0$ и $xy = (xy)_1 + (xy)_0$. Таким образом, и последнее из равенств (8) доказано.

Теорема 5 (Маккриммон). *Если $J$ — йорданова алгебра с идемпотентом $e$, то*

$$\mathscr{Y}(J_i) = J_i \cap \mathscr{Y}(J), \quad i = 0, 1.$$

Доказательство. Так как $J_1(e) = JU_e$, утверждение в случае $i = 1$ следует из теоремы 1. Если алгебра $J$ обладает единицей, то и второе утверждение верно, так как $J_0(e) = J_1(1 - e)$.

Чтобы доказать утверждение для $i = 0$ в общем случае, рассмотрим алгебру $J^{\#}$, полученную формальным присоединением единицы 1 к $J$. Ввиду того, что $J_0$ — идеал в $J_0^{\#}$, мы имеем

$$\mathscr{Y}(J_0) = J_0 \cap \mathscr{Y}(J_0^{\#}) = J_0 \cap (J_0^{\#} \cap \mathscr{Y}(J^{\#})) = J_0 \cap \mathscr{Y}(J).$$

Теорема доказана.

Напомним, что идемпотенты $e$ и $f$ называются *ортогональными*, если $ef = 0$. Идемпотент $e$ алгебры $J$ называется главным, если в $J$ нет идемпотентов, ортогональных к $e$. Это равносильно тому, что компонента $J_0(e)$ не содержит идемпотентов.

Лемма 13. *Всякий ненильпотентный идеал $H$ йордановой алгебры $J$ с условием минимальности для квадратичных идеалов содержит главный идемпотент $e$, для которого $H_0(e)$ — ниль-алгебра.*

Доказательство. В силу леммы 12 в идеале $H$ имеется идемпотент; обозначим его через $e_1$. Рассмотрим компоненту $H_0(e_1)$, которая, как нетрудно видеть, является в $J$ квадратичным идеалом. Если все элементы в $H_0(e_1)$ нильпотентны, то идемпотент $e$ — главный и все доказано. Если же в $H_0(e_1)$ есть ненильпотентный элемент,

то в $H_0(e_1)$ есть также идемпотент $e_2$. Рассмотрим теперь компоненту $H_0(e_1+e_2)$. Так как $1-e_1-e_2 \in J_0^{\#}(e_1)$, то $H_0(e_1+e_2) = HU_{1-e_1-e_2} \subseteq H_0(e_1)$. Это включение является строгим, так как $e_2 \notin H_0(e_1+e_2)$. Проделаем с $H_0(e_1+e_2)$ те же процедуры, что и с $H(e_1)$, и т. д.

Так как цепочка квадратичных идеалов

$$H_0(e_1) \supset H_0(e_1+e_2) \supset \ldots$$

не может быть бесконечной, отсюда следует, что в $H$ есть главный идемпотент $e$, для которого $H_0(e)$ — ниль-алгебра. Лемма доказана.

Теорема 6 (Джекобсон). *Полупростая йорданова алгебра $J$ с условием минимальности для квадратичных идеалов обладает единицей и разлагается в конечную прямую сумму простых йордановых алгебр с единицей, удовлетворяющих условию минимальности.*

Доказательство. Пусть $H$ — минимальный идеал алгебры $J$ и $e$ — главный идемпотент в $H$, который существует в силу леммы 13. По той же лемме $H_0(e)$ — ниль-алгебра и по теореме 5

$$\mathcal{Y}(H) \supseteq H_0(e).$$

Ввиду полупростоты алгебры $J$ и наследственности квазирегулярного радикала, это означает, что $H_0(e) = (0)$.

Рассмотрим произвольный элемент $h_{1/2} = \{eh(1-e)\}$ из $H_{1/2}(e)$. Так как подалгебра, порожденная $e$ и $h$, специальна, вычисляя в обертывающей алгебре, имеем

$$h_{1/2}^2 = \frac{1}{4}[eh(1-e)eh(1-e) + (1-e)he(1-e)he + (1-e)he^2h(1-e) + eh(1-e)^2he] = \frac{1}{4}eh(1-e)he = \frac{1}{4}\{e\{h(1-e)h\}e\}.$$

Поэтому для любого элемента $x \in J$

$$xU(h_{1/2}^2) = \frac{1}{16}xU_eU_hU_{1-e}U_hU_e \subseteq H_0U_hU_e = (0),$$

т. е. $h_{1/2}^2$ — абсолютный делитель нуля в $J$. По теореме 14.2 мы заключаем, что $h_{1/2}^2 = 0$ для любого $h \in H$ и, следовательно, $[H_{1/2}(e)]^2 = (0)$. Из соотношений (8) теперь вытекает, что $H_{1/2}(e)$ — тривиальный идеал в $H$. Поэтому он равен нулю.

Легко заметить теперь, что $J_{1/2}(e) = H_{1/2}(e)$, поэтому $H = H_1(e) = J_1(e)$ и $J_{1/2}(e) = (0)$. Идемпотент $e$ является единицей в $H$ и алгебра $J$ разлагается в прямую сумму идеалов

$$J = H \oplus K,$$

где $K = J_0(e)$. Каждый идеал алгебры $H$ является идеалом в $J$, поэтому $H$ — простая алгебра. Очевидно, что $H$ и $K$ удовлетворяют условию минимальности для квадратичных идеалов.

Обозначим $H$ через $H_1$ и $K$ через $K_1$. Рассмотрим, далее, минимальный идеал $H_2$ алгебры $K_1$. Те же рассуждения, что и выше, дают нам разложение

$$J = H_1 \oplus H_2 \oplus K_2$$

и т. д. Так как цепочка идеалов $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ не может убывать бесконечно, для некоторого числа $s$ мы будем иметь $K_s = (0)$, т. е.

$$J = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_s.$$

Теорема доказана.

Структуру простых йордановых алгебр с условием минимальности описывает

Теорема 7 (Джекобсон — Осборн). *Пусть $J$ — простая йорданова алгебра с условием минимальности для квадратичных идеалов. Тогда она — одна из следующих:*

1) *$J$ — алгебра с делением;*

2) *$J$ — алгебра невырожденной симметрической билинейной формы, определенной на векторном пространстве $V$ над некоторым расширением $K$ основного поля, таким, что $\dim_K V > 1$;*

3) *$J = H(D_n, S_A)$, где $n \geqslant 2$, и $(D, j)$ есть либо $\Delta \oplus \Delta^0$, где $\Delta$ — ассоциативная алгебра с делением, $j$ — инволюция, переставляющая компоненты, либо $D$ — ассоциативная алгебра с делением, $j$ — ее инволюция, либо $D$ — расщепляемая алгебра кватернионов над некоторым расширением основного поля, $j$ — стандартная инволюция, либо $D$ — алгебра Кэли — Диксона над некоторым расширением основного поля, $j$ — стандартная инволюция и $n = 3$.*

Доказательство этой теоремы довольно громоздко, оно хорошо изложено в книге Джекобсона [47], где мы и рекомендуем его читателю прочесть.

Особенно просто устроены конечномерные простые йордановы алгебры над алгебраически замкнутым полем; мы опишем их в упражнениях к этому параграфу.

**Упражнения**

**1.** Пусть $J$ — йорданова алгебра с единицей $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, разлагающейся в сумму попарно ортогональных идемпотентов $e_i$. Тогда $J$ разлагается в прямую сумму подпространств $J = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} J_{ij}$, где

$$J_{ii} = \{x \in J \mid xe_i = x\},$$
$$J_{ij} = \{x \in J \mid xe_i = xe_j = \frac{1}{2} x\},$$

причем компоненты $J_{ij}$ связаны соотношениями

$$J_{ii}^2 \subseteq J_{ii}, \quad J_{ij}J_{ii} \subseteq J_{ij}, \quad J_{ij}^2 \subseteq J_{ii} + J_{jj},$$
$$J_{ii}J_{jj} = J_{ii}J_{jk} = J_{ij}J_{kl} = (0), \quad J_{ij}J_{jk} \subseteq J_{ik},$$

где индексы $i$, $j$, $k$, $l$ различны. Это разложение называется *пирсовским разложением* относительно системы идемпотентов $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

**2.** Пусть индексы $i$, $j$, $k$, $l$ различны и $x_{pq}$, $y_{rs}$, $z_{tl}$ — произвольные элементы компонент $J_{pq}$, $J_{rs}$, $J_{tl}$ соответственно. Тогда

а) $(x_{ij}^2 e_i) x_{ij} = (x_{ij}^2 e_j) x_{ij}$;

б) $(x_{jk} y_{ij}) z_{ij} + (x_{jk} z_{ij}) y_{ij} = x_{jk} (y_{ij} z_{ij})$;

в) $(x_{ij}, y_{jk}, z_{kl}) = 0$;

г) $(x_{ij}, y_{jk}, z_{ki}) e_i = 0$.

**3.** Пусть $H(D_n, S_A)$ — йорданова матричная алгебра. Доказать, что если $n \geqslant 4$, то $D$ ассоциативна.

Указание. Воспользоваться упражнением 2в).

Идемпотент $e$ йордановой алгебры $J$ над полем $F$ называется *примитивным*, если он не разлагается в сумму двух ортогональных идемпотентов, и *абсолютно примитивным*, если каждый элемент пирсовской компоненты $J_1(e)$ имеет вид $\alpha \cdot e + z$, где $\alpha \in F$ и $z$ — нильпотентный элемент.

**4.** Абсолютно примитивный идемпотент примитивен.

Пусть теперь $J$ — конечномерная йорданова алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$.

**5.** Доказать, что всякий идемпотент $e \in J$ (и, в частности, единица 1) разлагается в сумму попарно ортогональных примитивных идемпотентов.

**6.** Доказать, что минимальный аннулирующий многочлен каждого элемента пирсовской компоненты $J_1(e)$ для примитивного идемпотента $e$ является степенью неприводимого над $F$ многочлена.

**7.** Если $F$ алгебраически замкнуто, то каждый примитивный идемпотент абсолютно примитивен.

Поле $F$ впредь будем предполагать алгебраически замкнутым, а алгебру $J$ полупростой.

8. Единица алгебры $J_n$ разлагается в сумму попарно ортогональных идемпотентов $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ таких, что $J_{ii} = F \cdot e_i$ для всех $i$.

Указание. Воспользоваться упражнением 2 к § 14.2, а также теоремами 3 и 5.

**9.** Пусть $x, y \in J_{ij}$, $i \neq j$. Тогда

$$xy = \alpha(e_i + e_j), \quad \alpha \in F.$$

Указание. Используя упражнение 2а), доказать это утверждение в случае $y = x$ и заметить, что этого достаточно.

**10.** Пусть $x \in J_{ij}$. Тогда или $x$ обратим в $J_1(e_i + e_j) = J_{ii} + J_{ij} + J_{jj}$, либо $xJ_{ij} = (0)$. В последнем случае $x$ — абсолютный делитель нуля в $J$.

**11.** Если $J_{ij} \neq (0)$, то существует $u_{ij} \in J_{ij}$ такой, что

$$u_{ij}^2 = e_i + e_j.$$

**12.** Для любого $x_{jk} \in J_{jk}$ из того, что $u_{ij}x_{jk} = 0$, следует, что $x_{jk} = 0$.

**13.** Пусть $s_{ij} = \dim J_{ij}$. Доказать, что если $s_{ij} > 0$ и $s_{jk} > 0$, то $s_{ij} = s_{jk} = s_{ik}$.

Пусть теперь $J$ — простая алгебра.

**14.** Размерности всех компонент $J_{ij}$ для $i \neq j$ одинаковы.

**15.** Если $n = 1$, то $J = F \cdot 1$. Если $n = 2$, то $J = F \cdot 1 + V$ — алгебра невырожденной симметрической билинейной формы.

Указание. В случае $n = 2$ в качестве $V$ можно взять подпространство $F(e_1 - e_2) + J_{12}$.

В дальнейшем предполагаем, что $n \geqslant 3$.

**16.** Пусть $x_{ij} \in J_{ij}$. В силу упражнения 9 $x_{ij}^2 = f_{ij}(x_{ij})(e_i + e_j)$, где $f_{ij}(x_{ij}) \in F$. Доказать, что $f_{ij}$ — строго невырожденная квадратичная форма на $J_{ij}$.

**17.** $f_{ik}(2x_{ij}y_{jk}) = f_{ij}(x_{ij})f_{jk}(y_{jk})$.

**18.** Существует $\dfrac{n(n-1)}{2}$ элементов $e_{ij} \in J_{ij}$, $i < j$, таких, что $e_{ij}^2 = e_i + e_j$, $2e_{ij}e_{jk} = e_{ik}$.

**19.** Доказать, что форма $f_{12}$ допускает композицию

$$f_{12}(x_{12})f_{12}(y_{12}) = f_{12}(8(x_{12}e_{23})(y_{12}e_{13})).$$

Указание. Двукратно применить 17.

**20.** Пусть $p_{ij} = 1 - e_i - e_j + e_{ij}$. Тогда отображение $U_{(ij)} = U_{p_{ij}}$ есть автоморфизм алгебры $J$ порядка 2 со следующими свойствами:

а) $U_{(ij)}$ меняет местами идемпотенты $e_i$ и $e_j$ и переводит одно в другое подпространства $J_{ii}$ и $J_{jj}$, а подпространство $J_{ij}$ — само в себя;

б) $U_{(ij)}$ тождественно на любом $J_{kl}$ при $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$;

в) $U_{(ij)}$ меняет местами подпространства $J_{ik}$ и $J_{jk}$ при $k \neq i, j$ и совпадает с $2R_{e_{ij}}$ на этих подпространствах.

**21.** Пусть $\Sigma$ — группа автоморфизмов алгебры $J$, порожденная автоморфизмами $U_{(ij)}$. Тогда мы имеем единственный изоморфизм $\pi \to U_\pi$ симметрической группы $S_n$ на $\Sigma$ такой, что $(ij) \to U_{(ij)}$. Мы имеем $e_i U_\pi = e_{i\pi}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $\pi \in S_n$. Если $\pi$ и $\pi'$ таковы, что $i\pi = i\pi'$ и $j\pi = j\pi'$ ($i$ и $j$ могут быть одинаковы), то $\pi$ и $\pi'$ одинаково действуют на $J_{ij}$.

Указание. Для доказательства существования гомоморфизма из $S_n$ в $\Sigma$ воспользоваться тем фактом, что ядро гомоморфизма $\theta$ свободной $(n-1)$-порожденной группы с порождающими $x_2, x_3, \ldots, x_n$ на $S_n$ такого, что $\theta(x_i) = (1i)$, есть нормальная подгруппа, порожденная элементами

$$x_j^2, \quad (x_j x_k)^3, \quad (x_j x_k x_j x_l)^2,$$

где $j, k, l$ различны.

**22.** Пусть $D$ — пирсовское подпространство $J_{12}$. Определим на этом подпространстве умножение формулой

$$x \cdot y = 2xU_{(23)}yU_{(13)}.$$

Доказать, что $D$ — композиционная алгебра относительно этого умножения, $e_{12}$ — ее единица, $d \to \bar{d} = dU_{(12)}$ — ее инволюция.

Указание. Воспользоваться упражнениями 19 и 20.

**23.** Для каждой пары индексов $i, j$ определим отображение $x \longmapsto x_{ij}$ алгебры $D$ в $J_{ij}$. Если $i \neq j$, пусть $\pi$ — подстановка такая, что $1\pi = i$, $2\pi = j$, и если $i = j$, то $\pi$ — подстановка такая, что $1\pi = i$. Положим

$$x_{ij} = xU_\pi, \quad i \neq j,$$
$$x_{ii} = (xe_{12})\, e_1 U_\pi.$$

Доказать, что $\overline{x_{ii}} = x_{ii}$ и $\overline{x_{ij}} = x_{ji}$.

**24.** Доказать, что

$$2x_{ij}y_{jk} = (x \cdot y)_{ik}.$$

Указание. Заметить, что в силу определения операции умножения в $D$ мы имеем $(x \cdot y)_{12} = 2x_{13}y_{32}$. Применить к обеим частям этого равенства автоморфизм $U_\pi$, где $1\pi = i$, $2\pi = k$, $3\pi = j$.

**25.** Доказать соотношения

$$x_{ii}y_{ij} = ((x + \bar{x}) \cdot y)_{ij},$$
$$(x_{ij}y_{ji})\, e_i = (x \cdot y)_{ii},$$
$$x_{ii}^2 = (x + \bar{x})_{ii}^2.$$

Указание. Доказать эти соотношения для $i = 1$, $j = 2$, а потом применить подходящий автоморфизм $U_\pi$.

**26.** Доказать теорему:

Теорема (Алберт). *Всякая простая конечномерная йорданова алгебра над алгебраически замкнутым полем $F$ характеристики, не равной 2, изоморфна одной из следующих алгебр:*

1) $F\cdot 1$ — *основному полю;*

2) $F\cdot 1+V$ — *алгебре симметрической невырожденной билинейной формы на векторном пространстве $V$;*

3) *йордановой матричной алгебре $H(D_n)$, где $n\geqslant 3$, $D$ — композиционная алгебра, ассоциативная при $n>3$.*

## ЛИТЕРАТУРА

Алберт [2, 5], Джекобсон [47], Зельманов [82], Маккриммон [117, 124], Морган [155], Осборн [162], Слинько [209, 212, 213], Топинг [228].

*ГЛАВА 16*

# ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Наряду с альтернативными алгебрами в математике часто встречаются алгебры с более слабыми условиями ассоциативности. Важнейшим из этих условий является ассоциативность степеней, т. е. ассоциативность всякой однопорожденной подалгебры. Изучение этого обширного класса алгебр (он содержит, в частности, все антикоммутативные алгебры) встречает пока непреодолимые препятствия. Однако некоторые его подклассы, также содержащие альтернативные алгебры, изучены достаточно хорошо. Наиболее интенсивно изучаются правоальтернативные алгебры, возникающие при изучении некоторого класса проективных плоскостей. В этой главе мы кратко изложим основные факты о правоальтернативных алгебрах, известные к настоящему времени.

## § 1. Алгебры без нильпотентных элементов

Алгебра называется *правоальтернативной*, если она удовлетворяет тождествам

$$(xy)\,y = xy^2, \tag{1}$$

$$((xy)\,z)\,y = x\,((yz)\,y). \tag{2}$$

Напомним, что тождество (1) называется *тождеством правой альтернативности*, а тождество (2) — *правым тождеством Муфанг*. В силу предложения 1.4 во всякой правоальтернативной алгебре справедливы также линеаризации этих тождеств

$$(xy)\,z + (xz)\,y = x\,(y \circ z), \tag{1'}$$

$$((xy)\,z)\,t + ((xt)\,z)\,y = x\,((yz)\,t + (tz)\,y). \tag{2'}$$

Если в аддитивной группе алгебры отсутствуют элементы порядка 2, то правое тождество Муфанг является следствием тождества правой альтернативности. В самом деле, имеем $2(yz)y = (z \circ y) \circ y - z \circ y^2$, откуда в силу (1′) и (1)

$$2x[(yz)y] = x[(z \circ y) \circ y] - x(z \circ y^2) =$$
$$= [x(z \circ y)]y + (xy)(z \circ y) - (xz)y^2 - (xy^2)z =$$
$$= [(xz)y]y + [(xy)z]y + [(xy)z]y + [(xy)y]z - (xz)y^2 -$$
$$- (xy^2)z = 2[(xy)z]y.$$

Заметим, что правое тождество Муфанг эквивалентно тождеству

$$(x, yz, y) = (x, z, y)y. \tag{3}$$

Действительно, мы имеем

$$0 = [(xy)z]y - x[(yz)y] = (x, y, z)y + (x, yz, y) =$$
$$= (x, yz, y) - (x, z, y)y.$$

Теорема 1. *Всякая правоальтернативная алгебра является алгеброй с ассоциативными степенями.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для произвольных неассоциативных слов $u_i = u_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, и произвольного элемента $a$ правоальтернативной алгебры $A$ верно $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = 0$, где $\bar{u}_i = u_i(a)$. Доказательство будем вести индукцией по суммарной длине $d(u_1) + d(u_2) + d(u_3)$. В силу того, что в любой алгебре имеет место равенство

$$(xy, z, t) - (x, yz, t) + (x, y, zt) = x(y, z, t) + (x, y, z)t,$$

мы можем считать, что $u_3(x) = x$. Далее, в силу индуктивного предположения можно считать, что $u_2 = x \cdot u_2'$. Теперь очевидно, что, ввиду (3),

$$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (\bar{u}_1, a \cdot \bar{u}_2', a) = 0.$$

Теорема доказана.

В целях компактного изложения выкладок будем использовать обозначения, введенные в обиход Смайли. Оператор правого умножения $R_c$ обозначим через $c'$.

Положим $c^d = (cd)' - c'd'$ и $c_d = (cd)' - d'c'$. Тождества (1), (1′), (2), (2′) влекут соотношения

$$c'c' = (c^2)', \qquad (cd + dc)' = c'd' + d'c',$$
$$c^c = 0, \qquad c^d + d^c = 0,$$
$$c'd'c' = [(cd)\,c]', \quad c'd's' + s'd'c' = [(cd)\,s + (sd)\,c]'.$$

Теорема 2 (Михеев). *Во всякой правоальтернативной алгебре справедливо тождество (тождество Михеева)*

$$(x, x, y)^4 = 0.$$

Доказательство. Пусть $a$, $b$, $c$ — произвольные элементы правоальтернативной алгебры $A$; положим $q = [a, b]$ и $p = (a, a, b)$. Докажем соотношения:

$$p = -aa^b, \tag{4}$$
$$a^b a_b = 0, \quad a^b a_c + a^c a_b = 0, \tag{5}$$
$$a_b a^b = -(q, a, b)', \tag{6}$$
$$a_b a' a^b = -(qa, a, b)'. \tag{7}$$

Соотношение (4) очевидно. Далее,

$$a^b a_b = (ab)'(ab)' - (ab)'\,b'a' - a'b'\,(ab)' + a'b'b'a' =$$
$$= [(ab)\,(ab)]' - [((ab)\,b)\,a - (ab)\,(ab)]' - [(ab^2)\,a]' = 0.$$

Вторая часть (5) есть линеаризация первой. Докажем теперь (7):

$$a_b a' a^b =$$
$$= (ab)'\,a'\,(ab)' - (ab)'\,a'a'b' - b'a'a'\,(ab)' + b'a'a'a'b' =$$
$$= \{[(ab)\,a]\,(ab) - [(ab)\,a^2]\,b - (ba^2)\,(ab) + (ba^3)\,b\}' =$$
$$= -(qa, a, b)'.$$

Соотношение (6) доказывается аналогично. Теперь в силу (4), (5), (6), (7)

$$p\,(q, a, b) = -aa^b\,(q, a, b)' = aa^b a_b a^b = 0, \tag{8}$$
$$p\,(qa, a, b) = -aa^b\,(qa, a, b)' = aa^b a_b a' a^b = 0. \tag{9}$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$p' = a^{ba} - a'a^b = a_{ba} - a_b a'. \tag{10}$$

Докажем только первое:

$$p' = -(a,\ b,\ a)' = [(a\,(ba) - (ab)\,a]' = [a\,(ba)]' - a'b'a' = \\ = [a\,(ba)]' + a'a'b' - a'(ba)' - a'(ab)' = a^{ba} - a'a^{b}.$$

Применяя последовательно (10), (5), снова (10), (6), (7), (8), (9), имеем

$$a^{b}p'p'p' = a^{b}\,(a_{ba} - a_{b}a')\,(a^{ba} - a'a^{b})\,(a_{ba} - a_{b}a') = \\ = a^{b}a_{ba}\,(a^{ba} - a'a^{b})\,(a_{ba} - a_{b}a') = -a^{b}a_{ba}a^{ba}a_{b}a' - \\ - a^{b}a_{ba}a'a^{b}a_{ba} = -a^{ba}a_{b}a^{b}a_{ba}a' + a^{ba}a_{b}a'a^{b}a_{ba} = \\ = -p'a_{b}a^{b}a_{ba}a' + p'a_{b}a'a^{b}a_{ba} = -p'a_{b}a^{b}p'a' + p'a_{b}a'a^{b}p' = \\ = p'\,(q,\ a,\ b)'\,p'a' - p'\,(qa,\ a,\ b)'\,p' = \\ = \{[p\,(q,\ a,\ b)]\,p\}'\,a' - \{[p\,(qa,\ a,\ b)]\,p\}' = 0.$$

Теперь $p^4 = -aa^{b}p'p'p' = 0$. Теорема доказана.

Следствие 1 (Клейнфелд). *Всякая правоальтернативная алгебра без нильпотентных элементов альтернативна.*

Для конечномерных алгебр справедливо гораздо более сильное утверждение, принадлежащее Алберту [3, 7]. Он доказал, что всякая конечномерная правоальтернативная алгебра над полем характеристики, не равной 2, не содержащая ниль-идеалов, является альтернативной. Это доказательство технически сложно, и мы не будем его здесь приводить.

Следствие 2 (Скорняков). *Всякая правоальтернативная алгебра с делением альтернативна.*

С помощью этого результата Скорняков доказал, что выполнение малой теоремы Дезарга на двух прямых проективной плоскости влечет ее проективное выполнение в этой плоскости.

Вопрос о строении простых правоальтернативных алгебр пока до конца не ясен. Тэди доказал, что при некоторых дополнительных ограничениях простые правоальтернативные алгебры альтернативны [232, 233]. Например, это так, если простая алгебра $A$ содержит идемпотент $e \neq 0,\ 1$, для которого $(e,\ e,\ A) = (0)$. Существовала гипотеза, что простых правоальтернативных неальтернативных алгебр не существует. Однако недавно Михеев [152] опроверг эту гипотезу, построив соответствующий пример. Интересно, что алгебра из примера Михеева удов-

летворяет тождеству $x^3 = 0$, т. е. является ниль-алгеброй ограниченного индекса. Остается надежда, что правоальтернативные алгебры, не содержащие ниль-идеалов, все-таки альтернативны. Некоторым основанием для такой гипотезы является упомянутый выше результат Алберта.

Изучим теперь несколько более детально альтернативные (а следовательно, и правоальтернативные) алгебры без нильпотентных элементов.

Лемма 1. *Во всякой альтернативной алгебре без нильпотентных элементов*

$$(ab)\,c = 0 \Leftrightarrow a\,(bc) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Если $(ab)\,c = 0$, то, используя центральное тождество Муфанг, имеем

$$[a\,(bc)]^3 = a\,(bc\cdot(a\cdot bc\cdot a)\cdot bc) = a\,(bc\cdot(ab\cdot ca)\cdot bc) = \\ = a\,((bc\cdot ab)\,(ca\cdot bc)) = a\,((bc\cdot ab)\,(c\cdot ab\cdot c)) = 0,$$

откуда $a\,(bc) = 0$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Алгебры, удовлетворяющие условию (11), называются *ассоциативными по нулю*; они введены в рассмотрение Рябухиным. Легко видеть, что если в ассоциативной по нулю алгебре произведение некоторых $n$ элементов равно нулю при одной расстановке скобок, то оно равно нулю и при любой другой расстановке.

Лемма 2. *Во всякой ассоциативной по нулю алгебре без нильпотентных элементов*

$$ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0. \tag{12}$$

Доказательство. $ab = 0 \Rightarrow b\,(ab) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (ba)\,b = 0 \Rightarrow [(ba)\,b]\,a = 0 \Rightarrow (ba)^2 = 0 \Rightarrow ba = 0$.

Лемма 3. *Пусть $v = v\,(x_1, \ldots, x_n)$ — полилинейное неассоциативное слово. Если для элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ассоциативной по нулю алгебры $A$ без нильпотентных элементов $v\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, то и $v\,((a_1), a_2, \ldots, a_n) = (0)$, где $(a_1)$ — идеал, порожденный элементом $a_1$ в $A$.*

Доказательство. Пусть $v = x_1x_2$ и $a$ — произвольный элемент $A$. В силу (11) и (12) $a\,(a_1a_2) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (aa_1)\,a_2 = 0$ и $(a_2a_1)\,a = 0 \Rightarrow a_2\,(a_1a) = 0 \Rightarrow (a_1a)\,a_2 = 0$. Повторяя аргумент, получим $(a_1)\cdot a_2 = (0)$.

Проведем индукцию по длине слова $v$. Пусть $d(v) = n > 2$. Рассмотрим один из возникающих тут случаев: $v = (v_1 v_2) v_3$. Если $x_1$ входит в $v_3$, то в силу предположения индукции доказывать нечего. Пусть $x_1$ входит в $v_1$ (рассуждения для $v_2$ аналогичны). Индуктивное предположение позволяет нам считать, что $d(v_2) = d(v_3) = 1$. Пусть $v_2 = x_{n-1}$, $v_3 = x_n$; тогда

$$0 = v(a_1, \ldots, a_n) = (v_1(a_1, \ldots, a_{n-2})\, a_{n-1})\, a_n = v_1(a_1, \ldots, a_{n-2})(a_{n-1}a_n).$$

В силу предположения индукции

$$(0) = v_1((a_1), a_2, \ldots, a_{n-2})(a_{n-1}a_n) = (v_1((a_1), a_2, \ldots, a_{n-2})\, a_{n-1})\, a_n = v((a_1), a_2, \ldots, a_n),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если для некоторого полилинейного неассоциативного слова $v(x_1, \ldots, x_n)$ и элементов $a_1, \ldots, a_n$ ассоциативной по нулю алгебры $A$ без нильпотентных элементов $v(a_1, \ldots, a_n) = 0$, то и для любого однотипного с $v$ неассоциативного слова $u(x_1, \ldots, x_n)$ верно $u(a_1, \ldots, a_n) = 0$.*

Доказательство. $\bar{u} = u(a_1, \ldots, a_n)$ лежит в идеале $(a_i)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому в силу леммы 3 $0 = v(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}) = \bar{u}^n$, откуда и следует утверждение.

Теорема 3 (Рябухин). *Алгебра $A$ является подпрямой суммой алгебр без делителей нуля тогда и только тогда, когда $A$ — ассоциативная по нулю алгебра без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Допустим, что $A$ ассоциативна по нулю и не имеет нильпотентных элементов. Тогда мультипликативный подгруппоид, порожденный ненулевым элементом $a \in A$, не содержит нуля и по лемме Цорна содержится в некотором максимальном подгруппоиде, не содержащем нуля. Обозначим этот группоид $G_a$. Докажем, что $I_a = A \setminus G_a$ — идеал в $A$. Покажем, что множество $I_a$ замкнуто относительно вычитания. Пусть $x \in I_a$. Тогда подгруппоид $\langle G_a, x\rangle$ содержит 0, и, следовательно, существует такое неассоциативное слово $v(x_1, \ldots, x_n)$ и такие элементы $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \langle G_a, x\rangle$, не все принадлежащие $G_a$, что $v(h_1, \ldots, h_n) = 0$. В силу

леммы 4 отсюда вытекает, что $x^i g = 0$ для некоторых $i \geqslant 1$ и $g \in G_a$. В силу той же леммы $x^i g = 0$ влечет $(xg)^i = 0$, откуда получаем $xg = 0$. Если $y$ — другой элемент из $I_a$, то для него найдется $g' \in G_a$ такой, что $yg' = 0$. В силу леммы 2 имеем $gxg' = gyg' = 0$, откуда $g(x-y)g' = 0$, а это означает, что $x - y \notin G_a$, т. е. $x - y \in I_a$.

Кроме того, из леммы 3 следует, что $x \in I_a$ влечет $(x) \subseteq I_a$, так что $I_a$ — идеал в $A$.

Алгебра $A/I_a$, как легко видеть, не содержит делителей нуля и $a \notin I_a$. Очевидно, что алгебра $A$ является подпрямой суммой алгебр $A/I_a$, что доказывает теорему в одну сторону. В другую сторону доказательство очевидно.

Следствие (Львов). *Всякая альтернативная алгебра без нильпотентных элементов является подпрямой суммой алгебр без делителей нуля.*

Ранее Андрунакиевич и Рябухин доказали эту теорему для ассоциативных алгебр.

## § 2. Ниль-алгебры

Рассмотрим свободную правоальтернативную алгебру $\mathrm{RA}[X]$ от множества свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Элемент алгебры $\mathrm{RA}[X]$ назовем *правоальтернативным j-многочленом*, если он выражается через элементы множества $X$ с помощью сложения, умножения на элементы из $\Phi$, возведения в квадрат и «квадратичного умножения» $xU_y = (yx)y$. Множество всех правоальтернативных $j$-многочленов обозначим через $j_{\mathrm{RA}}[X]$. Если $\pi$ — канонический гомоморфизм алгебры $\mathrm{RA}[X]$ на свободную ассоциативную алгебру $\mathrm{Ass}[X]$, то, очевидно, $\pi(j_{\mathrm{RA}}[X]) = j[X]$.

Лемма 5. *Пусть* $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in j_{\mathrm{RA}}[X]$. *Тогда*

$$R_{f(x_1, \ldots, x_n)} = f^{\pi}(R_{x_1}, \ldots, R_{x_n}).$$

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 5.12, где используется только тождество правой альтернативности и правое тождество Муфанг.

Пусть $A$ — правоальтернативная алгебра и $M = \{m_i\}$ — подмножество в $A$. Обозначим через $j_{\mathrm{RA}}[M]$ множество элементов вида $f(m_1, \ldots, m_k)$, где $f \in j_{\mathrm{RA}}[X]$.

Элементы множества $j_{\mathrm{RA}}[M]$ будем называть $j$-многочленами от элементов множества $M$.

Лемма 6. *Пусть в правоальтернативной Ф-алгебре $A$ все $j$-многочлены от элементов некоторого конечного множества $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ нильпотентны, причем их индексы нильпотентности ограничены в совокупности. Тогда подалгебра $M^*$ алгебры правых умножений, порожденная операторами $R_{a_1}, R_{a_2}, \ldots, R_{a_k}$, нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $f \in j_{\mathrm{RA}}[X]$ и $f^m(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Тогда в силу леммы 5

$$(f^\pi)^m(R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}) = R_{f^m(a_1, \ldots, a_k)} = 0.$$

Таким образом, все $j$-многочлены от $R_{a_1}, \ldots, R_{a_k}$ нильпотентны с ограниченными в совокупности индексами нильпотентности, откуда в силу следствия теоремы 5.3 следует нильпотентность подалгебры $M^*$. Лемма доказана.

Будем говорить, что подмножество $M$ алгебры $A$ *правонильпотентно*, если для некоторого числа $N$ все $r_1$-слова от элементов множества $M$ длины $N$ (а следовательно, и большей длины) равны нулю. Алгебру назовем *локально $r_1$-нильпотентной*, если любое ее конечное подмножество правонильпотентно.

Теорема 4 (Ширшов). *Всякая правоальтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса локально $r_1$-нильпотентна.*

Доказательство состоит в применении леммы 6.

Эта теорема имеет ряд важных следствий.

Следствие 1. *Всякая правоальтернативная конечномерная ниль-алгебра $A$ над произвольным полем Ф является правонильпотентной.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $n$ — индекс нильпотентности элемента $a$. Цепочка подпространств

$$A \supset AR_a \supset AR_{a^2} \supset \ldots \supset AR_{a^n} = (0)$$

имеет длину не более размерности алгебры $A$, и, следовательно, индексы нильпотентности всех элементов ограничены в совокупности числом $1 + \dim_\Phi A$. По теореме 4 алгебра $A$ локально $r_1$-нильпотентна; в частности, базис

ее правонильпотентен, но это значит, что и алгебра сама правонильпотентна.

Следствие 2. *Всякая простая конечномерная правоальтернативная алгебра над полем является альтернативной.*

Доказательство. В силу следствия 1 простая конечномерная правоальтернативная алгебра не может быть ниль-алгеброй. Следовательно, она не содержит ниль-идеалов и по упоминавшейся нами в § 1 теореме Алберта является альтернативной.

Естественно спросить, не будет ли всякая конечномерная правоальтернативная ниль-алгебра и нильпотентной? Оказывается, что не будет. Следующий пример пятимерной правонильпотентной, но не нильпотентной алгебры принадлежит Дорофееву [58]. Базис ее — $\{a, b, c, d, e\}$, а умножение задается таблицей (нулевые произведения базисных векторов опущены):

$$ab = -ba = ae = -ea = db = -bd = -c,$$

$$ac = d, \quad bc = e.$$

Утверждение следствия 1 можно усилить. Как показал Шестаков, всякая правоальтернативная Ф-алгебра, конечнопорожденная как Ф-модуль с нильпотентными порождающими элементами, является правонильпотентной.

Свойство локальной $r_1$-нильпотентности изучал Михеев. Он доказал, что это свойство радикально в смысле Амицура—Куроша и отлично от обычной локальной правонильпотентности, которая не является радикальным свойством [151].

**Упражнения**

1 (Ширшов). Определим на неассоциативных словах свободной алгебры $\Phi[X]$ операцию $\langle \quad \rangle$, которая стирает имеющуюся на неассоциативном слове расстановку скобок и расставляет их вновь правонормированным образом. Например: $\langle x_3((x_1x_4)x_2)\rangle = ((x_3x_1)x_4)x_2$. По линейности распространим операцию и на многочлены. Пусть $T_{\mathrm{RA}}$ есть $T$-идеал многообразия правоальтернативных алгебр. Доказать, что $\langle T_{\mathrm{RA}}\rangle = (0)$, и тем самым показать, что операция $\langle \quad \rangle$ корректно определена для свободной правоальтернативной алгебры $\mathrm{RA}[X] = \Phi[X]/T_{\mathrm{RA}}$. Доказать, что для любого $j$-многочлена $f \in j_{\mathrm{RA}}[X]$ имеем $f = \langle f\rangle$.

**2** (Михеев). Доказать, что для любых натуральных чисел $n$ и $t$ существует такое натуральное число $M = M(n, t)$, что для любых $M$ элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_M} \in \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ в алгебре правых умножений свободной правоальтернативной алгебры RA $[X]$ имеет место равенство

$$R_{x_{i_1}} R_{x_{i_2}} \ldots R_{x_{i_M}} = \sum_k R_{j_k(x)} R_{x_{l_1}} \ldots R_{x_{l_k}},$$

где $j_k(x)$ есть $j$-многочлен степени $\geqslant t$.

3 (Михеев). Если идеал $I$ и фактор-алгебра $A/I$ правоальтернативной алгебры $A$ локально $r_1$-нильпотентны, то и $A$ — локально $r_1$-нильпотентная алгебра. Доказать это утверждение и вывести отсюда наличие в классе правоальтернативных алгебр локально $r_1$-нильпотентного радикала.

Указание. Используйте упражнения 1 и 2.

4 (Скосырский). Доказать, что правоальтернативная алгебра $A$ локально $r_1$-нильпотентна тогда и только тогда, когда алгебра $A^{(+)}$ локально нильпотентна.

**5.** Доказать, что во всякой правоальтернативной алгебре справедливы соотношения

$$w(x \odot y)' = (w \odot x) y' + (w \odot y) x' - \{xwy\},$$

$$wx'y' + w(xy)' =$$
$$= 2(w \odot x) y' + 2(w \odot y) x' + 2w \odot (xy) - 4(w \odot y) \odot x,$$

где $u'$ — смайлиевское обозначение для оператора правого умножения $R_u$.

**6.** Пусть $A$ — правоальтернативная алгебра над кольцом Ф, содержащим 1/2, и пусть $I_m$ — ее правый идеал, порожденный множеством $(A^{(+)})^m$, где степень понимается относительно операции умножения алгебры $A^{(+)}$. Доказать, что для любых элементов $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$

$$I_m a_1' a_2' a_3' a_4' \subseteq I_{m+1}.$$

Указание. Используйте соотношения упражнения 5.

7 (Скосырский). Правоальтернативная алгебра $A$ над кольцом Ф, содержащим 1/2, правонильпотентна тогда и только тогда, когда присоединенная йорданова алгебра $A^{(+)}$ нильпотентна.

Указание. Воспользоваться предыдущим упражнением.

**8.** Доказать, что если $I$ — идеал правоальтернативной алгебры $A$, то $AI$ — также идеал в $A$.

9 (Слинько). Доказать, что лево- и правонильпотентная правоальтернативная алгебра нильпотентна.

**10.** Доказать, что для всякого натурального числа $k$ существует натуральное число $h(n, k)$ такое, что в алгебре правых умножений свободной правоальтернативной алгебры RA $[x_1, \ldots, x_n]$ любое слово степени $h(n, k)$ представляется в виде линейной комбинации

слов, каждое из которых содержит оператор $R_{u(x)}$, где $u(x)$ — одночлен степени $\geqslant k$.

Указание. См. доказательство леммы 4.2.

11 (Слинько). Всякая левонильпотентная правоальтернативная алгебра с конечным числом порождающих нильпотентна.

Указание. Воспользоваться упражнениями 8—10.

## ЛИТЕРАТУРА

Алберт [3, 7], Андрунакиевич и Рябухин [19], Дорофеев [58], Клейнфелд [91, 98, 99], Маккриммон [138], Михеев [147—152], Пчелинцев [174], Рябухин [187], Скорняков [191, 192], Скосырский [194], Слинько [207], Смайли [218], Тэди [232—234], Хенцель [245], Хумм [255], Шестаков [267], Ширшов [276, 279].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алберт А. (Albert A. A.), Quadratic forms permitting composition, Ann. Math. **43** (1942), 161—177.
2. Алберт А. (Albert A. A.), A structure theory for Jordan algebras, Ann. Math. **48** (1947), 546—567.
3. Алберт А. (Albert A. A.), On right alternative algebras, Ann. Math. **50** (1949), 318—328.
4. Алберт А. (Albert A. A.), Almost alternative algebras, Portug. Math. **8** (1949), 23—36.
5. Алберт А. (Albert A. A.), A theory of power-associative commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 503—527.
6. Алберт А. (Albert A. A.), On simple alternative rings, Canad. J. Math. **4** (1952), 129—135.
7. Алберт А. (Albert A. A.), The structure of right alternative algebras, Ann. Math., **59**, № 3 (1954), 408—417.
8.* Алберт А. (Albert A. A.), Studies in modern algebra. Studies in Mathematics, v. 2, Math. Assoc. of America; distributor, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
9. Алберт А., Пейдж Л. (Albert A. A., Paige L. J)., On a homomorphism property of a certain Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 20—29.
10. Аллен Х. (Allen H. P.), Jordan algebras and Lie algebras of type $D_4$, J. Algebra **5**, № 2 (1967), 250—265.
11. Аллен Х., Феррар Дж. (Allen H. P., Ferrar J. C.), Jordan algebras and exceptional subalgebras of the exceptional algebra $E_6$, Pacific J. Math. **32**, № 2 (1970), 283—297.
12. Амицур Ш. (Amitsur S.), A general theory of radicals. I, II and III, Amer. J. Math. **74** (1952), 774—786; **76** (1954), 100—125; **76** (1954), 126—136.
13. Андерсон Т. (Anderson T.), The Levitski radical in varieties of algebras, Math. Ann. **194**, № 1 (1971), 27—34.
14. Андерсон Т. (Anderson T.), On the Levitzki radical, Canad. Math. Bull. **17**, № 1 (1974), 5—11.
15. Андерсон Т., Дивинский Н., Сулинский А. (Anderson T., Divinsky N., Sulinski A.), Hereditary radicals in associative and alternative rings, Canad. J. Math. **17**, № 4 (1965), 594—603.
16. Андрунакиевич В. А., Антипростые и сильно идемпотентные кольца, ИАН СССР, сер. матем. **21** (1957), 125—144.

17. Андрунакиевич В. А., Радикалы ассоциативных колец. I, Матем. сб. 44, № 2 (1958), 179—212.
18. Андрунакиевич В. А., Радикалы ассоциативных колец. II, Матем. сб. 55 № 3 (1961), 329—346.
19. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Кольца без нильпотентных элементов и вполне простые идеалы, ДАН СССР 180, № 1 (1968), 9—11.
20. Бабич А. М., О радикале Левицкого, ДАН СССР 126, № 2 (1959), 242—243.
21. Белкин В. П., О многообразиях правоальтернативных алгебр, Алгебра и логика 15, № 5 (1976), 491—508.
22. Блок Р. (Block R. E.), Determination of $A^{(+)}$ for the simple flexible algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 61 (1968), 394—397.
23. Блок Р. (Block R. E.), A unification of the theories of Jordan and alternative algebras, Amer. J. Math. 94 (1972), 389—412.
24. Брак Р., Клейнфелд Э. (Bruck R. H., Kleinfeld E.), The structure of alternative division rings, Proc. Amer. Math. Soc. 2, № 6 (1951), 878—890.
25. Браун Р. (Brown R. B.), On generalized Cayley—Dickson algebras, Pacific J. Math. 20 (1967), 415—422.
26.*Браун Х., Кёхер М. (Braun H., Koecher M.), Jordan-Algebren, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1966.
27. Бриттен Д. (Britten D. J.), On prime Jordan rings $H(R)$ with chain condition, J. Algebra 27, № 2 (1973), 414—421.
28. Бриттен Д., (Britten D. J.), On semiprime Jordan rings $H(R)$ with ACC, Proc. Amer. Math. Soc. 45, № 2 (1974), 175—178.
29. Бриттен Д. (Britten D. J.), Prime Goldie-like Jordan matrix rings and the common multiple property, Communs Algebra 3, № 4 (1975), 365—389.
30. Бриттен Д. (Britten D. J.), On prime Goldie-like quadratic Jordan matrix algebras, Canad. Math. Bull. 20, № 1 (1977), 39—45.
31. Гайнов А. Т., Монокомпозиционные алгебры, Сиб. матем. ж. 10, № 1 (1969), 3—30.
32. Гайнов А. Т., Некоторые классы монокомпозиционных алгебр, ДАН СССР 201, № 1 (1971), 19—21.
33. Гайнов А. Т., Подалгебры невырожденных коммутативных $KM$-алгебр, Алгебра и логика 15, № 4 (1976), 371—383.
34. Гейн В. (Hein W.), A connection between Lie algebras of type $F_4$ and Cayley algebras, Indag. Math. 38, № 5 (1976), 419—425.
35. Глени К. (Glennie C. M.), Some identities valid in special Jordan algebras but not valid in all Jordan algebras, Pacific J. Math. 16, № 1 (1966), 47—59.
36. Глени К. (Glennie C. M.), Identities in Jordan algebras, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), Oxford, Pergamon, 1970, 307—313.

37. Голод Е. С., О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых группах, ИАН СССР, сер. матем. **28** (1964), 273—276.
38. Гордон С. (Gordon S. R.), On the automorphism group of a semisimple Jordan algebra of characteristic zero, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 499—504.
39. Гордон С. (Gordon S. R.), The components of the automorphism group of a Jordan algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 1—52.
40. Гордон С. (Gordon S. R.), An integral basis theorem for Jordan algebras, J. Algebra **24**, № 2 (1973), 258—282.
41. Гордон С. (Cordon S. R.), On the structure group of a split semisimple Jordan algebra, I and II, Communs Algebra **5**, № 10 (1977), 1009—1024, 1025—1056.
42. Гордон С. (Gordon S. R.), Associators in simple algebras, Pacific J. Math. **51**, № 1 (1974), 131—141.
43. Джекобсон Н. (Jacobson N.), A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and exceptional simple Jordan algebras, Amer. J. Math. **76** (1954), 447—452.
44. Джекобсон Н. (Jacobson N.), Structure of alternative and Jordan bimodules, Osaka Math. J. **6** (1954), 1—71.
45. Джекобсон Н. (Jacobson N.), Composition algebras and their automorphisms, Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55—80.
46.*Джекобсон Н., Строение колец, М., ИЛ, 1961.
47.*Джекобсон Н. (Jacobson N.), Structure and representations of Jordan algebras, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., v. 39, Providence, R. I., 1968.
48. Джекобсон Н. (Jacobson N.), Structure groups and Lie algebras of symmetric elements of associative algebras with involution, Advances in Math. **20**, № 2 (1976), 106—150.
49. Джекобсон Н., Маккриммон К. (Jacobson N., McCrimmon K.), Quadratic Jordan algebras of quadratic forms with base points, J. Indian Math. Soc. **35** (1971), 1—45.
50.* Дивинский Н. (Divinsky N.), Rings and radicals, Toronto, Ontario, Canada, 1965.
51. Дивинский Н., Кремпа Я., Сулинский А. (Divinsky N., Krempa J., Sulinski A.), Strong radical properties of alternative and associative rings, J. Algebra **17**, № 3 (1971), 369—388.
52. Дивинский Н., Сулинский А. (Divinsky N., Sulinski A.), Kurosh radicals of rings with operators, Canad. J. Math. **17** (1965), 278—280.
53. Диксон Л. (Dickson L. E.), On quaternions and their generalization and the history of eight square theorem, Ann. Math. **20** (1919), 151—171.
54.*Днестровская тетрадь, нерешенные проблемы теории колец и модулей, Новосибирск, 1976.
55. Дорофеев Г. В., Пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца, УМН **15**, № 3 (1960), 147—150.
56. Дорофеев Г. В., Альтернативные кольца с тремя образующими, Сиб. матем. ж. **4**, № 5 (1963), 1029—1048.

57. Дорофеев Г. В., Один пример к теории альтернативных колец, Сиб. матем. ж. **4**, № 5 (1963), 1049—1052.
58. Дорофеев Г. В., О нильпотентности правоальтернативных колец, Алгебра и логика **9**, № 3 (1970), 302—305.
59. Дорофеев Г. В., О локально нильпотентном радикале неассоциативных колец, Алгебра и логика **10**, № 4 (1971), 355—364.
60. Дорофеев Г. В., Центры неассоциативных колец, Алгебра и логика **12**, № 5 (1973), 530—549.
61. Дорофеев Г. В., О многообразиях обобщенно стандартных и обобщенно достижимых алгебр, Алгебра и логика **15**, № 2 (1976), 143—167.
62. Дорофеев Г. В., Объединение многообразий алгебр, Алгебра и логика **15**, № 3 (1976), 267—291.
63. Дорофеев Г. В., О некоторых свойствах объединения многообразий алгебр, Алгебра и логика **16**, № 1 (1977), 24—39.
64. Дорофеев Г. В., Пчелинцев С. В., О многообразиях стандартных и достижимых алгебр, Сиб. матем. ж. **18**, № 5, (1977), 995—1001.
65. Дорфмейстер Дж., Кёхер М. (Dorfmeister J., Koecher M.), Relative Invarianten und nichtassociative Algebren, Math. Ann. **228**, № 1 (1977), 147—186.
66. Жевлаков К. А., Разрешимость альтернативных ниль-колец, Сиб. матем. ж. **3**, № 3 (1962), 368—377.
67. Жевлаков К. А., О радикальных идеалах альтернативного кольца, Алгебра и логика **4**, № 4 (1965), 87—102.
68. Жевлаков К. А., Альтернативные артиновы кольца, Алгебра и логика **5**, № 3 (1966), 11—36; **6**, № 4 (1967), 113—117.
69. Жевлаков К. А., Разрешимость и нильпотентность йордановых колец, Алгебра и логика **5**, № 3 (1966), 37—58.
70. Жевлаков К. А., Замечания о простых альтернативных кольцах, Алгебра и логика **6**, № 2 (1967), 21—33.
71. Жевлаков К. А., Ниль-идеалы альтернативного кольца, удовлетворяющего условию максимальности, Алгебра и логика **6**, № 4 (1967), 19—26.
72. Жевлаков К. А., О радикалах Клейнфелда и Смайли в альтернативных кольцах, Алгебра и логика **8**, № 2 (1969), 176—180.
73. Жевлаков К. А., Совпадение радикалов Смайли и Клейнфелда в альтернативных кольцах, Алгебра и логика **8**, № 3 (1969), 309—319.
74. Жевлаков К. А., О радикалах и неймановских идеалах, Алгебра и логика **8**, № 4 (1969), 425—439.
75. Жевлаков К. А., Квазирегулярные идеалы в конечнопорожденных альтернативных кольцах, Алгебра и логика **11**, № 2 (1972), 140—161.
76. Жевлаков К. А., Радикал и представления альтернативных колец, Алгебра и логика **11**, № 2 (1972), 162—173.
77. Жевлаков К. А., Замечания о локально нильпотентных кольцах с условиями обрыва, Матем. заметки **12**, № 2 (1972), 121—126.

78. Жевлаков К. А., Нильпотентность идеалов в альтернативных кольцах с условием минимальности, Тр. Моск. матем. о-ва **29** (1973), 133—146.
79.*Жевлаков К. А., Альтернативные кольца и алгебры, Математическая энциклопедия, т. 1, М., 1977, 237—240.
80. Жевлаков К. А., Шестаков И. П., О локальной конечности в смысле Ширшова, Алгебра и логика **12**, № 1 (1973), 41—73.
81. Желябин В. Н., Теорема об отщеплении радикала для альтернативных алгебр над кольцом Гензеля, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, с. 28.
82. Зельманов Е. И., Йордановы алгебры с условием конечности, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, с. 31.
83. Йордан П., фон Нейман Дж., Вигнер Е. (Jordan P., von Neumann J. and Wigner E.), On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, Ann. Math. **36** (1934), 29—64.
84. Йорданеску Р., Поповичи И. (Iordanescu R., Popovici I.), Sur les representations des algebres de Jordan et leur interpretation geometrique, Rev. roum. math. pur. appl. **13**, № 3 (1968), 399—416.
85. Йорданеску Р., Поповичи И. (Iordanescu R., Popovici I.), On representations of special Jordan algebras, Rev. roum. math. pur. appl. **13**, № 8 (1968), 1089—1100.
86. Камберн М. (Camburn M. E.), Local Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **202** (1975), 41—50.
87. Капланский И. (Kaplansky I.), Semisimple alternative rings, Portug. Math. **10** (1951), 37—50.
88. Капланский И. (Kaplansky I.), Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956—960.
89. Кёхер М. (Koecher M.), Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. I and II, Amer. J. Math. **89**, № 3 (1967), 787—816; **90**, № 2 (1968), 476—510.
90. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), An extension of the theorem on alternative division rings, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, № 3 (1952), 348—351.
91. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Right alternative rings, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 939—944.
92. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Simple alternative rings, Ann. Math. 58, № 3 (1953), 545—547.
93. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), On simple alternative rings, Amer. J. Math. **75**, № 1 (1953), 98—104.
94. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Generalization of a theorem on simple alternative rings, Portug. Math. **14**, № 3—4 (1955), 91—94.
95. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Primitive rings and semisimplicity, Amer. J. Math. **77** (1955), 725—730.
96. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Standard and accesible rings, Canad. J. Math. 8 (1956), 335—340.

97. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), Alternative nil rings, Ann. Math. **66** (1957), 395—399.
98.*Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), On alternative and right alternative algebras, Report of a Conference on Linear Algebras, Nat. Acad. Sci.-Nat. Res. Council Publ. **502** (1957), 20—23.
99. Клейнфелд Э. (Kleinfeld E.), On right alternative rings without proper right ideals, Pacific J. Math. **31** (1969), 87—102.
100. Клейнфелд Э., Клейнфелд М., Косьер Ф. (Kleinfeld E., Kleinfeld M. and Kosier F.), A generalization of commutative and alternative rings, Canad. J. Math. **22** (1970), 348—362.
101.*Кон П., Универсальная алгебра, М., «Мир», 1968.
102. Кремпа Я. (Krempa J.), Lower radical properties for alternative rings, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. sci. math. astron. phys. **23**, № 2 (1975), 139—142.
103. Кузьмин Е. Н., О теореме Нагаты — Хигмана, Труды, посвященные 60-летию академика Л. Илиева, София, 1975, 101—107.
104. Курош А. Г., Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах, ИАН СССР, сер. матем. **5** (1941), 233—240.
105. Курош А. Г., Радикалы колец и алгебр, Матем. сб. **33** (1953), 13—26.
106. Линник Ю. В., Обобщение теоремы Фробениуса и установление связи ее с теоремой Гурвица о композиции квадратичных форм, ИАН СССР, сер. матем. № 1 (1938), 41—52.
107. Лус О. (Loos O.), Existence and conjugacy of Cartan subalgebras of Jordan algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 40—44.
108. Лусто Дж. (Loustau J. A.), Radical extensions of Jordan rings, J. Algebra **30**, № 1—3 (1974), 1—11.
109. Лусто Дж. (Loustau J. A.), The structure of algebraic Jordan algebras without nonzero nilpotent elements, Communs algebra **4** (1976), 1045—1070.
110. Львов И. В., О многообразиях ассоциативных колец. I, Алгебра и логика **12**, № 3 (1973), 269—297.
111. Львов И. В., О некоторых конечнобазируемых неассоциативных кольцах, Алгебра и логика **14**, № 1 (1974), 15—27.
112. Лю Шао-сюэ, О расщеплении бесконечных алгебр, Матем. сб. **42** (1957), 327—352.
113. Макдональд И. (MacDonald I. G.), Jordan algebras with three generators, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 395—408.
114. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Jordan algebras of degree 1, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, № 5 (1964), 702.
115. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Norms and noncommutative Jordan algebras, Pacific J. Math. **15**, № 3 (1965), 925—956.

116. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Structure and representations of noncommutative Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **121**, № 1 (1966), 187—199.
117. Маккриммон К. (McCrimmon K.), A general theory of Jordan rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **56**, № 4 (1966), 1072—1079.
118. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Bimodules for composition algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 480—486.
119. Маккриммон К. (McCrimmon K.), A proof of Shafer's conjecture for infinite-dimensional forms admitting composition, J. Algebra 5, № 1 (1967), 72—83.
120. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Generically algebraic algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 527—551.
121. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Macdonald's theorem with inverses, Pacific J. Math. **21**, № 2 (1967), 315—325.
122. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Jordan algebras with interconnected idempotents, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 1327—1336.
123. Маккриммон К. (McCrimmon K.), The Freudenthal-Springer-Tits constructions of exceptional Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969), 495—510.
124. Маккриммон К. (McCrimmon K.), The radical of a Jordan algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **62** (1969), 671—678.
125. Маккриммон К. (McCrimmon K.), On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras, J. Algebra **13** (1969), 382—392.
126. Маккриммон К. (McCrimmon K.), The Freudenthal-Springer-Tits constructions revisited, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 293—314.
127. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Koecher's principle for quadratic Jordan algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 39—43.
128. Маккриммон К. (McCrimmon K.), A characterization of the radical of a Jordan algebra **18** (1971), 103—111.
129. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Speciality of quadratic Jordan algebras, Pacific J. Math. **36**, № 3 (1971), 761—773.
130. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Homotopes of alternative algebras, Math. Ann. **131**, № 4 (1971), 253—262.
131. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Noncommutative Jordan rings, Trans. Amer. Mat. Soc. **158**, № 1 (1971), 1—33.
132. Маккриммон К. (McCrimmon K.), A characterization of the Jacobson-Smiley radical, J. Algebra **18** (1971), 565—573.
133. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Noncommutative Jordan division algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 215—224.

134. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Quadratic Jordan algebras whose elements are all regular or nilpotent, Proc. Amer. Math. Soc. 45, № 1 (1974), 1—27.
135.*Маккриммон К. (McCrimmon K.), Quadratic methods in nonassociative algebras, Proc. of the International Congress of Math., Vancouver, 1974, 325—330.
136. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Malcev's theorem for alternative algebras, J. Algebra 28, № 3 (1974), 484—495.
137. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Absolute zero divisors and local nilpotence in alternative algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 293—299.
138. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Finite-dimensional left Moufang algebras, Math. Ann. 224, № 2 (1976), 179—187.
139. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Malcev's theorem for Jordan algebras, Communs Algebra 5, № 9 (1977), 937—968.
140. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Speciality and reflexivity of quadratic Jordan algebras, Communs Algebra 5, № 9 (1977), 903—936.
141. Маккриммон К. (McCrimmon K.), Axioms for inversion in Jordan algebras, J. Algebra 47, № 1 (1977), 201—222.
142.*Мальцев А. И., Избранные труды, т. 1, Классическая алгебра, М., «Наука», 1976.
143. Марковичев А. С., Ниль-системы и радикал в альтернативных артиновых кольцах, Матем. заметки 11, № 3 (1972), 299—306.
144. Марковичев А. С., О кольцах типа (γ, δ), Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф. ч. 2, Новосибирск, 1977, 55—56.
145. Медведев Ю. А., Локальная конечность периодических подлуп альтернативного PI-кольца, Матем. сб. 103, № 6 (1977), 309—315.
146. Медведев Ю. А., Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, 59—60.
147. Михеев И. М., Об одном тождестве в правоальтернативных кольцах, Алгебра и логика 8, № 3 (1969), 357—366.
148. Михеев И. М., Локально правонильпотентный радикал в классе правоальтернативных колец, Алгебра и логика 11, № 2 (1972), 174—185.
149. Михеев И. М., Теорема Веддербарна об отщеплении радикала для (—1,1)-колец, Алгебра и логика 12, № 3 (1974), 298—304.
150. Михеев И. М., О первичных правоальтернативных кольцах, Алгебра и логика 14, № 1 (1975), 56—60.
151. Михеев И. М., О правой нильпотентности в правоальтернативных кольцах, Сиб. матем. ж. 17, № 1 (1976), 225—227.
152. Михеев И. М., О простых правоальтернативных кольцах, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, с. 61.

153. Монтгомери С. (Montgomery S.), Chain conditions on symmetric elements, Proc. Amer. Math. Soc. **46**, № 3 (1974), 325—331.
154. Монтгомери С. (Montgomery S.), Rings of quotiens for a class of special Jordan algebras, J. Algebra **31**, № 1 (1974), 154—165.
155. Морган Д. (Morgan D. L.), Jordan algebras with minimum condition, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 161—173.
156. Муфанг Р. (Moufang R.), Zur Struktur von Alternativkorpern, Math. Ann. **110** (1935), 416—430.
157. Нагата М. (Nagata M.), On the nilpotency of nil-algebras, J. Math. Soc. Japan **4** (1952), 296—301.
158. Невечежаль Д., Терликовская Б. (Niewieczerzal D., Terlikowska B.), A note on alternative semiprime rings, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. math. astron. phys. **20**, № 4 (1972), 265—268.
159. Никитин А. А., О наднильпотентных радикалах (—1,1)-колец, Алгебра и логика **12**, № 3 (1973), 305—311.
160. Никитин А. А., Почти альтернативные алгебры, Алгебра и логика **13**, № 5 (1974), 501—533.
161. Никитин А. А., Об идеальной наследственности радикалов в йордановых кольцах, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, 61—62.
162. Осборн Дж. (Osborn J. M.), Jordan algebras of capacity two, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **57** (1967), 582—588.
163. Осборн Дж. (Osborn J. M.), Jordan and associative rings with nilpotent and invertible elements, J. Algebra **15**, № 3 (1970), 301—308.
164.*Осборн Дж. (Osborn J. M.), Varieties of algebras, Advances in Math. **8** (1972), 163—369.
165. Осборн Дж. (Osborn J. M.), Representations and radicals of Jordan algebra, Scripta Math. **29**, № 3—4 (1973), 297—329.
166. Ословский Б. (Oslowski B. J.), A note on alternative antisimple rings with finiteness condition, Bull. Acad. pol. sci., ser. sci. math. astron. phys. **23**, № 12 (1975), 1241—1245.
167. Патил К., Расин М. (Patil K. B., Racine M. L.), Central polynomials for Jordan algebras, II, J. Algebra **41**, № 1 (1976), 238—241.
168. Петерсон Х. (Petersson H. P.), Borel subalgebras of alternative and Jordan algebras, J. Algebra **16**, № 4 (1970), 541—560.
169. Полин С. В., О тождествах конечных алгебр, Сиб. матем. ж. **17**, № 6 (1976), 1356—1366.
170.*Прочези К. (Procesi C.), Rings with polynomial identities, Dekker, № 17, N.Y., 1973.
171. Пчелинцев С. В., Свободная (—1,1)-алгебра с двумя порождающими, Алгебра и логика **13**, № 4 (1974), 425—449.

172. Пчелинцев С. В. Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечнопорожденного (—1,1)-кольца, Алгебра и логика **14**, № 5 (1975), 543—571.
173. Пчелинцев С. В., Определяющие тождества одного многообразия правоальтернативных алгебр, Матем. заметки **20**, № 2 (1976), 161—176.
174. П линцев С. В., О локально нильпотентном радикале в некоторых классах правоальтернативных колец, Сиб. матем. ж. **17**, № 2 (1976), 340—360.
175. Размыслов Ю. П., Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики 0, ИАН СССР, сер. матем. **38**, № 4 (1974), 723—756.
176.*Расин М. (Racine M. L.), The arithmetics of quadratic Jordan algebras, Mem. Amer. Math. Soc. № 136, Providence, R. I., 1973,
177. Расин М. (Racine M. L.), On maximal subalgebras, J. Algebra **30**, № 1—3 (1974), 155—180.
178. Расин М. (Racine M. L.), Central polinomials for Jordan algebras. I, J. Algebra **41**, № 1 (1976), 224—237.
179. Расин М. (Racine M. L.), Maximal subalgebras of exceptional Jordan algebras, J. Algebra **46**, № 1 (1977), 12—21.
180. Расин М. (Racine M. L.), Point spaces in exceptional quadratic Jordan algebras, J. Algebra **46**, № 1 (1977), 22—36.
181. Роббинс Д. (Robbins D. P.), Jordan elements in a free associative algebra, J. Algebra **19**, № 3 (1971), 354—374.
182. Роомельди Р. Э., Нижний ниль-радикал (—1,1)-колец, Алгебра и логика **12**, № 3 (1973), 323—332.
183. Роомельди Р. Э., Нильпотентность идеалов в (—1,1)-кольцах с условием минимальности, Алгебра и логика **12**, № 3 (1973), 333—348.
184. Роомельди Р. Э., Разрешимость (—1,1)-ниль-колец, Алгебра и логика **12**, № 4 (1973), 478—489.
185. Роомельди Р. Э., Центры свободного (—1,1)-кольца, Сиб. матем. ж. **18**, № 4 (1977), 861—876.
186. Рябухин Ю. М., Об одном классе локально нильпотентных колец, Алгебра и логика **7**, № 5 (1968), 100—108.
187. Рябухин Ю. М., Алгебры без нильпотентных элементов. I и II, Алгебра и логика **8**, № 2 (1969), 181—214; 215—240.
188. Рябухин Ю. М., Несравнимые ниль-радикалы и неспециальные наднильпотентные радикалы, Алгебра и логика **14**, № 1 (1975), 86—99.
189. Рябухин Ю. М., О счетно порожденных локально $\mathfrak{M}$-алгебрах, ИАН СССР **40**, № 6 (1976), 1203—1223.
190. Скорняков Л. А., Альтернативные тела, Укр. матем. ж. **2**, № 1 (1950), 70—85.
191. Скорняков Л. А., Правоальтернативные тела, ИАН СССР, сер. матем. **15** (1951), 177—184.
192.*Скорняков Л. А., Проективные плоскости, УМН **4**, № 6 (1951), 112—154.
193.*Скорняков Л. А. (Skornjakov L. A.), Alternative rings, Rendiconti di Matematica **24**, № 3—4 (1965), 360—372.

194. Скосырский В. Г., О нильпотентности в йордановых и правоальтернативных алгебрах, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф., ч. 2, Новосибирск, 1977, 68—69.
195. Скрибнер Д. (Scribner D. R.), Lie admissible, nodal, noncommutative Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **154**, (1971), 105—111.
196. Скрибнер Д. (Scribner D. R.), Infinite nodal noncommutative Jordan algebras, differentially simple algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **156** (1971), 381—389.
197. Слейтер М. (Slater M.), Nucleus and center in alternative rings, J. Algebra **7**, № 3 (1967), 372—388.
198. Слейтер М. (Slater M.), Ideals in semiprime alternative rings, J. Algebra **8**, № 1 (1968), 60—76.
199. Слейтер М. (Slater M.), The open case for simple alternative rings, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 712—715.
200. Слейтер М. (Slater M.), Alternative rings with D. C. C. I, J. Algebra **11** (1969), 102—110.
201. Слейтер М. (Slater M.), The socle of an alternative ring, J. Algebra **14** (1970), 443—463.
202. Слейтер М. (Slater M.), Alternative rings with D. C. C., II, J. Algebra **14** (1970), 464—484.
203. Слейтер М. (Slater M.), Prime alternative rings. I and II, J. Algebra **15** (1970), 229—243; 244—251.
204. Слейтер М. (Slater M.), Alternative rings with D. C. C. III, J. Algebra **18** (1971), 179—200.
205. Слейтер М. (Slater M.), Prime alternative rings. III, J. Algebra **21**, № 3 (1972), 394—409.
206. Слейтер М. (Slater M.), Free alternative rings, Notices Amer. Math. Soc. **21**, № 5 (1974), A-480.
207. Слинько А. М., Об эквивалентности некоторых нильпотентностей в правоальтернативных кольцах, Алгебра и логика **9**, № 3 (1970), 342—348.
208. Слинько А. М., О радикалах йордановых колец, Алгебра и логика **11**, № 2 (1972), 206—215.
209. Слинько А. М., О радикале Джекобсона и абсолютных делителях нуля специальных йордановых алгебр, Алгебра и логика **11**, № 6 (1972), 711—723.
210. Слинько А. М., Замечание о радикалах дифференцированиях колец, Сиб. матем. ж. **13**, № 6 (1972), 1395—1397.
211. Слинько А. М., Радикалы йордановых колец, связанных с альтернативными, Матем. заметки **16**, № 1 (1974), 135—140.
212. Слинько А. М., Йордановы алгебры без нильпотентных элементов, удовлетворяющие условиям конечности, Матем. исследования **38** (1976), Кишинев, «Штиинца», 170—176.
213. Слинько А. М., Нижний ниль-радикал в йордановых алгебрах с условием максимальности Алгебра и логика **16**, № 1 (1977), 98—100.
214. Слинько А. М., Шестаков И. П., Правые представления алгебр, Алгебра и логика **13**, № 5 (1974), 544—587.
215. Смайли М. (Smiley M. F.), The radical of alternative ring, Ann. Math. **49**, № 3 (1948), 702—709.

216.*Смайли М. (Smiley M. F.), Some questions concerning alternative rings, Bull. Amer. Math. Soc. **57** (1951), 36—43.
217. Смайли М. (Smiley M. F.), Kleinfeld's proof of the Bruck-Kleinfeld-Skornyakov theorem, Math. Ann. **134**, № 1 (1957), 53—57.
218. Смайли М. (Smiley M. F.), Jordan homomorphism and right alternative rings, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 668—671.
219. Смит Б. (Smith B. D.), A standard Jordan polynomial, Communs Algebra **5**, № 2 (1977), 207—218.
220. Смит К. (Smith K. C.), Noncommutative Jordan algebras of capacity two, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 151—159.
221. Смит К. (Smith K. C.), Extending Jordan ideals and Jordan homomorphisms of symmetric elements in a ring with involution, Canad. J. Math. **24**, № 1 (1972), 50—59.
222. Тафт Э. (Taft E. J.), Invariant Wedderburn factors, Illinois J. Math. **1** (1957), 565—573.
223. Тафт Э. (Taft E. J.), The Whitehead first lemma for alternative algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 950—956.
224. Тафт Э. (Taft E. J.), Invariant splitting in Jordan and alternative algebras, Pacific J. Math. **15**, № 4 (1965), 1421—1427.
225. Тафт Э. (Taft E. J.), On the Whitehead first lemma for Jordan algebras, Math. Z. **107**, № 2 (1968), 83—86.
226. Титс Дж. (Tits J.), Une classe d'algebres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65, Indag. Math. **24** (1962), 530—535.
227. Титс Дж. (Tits J.), Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles, I, Construction, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. **A69**, № 2 (1966), 223—237.
228.*Топинг Д. (Topping D. M.), Jordan algebras of self-adjoint operators, Mem. Amer. Math. Soc., № 53, Providence, R. I., 1965.
229. Тэди А. (Thedy A.), Mutationen und polarisierte Fundamentalformul, Math. Ann. **177** (1968), 235—246.
230. Тэди А. (Thedy A.), Zum Wedderburnschen Zerlegungsatz, Math. Z. **113** (1970), 173—195.
231. Тэди А. (Thedy A.), On rings with completely alternative commutators, Amer. J. Math. **93** (1971), 42—51.
232. Тэди А. (Thedy A.), Right alternative rings, J. Algebra **37**, № 1 (1975), 1—43.
233. Тэди А. (Thedy A.), Right alternative rings with Pierce decomposition, J. Algebra **37**, № 1 (1975), 44—63.
234. Тэди А. (Thedy A.), Right alternative rings with minimal condition, Math. Z. **155**, № 3 (1977), 277—286.
235.*Фолкнер Дж. (Faulkner J. R.), Octonion planes defined by quadratic Jordan algebras, Mem. Amer. Math. Soc., № 104, Providence, R. I., 1970.
236. Фолкнер Дж. (Faulkner J. R.), Orbits of the automorphism group of the exceptional Jordan algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 433—441.

237. Фостер Д. (Foster D. M.), On Cartan subalgebras of alternative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 225—238.
238. Фостер Д. (Foster D. M.), Generalizations of nilpotence and solvability in universal classes of algebras, J. Algebra **26** (1973), 536—555.
239.*Фрейденталь Г. (Freudenthal H.), Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktaven-geometrie, Utrecht, 1951. Русский перевод в ж. «Математика» **1**, № 1 (1957), 117—154.
240. Хельвиг К. (Helwig K. H.), Über Mutationen von Jordan-Algebren, Math. Z. **103**, № 1 (1968), 1—7.
241. Хельвиг К. (Helwig K. H.), Halbeinfache reele Jordan-Algebren, Math. Z. **109**, № 1 (1969), 1—28.
242. Хельвиг К. (Helwig K. H.), Involutionen von Jordan-Algebren, Manuscr. math. **1**, № 3 (1969), 211—229.
243. Хельвиг К. (Helwig K. H.), Jordan-Algebren und symmetrische Räume. I, Math. Z. **115** (1970), 315—349.
244. Хельвиг К., Хирцебрух У. (Helwig K. H., Hirzebruch U.), Über reguläre Jordan-Algebren und eine Äquivalenz-Relation von M. Koecher, Proc. Koninkl. nederl. akad. wet **A71**, № 5 (1968), 460—465; Indag. Math. **30**, № 5 (1968), 460—465.
245. Хенцель И. (Hentzel I. R.), Right alternative rings with idempotents, J. Algebra **17**, № 3 (1971), 303—309.
246. Хенцель И. (Hentzel I. R.), Nil semi-simple (—1,1)-rings, J. Algebra **22**, № 3 (1972), 442—450.
247. Хенцель И. (Hentzel I. R.), The characterization of (—1,1)-rings, J. Algebra **30**, № 1—3 (1974), 236—258.
248. Хенцель И., Каттанео Дж. (Hentzel I. R., Cattaneo G. M.), Simple $(\gamma, \delta)$-Algebras are Associative, J. Algebra **47**, № 1 (1977), 52—76.
249. Хенцель И., Слейтер М. (Hentzel I. R., Slater M.), On the Andrunakievich lemma for alternative rings, J. Algebra **27** (1973), 243—256.
250. Херстейн И. (Herstein I. N.), Sugli anneli semplici alternative, Rend. Mat. e Appl. **23** (1964), 9—13.
251. Херстейн И. (Herstein I. N.), Anneli alternativi ed algebre di compozisione, Rend. Math. e Appl. **23** (1964), 364—393.
252.*Херстейн И., Некоммутативные кольца, М., «Мир», 1972.
253. Хигман Г. (Higman G.), On a conjecture of Nagata, Proc. Cambridge Phil. Soc. **52** (1956), 1—4.
254. Холгейт П. (Holgate P.), Jordan algebras arising in population genetics, Proc. Edinburgh Math. Soc. **15**, № 4 (1967), 291—294.
255. Хумм М. (Humm M.), On a class of right alternative rings without nilpotent elements, J. Algebra **5**, № 2 (1967), 164—175.
256. Хумм М., Клейнфелд Э. (Humm M., Kleinfeld E.), On free alternative rings, J. Combin. theory **2**, № 2 (1967), 140—144.

257. Цай Ч. (Tsai C. E.), The Levitzki radical in Jordan rings, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 119—123.
258. Цорн M. (Zorn M.), Theorie der alternativen Ringe, Abh. math. Seminar Hamburg Univ. 8 (1930), 123—147.
259. Цорн M. (Zorn M.), Alternative rings and related questions. I. Existence of the radical, Ann. Math. **42** (1941), 676—686.
260. Шафер P. (Schafer R. D.), On forms of degree *n* permitting composition, J. Math. Mech. **12** (1963), 777—792.
261*. Шафер P. (Schafer R. D.), An introduction to nonassociative algebras, N.Y., Academic Press, 1966.
262. Шафер P. (Schafer R. D.), Generalized standard algebras, J. Algebra **12**, № 3 (1969), 376—417.
263. Шафер P. (Schafer R. D.), Forms permitting composition, Advances in Math. **4** (1970), 127—148.
264. Шафер P. (Schafer R. D.), A coordinatization theorem for commutative power-associative algebras, Scripta math. **29**, № 3—4 (1973), 437—442.
265. Шелипов A. H., Некоторые свойства ядра альтернативного кольца, Матем. исследования 28 (1973), Кишинев, «Штиинца», 183—187.
266. Шестаков И. П., Конечномерные алгебры с ниль-базисом, Алгебра и логика **10**, № 1 (1971), 87—99.
267. Шестаков И. П., О некоторых классах некоммутативных йордановых колец, Алгебра и логика **10**, № 4 (1971), 407—448.
268. Шестаков И. П., Обобщенно стандартные кольца, Алгебра и логика **13**, № 1 (1974), 88—103.
269. Шестаков И. П. Радикалы и нильпотентные элементы свободных альтернативных алгебр, Алгебра и логика **14**, № 3 (1975), 354—365.
270. Шестаков И. П., Центры альтернативных алгебр, Алгебра и логика **15**, № 3 (1976), 343—362.
271. Шестаков И. П., Абсолютные делители нуля и радикалы конечнопорожденных альтернативных алгебр, Алгебра и логика **15**, № 5 (1976), 585—602.
272. Шестаков И. П., Об одной проблеме Ширшова, Алгебра и логика **16**, № 2 (1977), 227—246.
273. Шестаков И. П., Радикал Жевлакова и представления альтернативных алгебр, Тезисы сообщ. 14-й Всесоюзной алгебраической конф. ч. 2, Новосибирск, 1977, 83—84.
274. Ширшов А. И., О специальных *J*-кольцах, Матем. сб. **38**, № 2 (1956), 149—166.
275. Ширшов А. И., Некоторые теоремы о вложении для колец, Матем. сб. **40** (82) (1956), 65—72.
276. Ширшов А. И., О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах, Матем. сб. **41** (83) (1957), 381—394.
277. Ширшов А. И., О кольцах с тождественными соотношениями, Матем. сб. **43**, № 2 (1957), 277—283.
278. Ширшов А. И., О свободных кольцах Ли, Матем. сб. **45**, № 2 (1958), 113—122.

279.*Ширшов А. И., Некоторые вопросы теории колец, близких к ассоциативным, УМН **13**, № 6 (1958), 3—20.
280. Шпрингер Т. (Springer T. A.), Jordan Algebras and Algebraic Groups, Ergebnisse der Math. **75**, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
281. Штраде Х. (Strade H.), Nodal nichtkommutative Jordan-Algebren und Lie-Algebren bei charakteristic $p > 2$, J. Algebra **21**, № 3 (1972), 353—377.
282. Эйленберг С. (Eilenberg S.), Extensions of algebras, Ann. Soc. Pol. Math. **21** (1948), 125—134.
283. Эриксон Т., Мартиндейл У., Осборн Дж. (Erickson T. S., Martindale W. S., Osborn J. M.), Prime nonassociative algebras, Pacific J. Math. **60**, № 1 (1975), 49—63.
284. Эриксон Т., Монтгомери С. (Erickson T. S., Montgomery S.). The prime radical in special Jordan rings, Trans. Amer. Math. Soc. **156** (1971), 155—164.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

*Константин Александрович Жевлаков*
*Аркадий Михайлович Слинько*
*Иван Павлович Шестаков*
*Анатолий Илларионович Ширшов*

Кольца, близкие к ассоциативным

(Серия: «Современная алгебра»)

М., 1978 г., 432 стр. с илл.

Редактор *В. Л. Попов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *З. В. Автонеева*, *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11076

---

Сдано в набор 23.02.78. Подписано к печати 23.08.78. Т-13056. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 22,68. Уч.-изд. л. 23,48. Тираж 4400 экз. Заказ № 0623. Цена книги 2 руб. 70 коп.

---

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

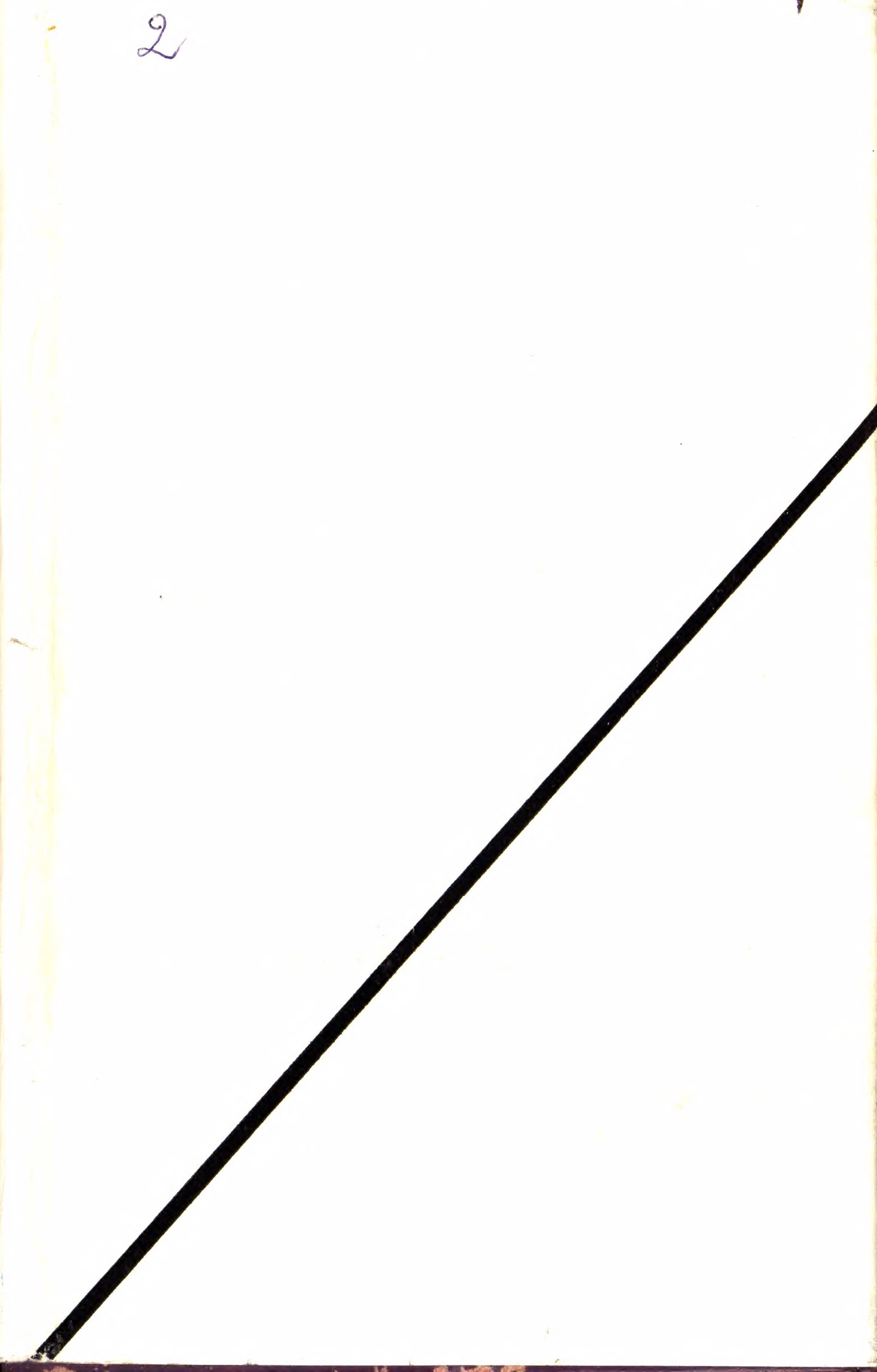
---

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.

Цена 2 р. 70 к.

Алгебра — одна из наиболее подвижных частей математики. Последнее по счету крупное изменение ее структуры произошло в середине 20-го века, когда из чисто теоретической науки, снабжавшей идеями и методами более «прикладные» разделы математики, алгебра сама стала «прикладной» наукой, найдя непосредственные контакты с обширной областью синтеза и математического обеспечения вычислительной техники, с физикой и другими отраслями науки. Это послужило одним из стимулов к современному подъему алгебраических исследований, созданию новых алгебраических дисциплин и коренной перестройке ряда классических областей алгебры.

В серии «Современная алгебра» публикуются монографии, содержащие изложение современного состояния новых или наиболее быстро меняющихся разделов алгебры и смежных областей математики. Особое внимание уделяется освещению нерешенных вопросов и перспектив развития соответствующих разделов науки. Как правило, монографии этой серии независимы друг от друга и рассчитаны на квалифицированных читателей: научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов, занимающихся математикой и математическими вопросами других наук.



КОЛЬЦА, БЛИЗКИЕ К АССОЦИАТИВНЫМ